Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 30 Luglio 2001 - Esercizi

1) Si consideri il seguente sistema non-lineare continuo:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= 2\sin y_1 + u\cos y_1 \end{cases}$$

1.a) Nella regione $-\frac{\pi}{2} < y_1 < \frac{\pi}{2}$, calcolare i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza dei seguenti tre valori costanti dell'ingresso: $u = 0$, $u = 2$ e $u = -2$. Studiare la stabilià di tali punti utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Si utilizzi la retroazione $u = -6y_1 - 4y_2$ e si determini se l'origine è un punto di equilibrio stabile o meno.

2) Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare i sottospazi raggiungibili con il solo ingresso u_1, con il solo ingresso u_2 oppure con entrambi gli ingressi. Si dica se il sistema è stabilizzabile con retroazione dello stato, tramite un solo ingresso o con entrambi gli ingressi.

2.b) Utilizzando il lemma di Heymann, si calcoli, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -2.

3) Si consideri il seguente sistema lineare discreto [$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

3.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

3.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

3.c) Calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$.

4) Scrivere una realizzazione completamente osservabile della seguente matrice di trasferimento:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}, & \frac{s+3}{s^2}, & \frac{2}{s(s+3)} \end{bmatrix}$$

Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 30 Luglio 2001 - Soluzione degli esercizi

1.a) I punti di equilibrio si determinano imponendo $\dot{y}_1 = 0$ e $\dot{y}_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & y_2 \\ 0 & = & 2\sin y_1 + u\cos y_1 \end{array} \right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -\arctan\frac{u}{2} \\ y_2 = 0 \end{array} \right.$$

I punti di equilibrio corrispondenti agli ingressi costanti i) $u = 0$, ii) $u = 2$ e iii) $u = -2$ sono:

$$i)\ (y_1,\ y_2) = (0,\ 0), \qquad ii)\ (y_1,\ y_2) = (-\frac{\pi}{4},\ 0), \qquad iii)\ (y_1,\ y_2) = (\frac{\pi}{4},\ 0)$$

Lo jacobiano del sistema è il seguente:

$$J = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2\cos y_1 - u\sin y_1 & 0 \end{array} \right]$$

In corrispondenza dei tre punti di lavoro, lo jacobiano assume il valore

$$i)\ J_1 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right] \qquad ii)\ J_2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{array} \right] \qquad iii)\ J_3 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{array} \right]$$

Nei tre casi, gli autovalori delle matrici sono

$$i)\ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \qquad ii)\ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2\sqrt{2}} \qquad iii)\ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2\sqrt{2}}$$

In tutti e tre i casi si ha sempre almeno un autovalore a parte reale positiva per cui tutti e tre i punti di equilibrio sono instabili.

1.b) In presenza della retroazione $u = -6y_1 - 4y_2$, il sistema diventa

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & y_2 \\ \dot{y}_2 & = & 2\sin y_1 - (6y_1 + 4y_2)\cos y_1 \end{array} \right.$$

Si può facilmente verificare che l'origine è un punto di equilibrio. In questo caso lo jacobiano si trasforma come segue

$$J = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2\cos y_1 + (6y_1 + 4y_2)\sin y_1 - 6\cos y_1 & -4\cos y_1 \end{array} \right]_{(0,0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{array} \right]$$

Gli autovalori sono stabili, $\lambda_{1,2} = -2$, per cui il punto di lavoro è stabile.

2.a) I sottospazi di raggiungibilià del sistema rispetto al primo e al secondo ingresso sono

$$\mathcal{X}^+_{b1} = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right], \qquad \mathcal{X}^+_{b2} = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]$$

Il sistema non è raggiungibile utilizzando un solo ingresso. Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono tutti instabili, $\lambda_{1,2,3} = 1$, per cui se si utilizza un solo ingresso, la parte non raggiungibile è sicuramente instabile. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione dello stato che utilizzi un solo ingresso. Utilizzando entrambi gli ingressi, il sottospazio di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Il sistema è completamente raggiungibile per cui esiste una matrice $\mathbf{K}$ di retroazione dello stato tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato.

