Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 27 Febbraio 2001 - Esercizi

1) Si consideri il seguente sistema non-lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& 1 - \cos x_1 + (1 + x_2)^2 \\ \dot{x}_2 &=& x_1 - x_1^3 \end{cases}$$

1.a) Studiare la stabilià del punto di equilibrio $(0, -1)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Studiare la stabilità del precedente punto di lavoro utilizzando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1$.

2) Si consideri il seguente sistema lineare continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t),\; y(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &=& \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &=& \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare le forme standard di raggiungibilità e di osservabilità del sistema dato.

2.b) Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

2.c) Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore. Nella sintesi dell'osservatore si utilizzi la formula di Ackerman.

2.d) Calcolare la trasformazione $\mathbf{T}$ che porta il sistema nella forma canonica "reale" di Jordan.

3) Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\,u(k),\; y(k) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(k)]$

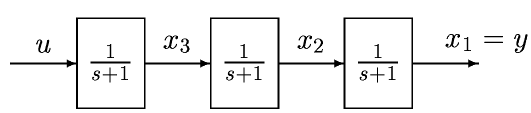
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &=& \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &=& \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

3.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori del 4 sottosistemi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ e $\mathcal{S}_4$.

3.b) Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente *evoluzione libera*: $y(0) = 1$, $y(1) = -1$, $y(2) = 1$.

4) Sia dato il seguente sistema dinamico (cascata di tre sistemi del primo ordine):



Scrivere il sistema nella forma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ del corrispondente sistema discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$ che si ottiene mediante campionamento. Calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ in forma esplicita in funzione del periodo di campionamento T.

1.a) Lo jacobiano del sistema nel punto $(0,\ -1)$ vale

$$J_0 = \left[\begin{array}{cc} \sin x_1 & 2(x_2+1) \\ 1-3x_1^2 & 0 \end{array}\right]_{(0,\ -1)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

Gli autovalori dello jacobiano J_0 sono nulli $\lambda_{1,2} = 0$, per cui utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov non è possibile concludere niente riguardo la stabilità del punto di equilibrio.

1.b) Per concludere lo studio di stabilità del punto di equilibrio $(0,\ 0)$ si utilizza la funzione data:

$$V(x_1, x_2) = x_1$$

Il punto $(0,\ -1)$ è di accumulazione per l'insieme dei punti nei quali $V(x_1, x_2)$ è positiva. La funzione:

$$\dot{V}(x_1, x_2) \quad = \quad \mathrm{grad}V\ \dot{\mathbf{x}} = 1 - \cos x_1 + (1+x_2)^2$$

è definita positiva in $(0,\ -1)$. Pe il criterio di instabilità di Lyapunov si conclude che il punto $(0,\ -1)$ è instabile.

2.a) Il sistema non è completamente raggiungibile:

$$\mathcal{R}^+ = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

Utilizzando la matrice di trasformazione

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

si ottiene il sistema in forma standard di raggiungibilità

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]\overline{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ \hline 0 \end{array}\right]u(t) \\ \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\overline{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

Il sistema è completamente osservabile per cui è già implicitamente in forma standard di osservabilità

$$\mathcal{O}^- = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = -2$$

2.b) Siccome la parte non raggiungibile è stabile, esiste una retroazione dello stato $\mathbf{K} = [\ k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ]$ che stabilizza il sistema complessivo e tale da posizionare in -2 gli autovalori della parte raggiungibile. Per calcolare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ che, nella forma standard di raggiungibilità, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{1,1}}(s) = s^2 + 2s + 2 \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_{1,1}+\mathbf{B}_1\tilde{K}}(s) = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

La matrice $\tilde{K}$ si calcola utilizzando la formula

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbf{K}} & = & \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{-1} = [\ -2 \quad -2\ ]\left\{\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]\right\}^{-1} \\ & = & [\ -2 \quad -2\ ]\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right]^{-1} = [\ -2 \quad -2\ ]\left[\begin{array}{cc} -0.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{array}\right] = [\ -1 \quad 1\ ] \end{array}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = [\ \tilde{\mathbf{K}} \quad \alpha\ ]\,\mathbf{T}^{-1} = [\ -1 \quad 1 \quad \alpha\ ]\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\ \alpha \quad -1 \quad \alpha+1\ ]$$

dove α è un parametro arbitrario.

2.c) Il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno. Utilizzando la formula di Ackerman si ha:

$$\mathbf{L} = -(\mathbf{A}+\mathbf{I})^3(\mathcal{O}^-)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= -\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.d) Il polinomio caratteristico del sistema è:

$$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s+2 & -1 & 1 \\ 2 & s+1 & 1 \\ 0 & 1 & s+1 \end{vmatrix} = (s+2)[(s+1)^2+1]$$

Gli autovalori della matrice sono:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_{2,3} = -1 \pm j$$

L'autovettore $\mathbf{v}_1$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = -2$ è

$$[\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v}_1 = 0 \qquad \to \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'autovettore $\mathbf{v}_2$ relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1+j$ è

$$[\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A}]\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+j & -1 & 1 \\ 0 & 1 & j \\ 2 & j & 1 \end{bmatrix}\mathbf{v}_2 = 0 \qquad \to \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'autovettore $\mathbf{v}_3$ è il complesso coniugato del vettore $\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ e la matrice $\mathbf{T}^{-1}$ sono

