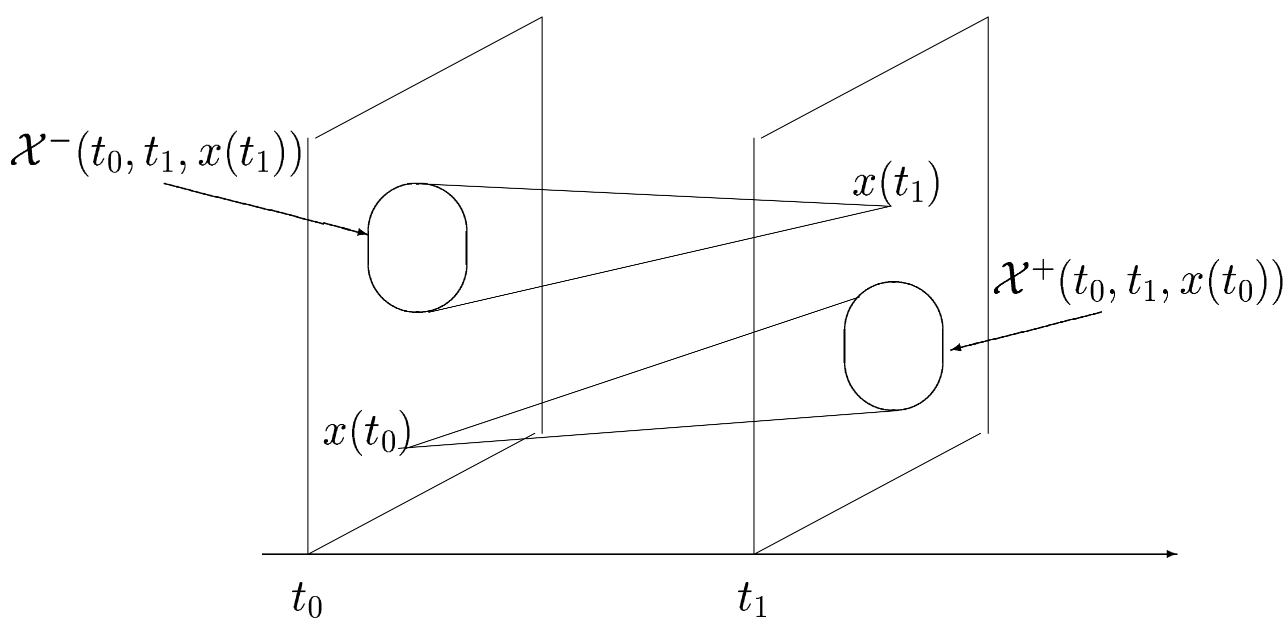
Raggiungibilità e controllabilità

Raggiungibilità e controllabilità

- *Raggiungibilità*.
  Il problema della raggiungibilità consiste nel determinare l'insieme di *stati raggiungibili da un determinato stato iniziale*:
  - Uno stato $x(t_1)$ di un sistema dinamico è raggiungibile dallo stato $x(t_0)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.
  - Indicheremo con $\mathcal{X}^+(t_0, t_1, x(t_0))$ l'*insieme degli stati raggiungibili* dall'evento $\{t_0, x(t_0)\}$ all'istante t_1.
- *Controllabilità*.
  Il problema della controllabilità consiste nel determinare l'insieme di stati controllabili a un determinato *stato finale*:
  - Uno stato $x(t_0)$ di un sistema dinamico è controllabile allo stato $x(t_1)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.
  - Indicheremo con $\mathcal{X}^-(t_0, t_1, x(t_1))$ l'*insieme degli stati controllabili* all'evento $\{t_1, x(t_1)\}$ dall'istante t_0.



