Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 2 Febbraio 2001 - Esercizi

1) Si consideri il seguente sistema non-lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2^3 \end{cases}$$

1.a) Calcolare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilià utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Studiare la stabilità dei punti di lavoro del sistema utilizzando la seguente funzione candidata di Lyapunov: $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$.

2) Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare gli autovalori del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ del sistema. Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{k}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

2.b) Calcolare gli autovalori del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

3) Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

3.a) Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ in modo che il sistema retroazionato $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$ sia di tipo "dead-beat";

3.b) Calcolare la matrice $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan. Calcolare l'evoluzione libera dell'uscita del sistema a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

3.c) Per il sistema dato si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat di ordine ridotto.

4) Fornire una realizzazione completamente osservabile della seguente matrice di trasferimento:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{2}{s} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{3}{s} & \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

1.a) I punti di equilibrio si determinano imponendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& -x_1^3 + x_2 \\ 0 &=& -x_1^3 - x_2^3 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_2 &=& x_1^3 \\ x_2(1+x_2^2) &=& 0 \end{array}\right.$$

L'unico punto di lavoro ammissibile è l'origine $(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2) = (0,\, 0)$. Lo jacobiano del sistema nell'origine vale

$$J_0 = \left[\begin{array}{cc} -3x_1^2 & +1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{array}\right]_{(x_1,\, x_2)=(0,\, 0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Gli autovalori dello jacobiano J_0 sono nulli $\lambda_{1,2} = 0$, per cui utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov non è possibile concludere niente riguardo la stabilità del punto di equilibrio.

1.b) Per concludere lo studio di stabilità del punto di equilibrio $(0,\ 0)$ si utilizza la funzione data:

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$$

Nell'intorno del punto $(0,\ 0)$, tale funzione è definita positiva. La sua derivata fatta rispetto al tempo vale:

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}(x_1, x_2) &=& \mathrm{grad}V\ \dot{\mathbf{x}} = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 \\ &=& = 4x_1^3(-x_1^3 + x_2) + 4x_2(-x_1^3 - x_2^3) \\ &=& = -4x_1^6 + 4x_1^3x_2 - 4x_2x_1^3 - 4x_2^4 \\ &=& = -4x_1^6 - 4x_2^4 < 0 \end{array}$$

La funzione $\dot{V}$ è definita negativa per cui l'origine è un punto di lavoro asintoticamente stabile.

2.a) La matrice di raggiungibilià del sistema dato è

$$\mathcal{R}^+ = \left[\begin{array}{rrr} 0 & -3 & -9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{span}\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right],\ \left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right] = \mathrm{span}\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right],\ \left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{rr|r} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}^{\text{-}1} = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Posto $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$, il sistema trasformato che si ottiene ha la seguente forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &=& \left[\begin{array}{cc|r} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]u(t) \\ y(t) &=& \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right. \qquad \leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &=& \overline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{b}}u(t) \\ y(t) &=& \overline{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio $\mathcal{X}^+$ sono gli autovalori della sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$, cioè $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$. Dall'analisi della matrice $\mathbf{A}$ è chiaro che l'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile è $\lambda = -1$, quindi un autovalore stabile. È quindi possibile determinare una retroazione dello stato

$\mathbf{k} = [\ k_1 \quad k_2 \quad k_3\ ]$ che stabilizza il sistema complessivo. Il vettore $\overline{\mathbf{k}} = [\ k_1 \quad k_2\ ]$ che posiziona in -2 gli autovalori della parte raggiungibile si calcola el modo seguente:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{\mathbf{A}}_{1,1}+\overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}}(s) &= \det[s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1} - \overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}] = \begin{vmatrix} s-k_1 & -k_2 \\ -3 & s-3 \end{vmatrix} \\
&= (s-3)(s-k_1) - 3k_2 = s^2 - (3+k_1)s + 3k_1 - 3k_2
\end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\overline{\mathbf{A}}_{1,1}+\overline{\mathbf{b}}_1\overline{\mathbf{k}}}(s) = (s+2)^2 = s + 4s + 4$$

occorre utilizzare il vettore

$$\overline{\mathbf{k}} = [\ k_1 \quad k_2\ ] = [\ -7 \quad -\tfrac{25}{3}\ ]$$

Il vettore dei guadagni $\mathbf{k}$ si ottiene applicando la trasformazione inversa

$$\mathbf{k} = [\ \overline{\mathbf{k}} \quad k_3\ ]\,\mathbf{T}^{-1} = [\ -7 \quad -\tfrac{25}{3} \quad k_3\ ] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\ \tfrac{4}{3} + k_3 \quad -7 \quad k_3\ ]$$

2.b) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occore portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è instabile, $\lambda = 3$, per cui non esiste nessun osservatore asintotico dello stato.