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}[\mathbf{v}_2] & \mathrm{Im}[\mathbf{v}_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la trasformazione $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, il sistema viene messo in forma canonica di Jordan:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\overline{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\overline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

L'evoluzione libera è una spirale decrescente

3.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \ker\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio è nullo in quanto il vettore che genera $\mathcal{E}^-$ non è combinazione lineare dei vettori di base del sottospazio $\mathcal{X}^+$, infatti la seguente matrice ha rango pieno

$$\mathrm{rango}\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] = 3 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \{0\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_3 = 0, \qquad \mathcal{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è basata sulla matrice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}\,u(k) \\ y(k) & = & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(k) \end{array} \right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{array} \right.$$

Il sistema dato è composto da una parte raggiungibile e osservabile $\mathcal{S}_1$ di dimensione 2 e da una parte non raggiungibile e non osservabile $\mathcal{S}_4$ di dimensione 1.

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \qquad \mathcal{S}_4 = \{-1,\, 0,\, 0\}$$

Gli autovalori della parte $\mathcal{S}_1$ sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. L'autovalore della parte $\mathcal{S}_4$ è $\lambda = -1$.

3.b) Il problema di calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con l'*evoluzione libera* $y(0) = 1$, $y(1) = -1$, $y(2) = 1$, è un problema di osservabilità. La matrice di osservabilià del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Essendo tale matrice singolare, il sistema non è completamente osservabile per cui il problema proposto può non ammettere nessuna soluzione oppure infinite soluzioni. Una soluzione particolare $\mathbf{x}_0$ si determina risolvendo il seguente sistema lineare

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \mathcal{O}^-\mathbf{x}_0$$

Una soluzione particolare $\mathbf{x}_p$ è:

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La soluzione generale si ottiene sommando $\mathcal{E}^-$:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_p + \mathcal{E}^- = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4) Una descrizione nello spazio degli stati del sistema dinamico dato è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{array} \right.$$

La matrice $\mathbf{F}$ del corrispondente sistema a segnali campionati è:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = e^{-T} \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{G}$ ha invece la forma seguente:

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B}\, d\sigma = \int_0^T e^{-\sigma} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T}(1 + T + \frac{T^2}{2}) \\ 1 - e^{-T}(1 + T) \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}$$

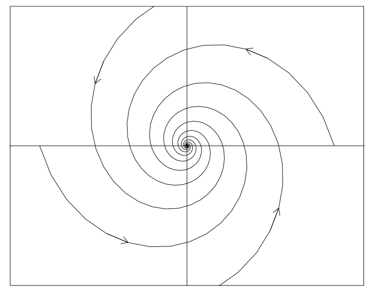
Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1) Dato un sistema lineare, stazionario, discreto, con n autovalori distinti tutti reali negativi, allora:

   ⊗ la matrice di stato del sistema è diagonalizzabile;
   ○ il sistema è stabile;
   ○ il sistema è raggiungibile;
   ○ il sistema è osservabile;

2) Disegnare, in modo qualitativo, l'andamento delle traiettorie nell'intorno dell'origine del seguente sistema dinamico autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$



3) Relativamente ad un sistema lineare continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)$], scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato in catena "aperta"

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\,u(t)$$

4) Scrivere, in funzione delle matrici **A** e **B**, la funzione di transizione dello stato $x(k) = \psi(k, h, x(h), u(\cdot))$ del seguente sistema discreto tempo-invariante $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-h}\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(j)$$

5) Scrivere la struttura di un osservatore di ordine ridotto:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(t) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(t)$$

6) Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{X}_K^+$ i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}, \mathbf{B})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

   ○ $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$
   ○ $\mathcal{X}^+ \neq \mathcal{X}_K^+$
   ○ $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$
   ⊗ nessuna delle precedenti

7) Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile;
○ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è raggiungibile;
○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;

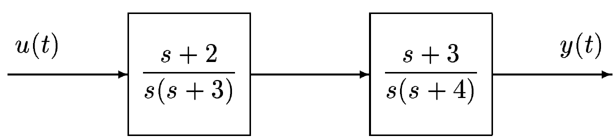
8) Scrivere i polinomi minimi $m(\lambda)$ delle seguenti due matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad m(\lambda) = (\lambda - 1)^3 \qquad\qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad m(\lambda) = (\lambda - 1)$$

9) Indicare quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno dell'origine:

○ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$;
⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
○ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)$;
⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$;

10) Sia dato il seguente sistema lineare continuo:



⊗ Il sistema è completamente controllabile;
○ Il sistema è completamente osservabile;
⊗ Per tale sistema esiste un osservatore asintotico dello stato;

11) Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per garantire che i due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ siano indistinguibili del futuro in k passi:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} = \ker \mathcal{O}^-(k)$$

12) Disegnare lo schema a blocchi di un sistema tempo-continuo caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$