Esempio

Consideriamo il sistema a stati finiti descritto dalla tabella:

	stati		
ingressi	x_1	x_2	x_3
u_1	x_1	x_2	x_2
u_2	x_2	x_1	x_3
u_3	x_2	x_2	x_3

Innanzitutto notiamo che il sistema è stazionario, per cui gli insiemi di *raggiungibilità* e *controllabilità* dipendono solo dalla differenza $t = t_1 - t_0$.

$$\mathcal{X}^+(t_0, t_1, x(t_0)) = \mathcal{X}^+(t, x(0)) \qquad \mathcal{X}^-(t_0, t_1, x(t_1)) = \mathcal{X}^-(t, x(t))$$

Gli insiemi degli stati raggiungibili in un passo dagli stati x_1, x_2 e x_3 è, rispettivamente:

$$\mathcal{X}^+(1, x_1) = \{x_1, x_2\}, \quad \mathcal{X}^+(1, x_2) = \{x_1, x_2\}, \quad \mathcal{X}^+(1, x_3) = \{x_2, x_3\}$$

Gli insiemi degli stati controllabili in un passo agli stati x_1, x_2 e x_3 è, rispettivamente:

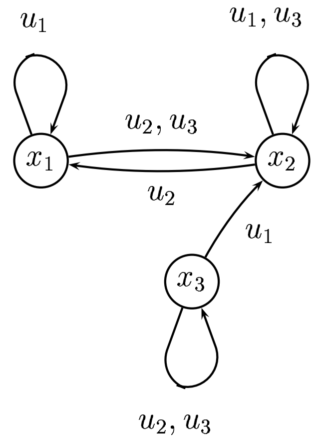
$$\mathcal{X}^-(1, x_1) = \{x_1, x_2\}, \quad \mathcal{X}^-(1, x_2) = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathcal{X}^-(1, x_3) = \{x_3\}$$

Gli stati raggiungibili e controllabili in due passi sono:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{X}^+(2, x_1) = \{x_1,\ x_2\} & \mathcal{X}^-(2, x_1) = \{x_1,\ x_2,\ x_3\} \\
\mathcal{X}^+(2, x_2) = \{x_1,\ x_2\} & \mathcal{X}^-(2, x_2) = \{x_1,\ x_2,\ x_3\} \\
\mathcal{X}^+(2, x_3) = \{x_1,\ x_2,\ x_3\} & \mathcal{X}^-(2, x_3) = \{x_3\}
\end{array}$$

La ricerca degli insiemi controllabili e degli insiemi raggiungibili in un sistema a stati finiti può essere fatta ricorrendo alla *matrice di connessione del grafo*:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



La dimensione della matrice $\mathbf{C}$ è pari al numero di vertici del grafo. L'elemento $c_{i,j}$ della matrice è uguale a 1 se nel grafo è presente almeno un ramo orientato che parte dal nodo x_i e arriva al nodo x_j, ed è uguale a zero nel caso contrario.

La riga i-esima della matrice $\mathbf{C}$ rappresenta l'insieme $\mathcal{X}^+(1, x_i)$ degli stati raggiungibili in un passo a partire dallo stato x_i. La colonna j-esima della matrice $\mathbf{C}$ rappresenta l'insieme $\mathcal{X}^-(1, x_j)$ degli stati controllabili in un passo allo stato x_j.

Se si calcola la matrice $\mathbf{C}^2$ utilizzando le operazioni di addizione e moltiplicazione dell'algebra booleana

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

si ottiene

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le righe e le colonne della matrice $\mathbf{C}^2$ rappresentano gli insiemi degli stati, rispettivamente, raggiungibili e controllabili in due passi.

Raggiungibilità dei sistemi lineari invarianti discreti.

Consideriamo il sistema lineare discreto descritto dalla equazione di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

Consideriamo d'ora in poi $\mathbf{x}(0) = 0$.

Lo stato al *k*-esimo passo è dato dalla relazione

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) = [\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

Al variare degli ingressi $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ si ottiene *l'insieme degli stati raggiungibili* in k passi: $\mathcal{X}^+(k, \mathbf{x}(0))$.

$$\mathcal{X}^+(k) = \mathrm{Im}[\mathcal{R}^+(k)]$$

dove si è posto:

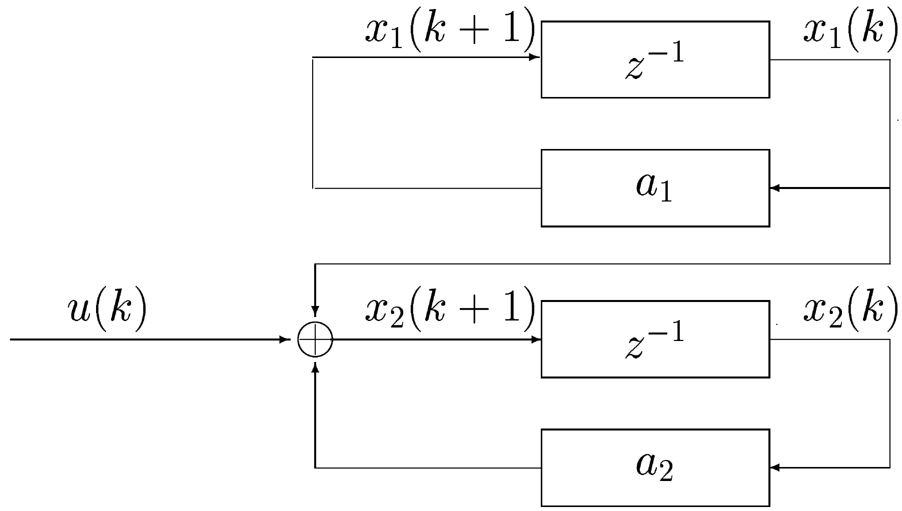
$$\mathcal{R}^+(k) \stackrel{\triangle}{=} [\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$$

Quindi l'insieme degli stati raggiungibili ha la struttura di uno spazio vettoriale.

Nota. Uno stato $\mathbf{x}$ è *raggiungibile in k passi*, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^+(k)$, se può essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathcal{R}^+(k)$

Esempio

Consideriamo il sistema discreto rappresentato dal seguente schema:



Le equazioni di aggiornamento dello stato sono:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{(*)}} u(k)$$

si ha perciò:

$$\mathcal{X}^+(k) = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{k-1} \end{bmatrix} = \mathrm{span}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato è giustificabile intuitivamente, osservando dallo schema che, se lo stato iniziale è nullo, allora la componente di stato x_1 rimarrà nulla, in quanto l'ingresso non può agire in alcun modo su x_1.

(*)

Se fosse $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ si avrebbe $\mathcal{X}^+(2) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^2$

Sottospazio raggiungibile.

- I sottospazi di $\mathbf{X}$ raggiungibili in $1, 2, \ldots, k$ passi soddisfano la catena di inclusioni:

$$\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}^+(k) \subseteq \ldots$$

che per il teorema di Cayley-Hamilton, è stazionaria per $k \geq n$ passi, dove n è la dimensione dello spazio degli stati $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}^+(n) = \mathcal{X}^+(n+1) \ldots$$

Quindi ogni stato, se è raggiungibile, lo è al più in n passi.

———————

- Dalla precedente considerazione definiamo la *matrice di raggiungibilità* del sistema:

$$\mathcal{R}^+ \triangleq [\mathbf{B} \; \mathbf{AB} \; \ldots \; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

- Il *sottospazio raggiungibile* è dato da:

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}[\mathbf{B} \; \mathbf{AB} \; \ldots \; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$$

Sistema completamente raggiungibile

- Un sistema si dice *completamente raggiungibile* o in breve *raggiungibile*, se:

$$\mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$$

- Condizione *necessaria e sufficiente* affinchè il sistema sia raggiungibile è che:

$$\boxed{rango(\mathcal{R}^+) = n}$$

- La catena di inclusioni degli sottospazi raggiungibili in $1, 2, \ldots$ passi, può diventare stazionaria per $r < n$.

  Definiamo *indice di raggiungibilità* il più piccolo intero r per cui:

$$rango[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}] = n$$

———————

Nota. Perchè l'indice di raggiugibilità sia minore di n occorre e basta che il sistema abbia più ingressi e che almeno due agiscano in modo indipendente, cioè che vi siano almeno due colonne di $\mathbf{B}$ linearmente indipendenti, in altre parole se $rango(\mathbf{B}) = m$ allora $r \leq n - m + 1$.