2.b) Applichiamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante il primo ingresso. Le matrici $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{M}_1$ hanno la seguente struttura

$$\mathbf{Q} = \left[\ b_1 \quad \mathbf{A}b_1 \ \middle|\ b_2\ \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & e_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema che si ottiene retroazionato la matrice $\mathbf{M}_1$ è il seguente

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_1} = s^3 - 3s^2 + 2s = s(s-1)(s-2)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}} = (s+2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{K}_1$ che impone al sistema retroazionato gli autovalori desiderati è

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -8 & -10 & -9 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & -10 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & -10 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -28 & -36 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice di retroazione complessiva è quindi

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -28 & -36 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occore portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(k+1) & = \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

3.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 2 \\ l_2 - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}+\bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1}(z) = (z - l_1)(z-1) - 2(l_2 - 1) = z^2 - (l_1+1)z + l_1 + 2 - 2l_2$$

Imponendo $\Delta(z) = z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0.5 - l_3 \\ -1.5 + l_3 \end{bmatrix}$$

3.c) Per calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$ occorre calcolare in quanti passi k lo stato $\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 =$ è raggiungibile. Per $k = 1$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \not\in \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\mathbf{B}$$

Per $k = 2$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} \not\in \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}]$$

Per $k = 3$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$$

Quindi la transizione è possibile solo in 3 passi. La sequenza cercata soddisfa la relazione

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

da cui si ha

$$\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

La sequenza cercata è quindi la sequente: $u(0) = 0.5$, $u(1) = 3.5$ e $u(0) = 1$.

4) La matrice di trasferimento assegnata può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{s+3}{s^2} & \dfrac{2}{s(s+3)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2(s+3)} \begin{bmatrix} s^2+3s & s^2+6s+9 & 2s \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^3+3s^2} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{B_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}}_{B_0} \right\}
\end{aligned}$$

Una realizzazione completamente osservabile della matrice $\mathbf{G}(s)$ é la seguente:

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{aligned} \right.$$

Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 30 Luglio 2001 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1) Il grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

○ è pari al numero di miniblocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;

○ è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;

⊗ è sempre minore od uguale ad n.

○ è pari al numero di autovalori distinti della matrice $\mathbf{A}$;

2) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t & 0 \\ -e^t \sin t & e^t \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

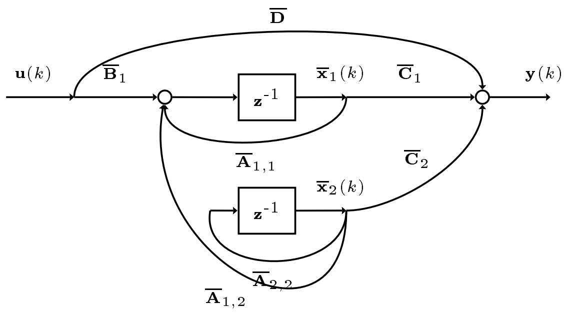
3) Enunciare il criterio di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi discreti.
Sia $\mathbf{x} = 0$ *uno stato di equilibrio per il sistema discreto* $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(x(k))$. *Se in un intorno* W *dell'origine, esiste una funzione* $V(\mathbf{x})$ *definita positiva e se la funzione*

$$\Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x})$$

è semidefinita negativa, allora l'origine è stabile. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ *è definita negativa, allora l'origine è asintoticamente stabile.*

4) Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di raggiungibilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \overline{\mathbf{A}}_{1,2} \\ 0 & \overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



5) Relativamente ad un sistema lineare discreto, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(k+1) = (\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{v}(k) + (\overline{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,2} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}(k)$$

6) Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{X}^+_K$ i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}, \mathbf{B})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

⊗ $\mathcal{X}^+ \subseteq \mathcal{X}^+_K$

⊗ $\mathcal{X}^+_K \subseteq \mathcal{X}^+$

○ nessuna delle precedenti

7) Il sistema duale $\mathcal{S}_D$ del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ è :

- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D})$
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D})$
- ⊗ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$

8) Sia $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k)$ il sistema discreto ottenuto campinando, con periodo di campionamento T, un sistema continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ asintoticamante stabile. Si può allora affermare che

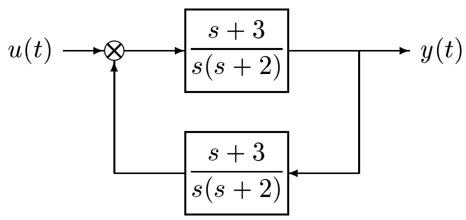
- ⊗ La matrice $\mathbf{F}$ ha tutti gli autovalori a modulo minore di 1;
- ○ La matrice $\mathbf{F}$ ha tutti gli autovalori a parte reale negativa;
- ○ La matrice $\mathbf{F}$ è stabile solo se $T \neq \frac{2k\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j)}$

9) Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)$:

- ⊗ è definita positiva;
- ○ è semi-definita positiva;
- ○ è semi-definita negativa;
- ○ non è definita positiva né negativa.

10) Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- ⊗ Il sistema è completamente raggiungibile;
- ⊗ Il sistema è completamente osservabile;
- ○ Il sistema non è completamente raggiungibile;
- ○ Il sistema non è completamente osservabile.



11) Calcolare l'autovettore dominate relativo alla seguente matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12) Sia dato un sistema lineare SISO caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_o$, $\mathbf{b}_o$ e $\mathbf{c}_o$ della corrispondente forma canonica di osservabilità. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$