Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 26 Settembre 2001 - Esercizi

1) Dato il seguente sistema non-lineare discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k) - \beta x_1(k)\, x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) \end{cases}$$

1.a) Calcolare, al variare del parametro $\beta > 0$, i punti di equilibrio del sistema.

1.b) Studiarne la stabilità al variare di β utilizzando il metodo della linearizzazione nell'intorno del punto di equilibrio.

2) Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori della parte raggiungibile e della parte osservabile.

2.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che *stabilizzi asintoticamente* il sistema e che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

2.c) Portare il sistema in forma standard di osservabilità. Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di uno stimatore asintotico di "ordine ridotto" che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori.

3) Si consideri il seguente sistema lineare discreto [$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

3.a) Portare il sistema in forma standard di raggiungibilità.

3.b) Dire per quali valori del parametro α il sistema è stabilizzabile.

3.c) Posto $\alpha = 0$, determinare una matrice di retroazione $\mathbf{K}$ che che posizioni in 0 il maggior numero possibile di autovalori.

4) Sia dato il seguente sistema dinamico tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u(t) \\ y &= x_1 + x_2 \end{cases}$$

Scrivere il sistema nella forma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ del corrispondente sistema discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$ che si ottiene mediante campionamento. Si ponga $T = 0.5$.

Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 26 Settembre 2001 - Soluzione degli esercizi

1) I punti di equilibrio del sistema si ottengono imponendo $x_i(k+1) = x_i(k)$:

$$\begin{cases} x_1(k) &= x_1(k) - \beta x_1(k)\, x_2(k) \\ x_2(k) &= x_2(k) \end{cases}$$

I punti di equilibrio soddisfano la relazione:

$$\beta x_1(k)\, x_2(k) = 0,$$

e quindi sono tutti e soli i punti appartenenti agli assi coordinati.

1) La matrice Jacobiana del sistema linearizzato è la seguente:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1-\beta x_2 & -\beta x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applicando il criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che sono *instabili* tutti i punti di equilibrio che soddisfano la relazione

$$|1-\beta x_2| > 1$$

cioè

$$x_2 > \frac{2}{\beta} \qquad \text{e} \qquad x_2 < 0$$

infatti in questo caso almeno uno degli autovalori ha modulo maggiore di 1. Nel caso $|1-\beta x_2| \leq 1$ non si può dire niente perchè uno degli autovalori si trova sul cerchio unitario.

2.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Il sistema non è completamente raggiungibile. La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{E}^- = 0$$

Il sistema è completamente osservabile. Le basi della scomposizione di Kalman sono le seguenti:

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \beta_4 = 0$$

La matrice di trasformazione è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato ha la seguente struttura:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il sistema è in forma standard di raggiungibilità.

2.b) Il polinomio caratteristico della parte non raggiungibile è:

$$s^2 + s + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La parte raggiungibile è asintoticamente stabile per cui esiste una retroazione statica dello stato che stabilizza asintoticamente il sistema. La parte raggiungibile del sistema è caratterizzata alle matrici (vedi punto precedente)

$$\mathbf{A}_{11} = 1, \qquad \mathbf{B}_1 = 1$$

Il guadagno $\tilde{\mathbf{K}} = [k_1]$ che posizione in -1 l'autovalore della parte raggiungibile deve soddisfare la relazione:

$$\mathbf{A}_{11} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{B}_1 = -1 \qquad \rightarrow \qquad 1 + k_1 = -1 \qquad \rightarrow \qquad k_1 = -2$$

Il vettore dei guadagni $\mathbf{K}$ nel sistema di coordinate di partenza è il seguente:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-\alpha-\beta & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

2.c) Il sistema è completamente osservabile per cui l'osservatore asintotico di ordine ridotto esiste. Si opera la seguente trasformazione di coordinate:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{C} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right] u(t) \\ \\ \mathbf{y}(t) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ \\ \mathbf{y}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right.$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano posizionati entrambi in -3

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = l_1$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(s) = s - l_1$$

La soluzione cercata è quindi $(l_2 = 0)$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]\mathbf{y}(t) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(t)$$

e cioè

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = -3\hat{\mathbf{v}}(t) + \begin{bmatrix} 9 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) - 2u(t)$$

3.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{R}^+ = 0$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

Una matrice di trasformazione che porta il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Sia $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$. Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]\mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}} \end{array}\right.$$

L'autovalore della parte non raggiungibile è $\lambda = \alpha$.