- $\mathcal{X}^+$ è il più piccolo sottospazio $\mathbf{A}$-invariante contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$.

- Il sottospazio $\mathcal{X}^+$ è invariante rispetto a cambiamenti di base nello spazio degli stati:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ = \mathbf{T}\bar{\mathcal{X}}^+$$

Esempio. Per i sistemi diagonalizzabili con un solo ingresso, la condizione di raggiungibilità può essere espressa in modo molto semplice.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(k)$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \lambda_n^2 b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

che può essere riscritta

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Quindi, il sistema risulta essere completamente raggiungibile se e solo se:

1) Tutti gli elementi b_i $(i = 1, \dots, n)$ sono non nulli;

2) Tutti gli autovalori sono distinti

Controllabilità dei sistemi lineari invarianti discreti

Consideriamo il sistema lineare discreto descritto dalla equazione di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

Uno stato $\mathbf{x}(0)$ è <u>*controllabile allo stato zero in k passi*</u> se esiste una successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ che porta il sistema dallo stato $\mathbf{x}(0)$ allo stato $\mathbf{x}(k) = 0$, nell'intervallo $[0, k]$, ovvero:

$$\mathbf{x}(k) = 0 = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

Quindi:

$$-\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

- Quindi un sistema è <u>*completamente controllabile in k passi*</u> se lo stato $-\mathbf{A}^k \mathbf{x}$ è raggiungibile in k passi dallo stato zero:

  $$\mathbf{A}^k \mathbf{x} \in \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

  o, equivalentemente:

  $$\boxed{\mathrm{Im}(\mathbf{A}^k) \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)}$$

- Sottospazio controllabile in k passi:

  $$\mathcal{X}^-(k) = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{A}^k \mathbf{x} \in \mathcal{X}^+(k)\}$$

Consideriamo il sistema lineare discreto descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

Proprietà.
Il sistema considerato è controllabile, cioè $\mathcal{X}^- = \mathbf{X}$, *se e solo se* è controllabile in n passi:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^n \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(n) = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$$

- Infatti se il sistema è controllabile in n passi, allora è controllabile per definizione.
- Viceversa se il sistema è controllabile in $k \leq n$ passi, allora esso è anche controllabile in n passi in quanto è sempre possibile scegliere come ingresso quello che porta lo stato a zero in k passi e poi scegliendo $\mathbf{u}(k) = 0$, $\mathbf{u}(k+1) = 0$, $\ldots$, $\mathbf{u}(n-1) = 0$ si mantiene lo stato a zero:
- Se $k > n$

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^n = \mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

- Per i sistemi discreti le proprietà di raggiungibilità e controllabilità **non** sono equivalenti:

  - La raggiungibilità implica la controllabilità.

    $$\text{raggiungibilità} \implies \text{controllabilità}$$

    Infatti l'ipotesi di raggiungibilità corrisponde a scrivere:

    $$\mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(n) = \mathbf{X}$$

    dalla quale segue che:

    $$\mathrm{Im}\mathbf{A}^n \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$$

  - In generale la controllabilità non implica la raggiungibilità:

    $$\text{controllabilità} \not\Longrightarrow \text{raggiungibilità}$$

    Infatti supponiamo che il sistema abbia $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ matrice nulla, e che $rango(\mathbf{B})$ sia minore di n, allora:

    $$rango([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = rango([\mathbf{B}\ 0\ \ldots\ 0] < n$$

    e quindi il sistema non è raggiungibile.

- Se $rango\mathbf{A} = n$ la raggiungibilità e la controllabilità si implicano a vicenda.