3.a) La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è non singolare ($\det\mathcal{R}^+ = -1$) per cui il sistema è completamente raggiungibile e quindi completamente controllabile. Esiste quindi una retroazione statica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z-1 & -1 & 0 \\ 0 & z-1 & -1 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$$

Il polinomio caratteristico desiderato per il sistema retrazionato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{bk}}(z) = z^3$$

La matrice $\mathbf{k}$ si determina utilizzando la seguente espressione $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

cioè

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

da cui si ricava

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Un modo alternativo per calcolare il vettore $\mathbf{k}$ è quello di utilizzare la formula di Ackermann:

$$\mathbf{k} = -\mathbf{q}(\mathcal{R}^+)^{-1} d(\mathbf{A}) = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1} \mathbf{A}^3$$

dove $d(z)$, in questo caso $d(z) = z^3$, è il polinomio caratteristico desiderato. Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.b) Il sistema è già in forma canonica di Jordan per cui la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ coincide con la matrice identità: $\mathbf{T} = \mathbf{I}$. L'evoluzione libera dell'uscita a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 + k + \frac{k(k-1)}{2} \end{aligned}$$

3.c) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è non singolare, il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto. Il primo passo é quello di calcolare una matrice di trasformazione T che porti la matrice $\mathbf{C}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{C} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato $[\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k)]$ è

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

Le matrici $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ vengono partizionate come segue

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad \bar{\mathbf{b}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 \\ 1 & 1 + l_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $A_{11} + LA_{21}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{L}\mathbf{A}_{21}}(z) = (z-1)(z-1-l_2) - l_1 = z^2 - (2+l_2)z + 1 + l_2 - l_1$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathbf{v}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\mathbf{v}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{b}_1 + \mathbf{L}\mathbf{b}_2]u(k)$$

e cioè

$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

4) La matrice di trasferimento assegnata può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{3}{s+1} & \frac{2}{s(s+1)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & s \\ 3s & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+s} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} s \right\} \end{aligned}$$

Una realizzazione completamente osservabile della matrice $\mathbf{G}(s)$ é la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1) Sia data una matrice $\mathbf{A}$ caratterizzata da un solo autovalore con grado di molteplicità n:

   ○ la matrice $\mathbf{A}$ è sempre diagonalizzabile;

   ⊗ può accadere che la matrice $\mathbf{A}$ sia diagonalizzabile;

   ○ il grado del polinomio minimo di $\mathbf{A}$ è pari al numero di miniblocchi nella forma di Jordan;

   ⊗ il grado del polinomio minimo di $\mathbf{A}$ è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan;

2) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \qquad\qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

3) Sia $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ la funzione di transizione dello stato di un sistema dinamico continuo. Completare le seguenti definizioni:

   Uno stato $x(t_1)$ è raggiungibile dallo stato $x(t_0)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\ t_1]$ se ...

   esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.

   Uno stato $x(t_0)$ è controllabile allo stato $x(t_1)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\ t_1]$ se ...

   esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.

4) Sia dato un sistema *lineare, discreto, tempo–invariante* descritto dalle matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Completare la seguente definizione:

   Due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro in k passi *se ...*

   per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$, le successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\cdot)$ e $\mathbf{y}_2(\cdot)$, che corrispondono agli stati iniziali $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$, coincidono nei primi k passi:

$$\mathbf{x}_1(0) \overset{k}{\approx} \mathbf{x}_2(0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{y}_2(\tau), \qquad 0 \le \tau \le k$$

5) Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

6) Sia $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ un sistema non lineare autonomo e sia $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ il corrispondente sistema linearizzato nel punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$. In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che

   ○ se gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono tutti a parte reale negativa o nulla il sistema è stabile in $\mathbf{x} = 0$;

   ⊗ se gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono tutti a parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile in $\mathbf{x} = 0$;

   ○ se la matrice $\mathbf{A}$ ha autovalori immaginari con grado di molteplicità maggiore o uguale a due, allora il sistema è instabile in $\mathbf{x} = 0$;

7) Sia $S' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T},\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{C}\mathbf{T})$ il sistema che si ottiene da $S = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ applicando la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$. La matrice di trasformazione $\tilde{\mathbf{T}}$ che permette di passare dal sistema S_D (duale di S) al sistema S'_D (duale di S') in base alla trasformazione di coordinate $\mathbf{x}_D = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}'_D$ è

○ $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$
○ $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}$
⊗ $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}$
⊗ $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^{-1})^{\mathrm{T}}$

8) Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo (raggiungibile e osservabile) caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, quando si utilizza un periodo di campionamento $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

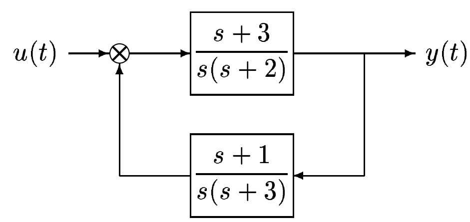
⊗ è un sistema raggiungibile;
○ è un sistema non raggiungibile;
⊗ è un sistema osservabile;
○ è un sistema non osservabile;

9) Nell'intorno del punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_1^3)$:

○ è definita positiva;
⊗ è semi-definita positiva;
○ è semi-definita negativa;
○ non è definita positiva né negativa.

10) Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

○ Il sistema è completamente raggiungibile;
⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;
○ Il sistema è completamente osservabile;
⊗ Il sistema non è completamente osservabile,



11) Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nel caso in cui la parte non raggiungibile e non osservabile sia assente (cioè abbia dimensione nulla):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 & \mathbf{A}_{1,3} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}$$

12) Calcolare una realizzazione completamente raggiungibile della seguente matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s+3)} \\ \dfrac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+6s} \\ \dfrac{s+3}{s(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$