3.b) Il sistema è stabilizzabile solo se la parte non raggiungibile è asintoticamente stabile, cioè se

$$|\alpha| < 1$$

3.c) Se si pone $\alpha = 0$, la parte non raggiungibile è stabile, per cui esiste una retroazione dello stato $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array}\right]$ che stabilizza il sistema complessivo e tale da posizionare nell'origine gli autovalori della parte raggiungibile. Per calcolare la matrice $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}$ che, nella forma standard di raggiungibilità, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{b}_1\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(z) = z^2 - 2\,z - 1 \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{b}_1\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}}(z) = \mathbf{p}(z) = z^2$$

La matrice $\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}$ si calcola utilizzando la seguente formula

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} & = & \mathbf{k}_c^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_c^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -2 \end{array}\right]\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}^{-1} \\ & = & \left[\begin{array}{cc} -1 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} -2 & -5 \end{array}\right] \end{array}$$

oppure utilizzando la formula di Ackerman:

$$\tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(\mathbf{A}) = -\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} -2 & -5 \end{array}\right]$$

Il vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ nel sistema di coordinate di partenza è il seguente

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right]\mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -5 & \alpha \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -1 & \alpha & -2 \end{array}\right]$$

dove α è un parametro arbitrario.

4) Il sistema dato può essere riscritto nella seguente forma matriciale:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right]\mathbf{x} \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x} \end{array}\right.$$

Le matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ ed $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema discreto sono

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} e^{-T} & Te^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}, \qquad\qquad \mathbf{H} = \mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right]$$

e

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{-\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} \sigma e^{-\sigma} \\ e^{-\sigma} \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 1-(1+T)e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix}$$

Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 26 Settembre 2001 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1) Sia $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{(n\times n)}$ una matrice con tutti gli autovalori nell'origine:

- $\otimes$ la matrice $\mathbf{A}$ può avere n autovettori reali;
- $\bigcirc$ la matrice $\mathbf{A}$ ha un solo autovettore reale;
- $\otimes$ la matrice $\mathbf{A}$ è identicamente nulla quando il polinomio minimo è $m(\lambda) = \lambda$;
- $\bigcirc$ la matrice $\mathbf{A}$ è identicamente nulla quando il polinomio minimo è $m(\lambda) = \lambda^n$;

2) Scrivere una realizzazione completamente osservabile della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{3s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 3s + 4} \qquad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

3) Enunciare il criterio di instabilità di Lyapunov nel caso di sistemi continui.

Sia $\mathbf{x} = 0$ un punto di equilibrio per $\dot{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Se in un intorno W dell'origine è definita una funzione $V(\mathbf{x}) : W \to R$ continua con derivata continua e nulla nell'origine tale per cui:
1) l'origine è punto di accumulazione per l'insieme dei punti in cui è $V(\mathbf{x}) > 0$;
2) $\dot{V}$ è definita poositiva in W,
allora il punto $\mathbf{x} = 0$ è un punto di equilibrio instabile.

4) In un sistema lineare discreto tempo-invariante, due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$

- $\otimes$ le corrispondenti successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\tau)$ e $\mathbf{y}_2(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;
- $\otimes$ le corrispondenti evoluzioni libere $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$ e $\mathbf{y}_{l,2}(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;
- $\bigcirc$ se i vettori $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$ appartengono al sottospazio $\mathcal{E}^-$;
- $\otimes$ se il vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

5) Scrivere la struttura di un osservatore asintotico di ordine pieno in catena aperta:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

6) Sia $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ un sistema linare tempo variante autonomo.

- $\bigcirc$ L'origine è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A}(t)$ sono a parte reale negativa
- $\otimes$ L'origine è stabile se la matrice di transizione dello stato $\Phi(t, t_0)$ ha norma limitata
- $\otimes$ Se l'origine è asintoticamente stabile allora un qualunque altro movimento del sistema è asintoticamente stabile

7) Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
○ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

8) Sia dato il seguente sistema lineare continuo:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl}\mathbf{x}(k+1) & = & \mathbf{F}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k) & = & \mathbf{H}\mathbf{x}(k)\end{array}\right.$$

Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati.

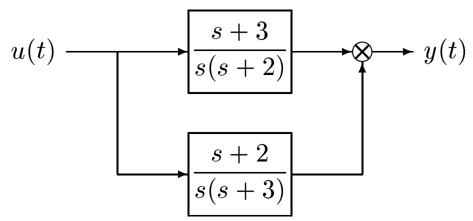
$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

9) Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1,x_2) = (x_1^3 + x_1^4 + x_1^6)(x_1^2 + x_2^2)$:

○ è definita positiva;
○ è semi-definita positiva;
○ è semi-definita negativa;
⊗ non è definita positiva né negativa.

10) Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;
○ Il sistema è completamente raggiungibile;
⊗ Il sistema non è completamente osservabile;
○ Il sistema è completamente osservabile.



11) Scrivere in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$ l'espressione finale della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di una sistema discreto caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [\ \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_3\ ]$$

$$\mathbf{H}(z) == \mathbf{C}_1[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1}\mathbf{B}_1$$

12) Indicare qual è la struttura delle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ di un sistema SISO posto in forma *compagna*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico del sistema: $p(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$.