Nota. La differenza sostanziale tra la raggiungibilità e la controllabilità consiste nel fatto che *uno stato* $\mathbf{x}$ *puó essere controllato a zero anche senza applicare ingressi*: questo può accadere grazie al fatto che la matrice $\mathbf{A}$, se non è a rango pieno, è caratterizzata da un autovalore nullo, e quindi il corrispondente "autospazio" tende a zero, in modo naturale, in un numero finito di passi.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Esempio:

Consideriamo il sistema discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Verifichiamo la raggiungibilità del sistema:

$$\mathcal{X}^+(1) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{X}^+(2) = \mathcal{X}^+(3) = \ldots = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Il sistema è controllabile in due passi essendo:

$$\operatorname{Im}\mathbf{A}^2 = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \subseteq \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema, tuttavia, non è controllabile in un passo essendo:

$$\operatorname{Im}\mathbf{A} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not\subset \operatorname{span}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathcal{X}^+(1)$$

I sottospazi $\mathcal{X}^-(1)$ e $\mathcal{X}^-(2)$ sono i seguenti:

$$\mathcal{X}^-(1) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathcal{X}^-(2) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Nota: i due sottospazi $\mathcal{X}^+(1)$ e $\mathcal{X}^-(1)$ non coincidono.

Controllo di sistemi discreti – I

- *Problema* : Determinare la successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$, che consenta di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$.

Affinchè il problema abbia soluzione è necessario e sufficiente che:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \in \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

ovvero che $\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$ sia raggiungibile dallo stato zero in k passi.

Supposto che ciò sia verificato, la soluzione dell'equazione matriciale:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

nel vettore incognito:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ \vdots \\ u_m(k-1) \\ \vdots \\ u_1(0) \\ \vdots \\ u_m(0) \end{bmatrix}$$

fornisce la soluzione desiderata.

La soluzione, in generale, <u>non è unica</u>:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}, \qquad \bar{\mathbf{v}} : \quad \mathcal{R}_k^+ \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Controllo di sistemi discreti – II

- *Nota*.
  La soluzione del problema del controllo è quindi un sistema lineare non omogeneo di n equazioni in $k \times m$ incognite.

- *Nota*.
  Nel caso in cui il sistema abbia più soluzioni, è possibile determinare la soluzione che abbia la norma minore (e quindi una *energia di controllo* inferiore) tra tutte quelle considerate.

- Sostituendo il seguente ingresso $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T \eta$$

nell'equazione

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = \mathcal{R}_k^+ \mathbf{u}$$

si ottiene

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = \mathcal{R}_k^+ (\mathcal{R}_k^+)^T \eta$$

da cui, se $rango(\mathcal{R}_k^+) = n$, si ricava

$$\eta = [\mathcal{R}_k^+ (\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)]$$

Si dimostra che la soluzione $\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T \eta$

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T [\mathcal{R}_k^+ (\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)]$$

è quella che minimizza la norma dell'ingresso:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{u}^T(i)\, \mathbf{u}(i)}$$

- *Nota*.
  Nella pratica questa soluzione non è molto usata in quanto *richiede una conoscenza perfetta del sistema da controllare* (matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$) e una assenza completa di disturbi.

Esempio. Si consideri il problema di riscaldare delle barrette di acciaio che passano attraverso un forno segmentato in 5 zone. Si supponga che il costo del riscaldamento in ciascuna zona sia proporzionale al quadrato della temperatura della zona stessa.

Si consideri la zona i-esima del forno, $i = 0, 1, \ldots, 4$, e sia:

θ_i	la temperatura della barra all'ingresso
θ_{i+1}	la temperatura della barra all'uscita
u_i	la temperatura del forno nella zona i-esima

Si assuma come modello del sistema l'equazione (per $i = 0, 1, \ldots, 4$):

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{u_i - \theta_i}{2} \qquad \leftrightarrow \qquad \theta_{i+1} = \frac{1}{2}\theta_i + \frac{1}{2}u_i$$

Sia $\mathcal{R}_5$ la matrice di raggiungibilità del sistema in 5 passi ($\mathbf{A} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{B} = \frac{1}{2}$):

$$\mathcal{R}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

La successione u_0, u_1, ..., u_4 di temperature del forno che consente di riscaldare le barrette dalla temperatura ambiente $\theta_0 = 0 \;\; C^o$ alla temperatura $\theta_5 = 1000 \; C^o$ minimizzando il costo del riscaldamento $\sum_i u_i^2$ è la seguente

$$\bar{u} = \mathcal{R}_5^T(\mathcal{R}_5\mathcal{R}_5^T)^{-1}1000 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} \left(\frac{1-(1/32)^2}{3}\right)^{-1} 1000 = \begin{bmatrix} 1502 \\ 751 \\ 375 \\ 188 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Raggiungibilità nei sistemi lineari invarianti continui.

Consideriamo il sistema lineare continuo descritto dalla equazione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = 0$$

Uno stato $\mathbf{x}(t)$ è *raggiungibile* al tempo t se esiste un ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ tale che il *movimento forzato* del sistema valga:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Consideriamo l'operatore lineare $R_t : \mathcal{U} \to X$, così definito:

$$R_t : \mathbf{u}(\cdot) \to \mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Nota: l'insieme $\mathcal{U}$ è infinito dimensionale.

Allora $\mathbf{x}(t)$ è raggiungibile al tempo t se e solo se $\mathbf{x}(t)$ appartiene all'*immagine* di R_t, che rappresenta il *sottospazio raggiungibile* $\mathcal{X}^+(t)$ all'istante t.

———————

Operatore aggiunto $R_t^* : X \to \mathcal{U}$:

$$R_t^* : \mathbf{x}(t) \to \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}\mathbf{x}(t) \qquad\qquad 0 \le \tau \le t$$

Proprietà dell'operatore aggiunto:

$$\mathrm{Im}R_t = (ker R_t^*)^\perp = \mathrm{Im}R_t R_t^* = \mathrm{Im}W_t$$

dove W_t è il *gramiano di raggiungibilità*:

$$W_t = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}d\tau$$

Matrice di raggiungibilità

Definiamo la matrice di raggiungibilità:

$$\mathcal{R}^+ \triangleq [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \dots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

dove n è l'ordine della matrice $\mathbf{A}$ (ordine del sistema dinamico).

- *Proprietà*. Il sottospazio raggiungibile al tempo $t > 0$, $\mathcal{X}^+(t)$, è l'immagine della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$.

Prova. In base alle proprietà dell'*operatore aggiunto* e delle matrici:

$$a) \quad \mathcal{X}^+(t) = \mathrm{Im} R_t = (ker R_t^*)^\perp \qquad b) \ \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = (ker\mathcal{R}^{+^T})^\perp$$

è sufficiente mostrare che:

$$(ker R_t^*)^\perp = (ker\mathcal{R}^{+^T})^\perp \quad \Rightarrow \quad ker R_t^* = ker\mathcal{R}^{+^T}$$

Infatti:

$$\mathbf{x}(t) \in ker R_t^* \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}\mathbf{x}(t), \quad 0 \le \tau \le t \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^i \mathbf{x}(t) \frac{(t-\tau)^i}{i!}, \quad 0 \le \tau \le t \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^i \mathbf{x}(t), \quad i = 0, 1, \dots \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^i \mathbf{x}(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}(t) \in ker \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} = ker\mathcal{R}^{+^T}$$

(1) - Per la definizione della matrice esponenziale,

(2) - per il principio di identità delle serie di potenze,

(3) - per il teorema di Cayley-Hamilton

- *Nota*.
  A differenza di quanto accade per i sistemi discreti, il sottospazio raggiungibile *non dipende dalla lunghezza dell'intervallo* $[0, t)$ in cui agisce la funzione di ingresso.

- *Nota*.
  Condizione necessaria affinchè il sottospazio raggiungibile non dipenda dalla lunghezza dell'intervallo di applicazione dell'ingresso è *che l'ingresso possa assumere valori arbitrariamente grandi*.

  Ovviamente nella pratica ciò non è possibile, quindi, in realtà l'insieme degli stati raggiungibili dipende dal tempo di applicazione e dalla entità dell'ingresso.

  Questo non contraddice la teoria, in quanto nella realtà lo spazio degli ingressi ammissibili cessa di essere uno spazio vettoriale, in quanto tali elementi hanno valore finito, e quindi cessa di essere valida una ipotesi fondamentale del teorema precedente.

- *Nota*.
  La condizione di raggiungibilità del sistema è data da

  $$\mathrm{Im}\mathcal{R}^{+} = X$$

  che corrisponde ad affermare che:

  $$ker\mathcal{R}^{+^T} = \{\emptyset\}$$

  ma dalla prova del teorema ciò equivale ad affermare che:

  $$0 = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}(t) = 0$$

  cioè che *le righe della matrice* $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ *sono linearmente indipendenti*:

  $$\mathbf{x}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = 0$$

Controllabilità nei sistemi lineari invarianti continui.

Consideriamo il sistema lineare continuo descritto dalla equazione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

- *Proprietà*. In un sistema continuo il sottospazio controllabile $\mathcal{X}^-$ non dipende dall'intervallo in cui agisce il controllo e coincide con il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$.

Prova. Uno stato $\mathbf{x}(0)$ è controllabile a $\mathbf{x}(t) = 0$ se esiste un ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ tale che:

$$0 = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

L'insieme di tutti gli $\mathbf{x}(0)$ che soddisfano la precedente relazione, al variare della funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$, costituiscono il *sottospazio di controllabilità* $\mathcal{X}^-(t)$.

La relazione tra lo spazio di controllabilità e quello di raggiungibilità si ottiene considerando che, per una opportuna scelta della funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ogni elemento di $\mathcal{X}^+$ può essere espresso come:

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

cioè come immagine secondo $e^{\mathbf{A}t}$ di uno stato controllabile, per cui:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathcal{X}^-(t) = \mathcal{X}^+$$

per l'*invertibilità* di $e^{-\mathbf{A}t}$ si ha:

$$\mathcal{X}^-(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathcal{X}^+$$

ricordando che $\mathcal{X}^+$ è $\mathbf{A}$-invariante e quindi $e^{-\mathbf{A}t}$-invariante:

$$\mathcal{X}^-(t) = \mathcal{X}^- = \mathcal{X}^+$$

Controllo di sistemi continui

- *Problema*. Determinare la funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$, che consenta di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t)$.

Affinchè il problema abbia soluzione è necessario e sufficiente che:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+.$$

Quindi gli stati che possono essere raggiunti all'istante t a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$, sono quelli appartenenti all'insieme:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathcal{X}^+.$$

Per la determinazione esplicita dell'ingresso si deve risolvere in $\mathbf{u}(\cdot)$ l'equazione vettoriale:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = R_t; \mathbf{u}(\cdot)$$

———————

- *Nota*. La soluzione del problema del controllo è quindi un sistema di equazioni lineari non omogenee di n equazioni nell'incognita $\mathbf{u}(\cdot)$.
- *Nota*. Nel caso in cui il sistema abbia più soluzioni, è possibile determinare la soluzione che abbia la norma

$$\| \mathbf{u}(\cdot) \| = \sqrt{\int_0^t \mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau}$$

minore (e quindi una energia di controllo inferiore) tra tutte quelle considerate.

Si consideri il problema di determinare la funzione di ingresso $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [0,\, t]$ che nell'intervallo di tempo $[0,\, t]$ faccia passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t)$. Tale problema ha soluzione se:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathcal{X}^+$$

Tutte le soluzioni $\mathbf{u}(\tau)$ del problema risolvono il seguente sistema lineare

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = R_t\mathbf{u}(\tau)$$

La soluzione generale è la seguente

$$\mathbf{u}(\tau) = \bar{\mathbf{u}}(\tau) + \bar{\mathbf{v}}(\tau)$$

dove $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ è una soluzione particolare del problema e $\bar{\mathbf{v}}(\tau)$ è la soluzione generale del problema omogeneo associato:

$$0 = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\bar{\mathbf{v}}(\tau)d\tau \qquad \leftrightarrow \qquad 0 = R_t\bar{\mathbf{v}}(\tau)$$

La soluzione particolare $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ che minimizza la norma quadratica

$$||\mathbf{u}(\tau)|| = \sqrt{\int_0^t \mathbf{u}(\tau)^T\mathbf{u}(\tau)\,d\tau}$$

si trova nello spazio immagine dell'operatore aggiunto R_t^*:

$$\bar{\mathbf{u}}(\tau) = R_t^*\eta$$

Il sistema da risolvere nell'incognita η è il seguente:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \underbrace{R_tR_t^*}_{W_t}\eta = W_t\eta$$

Se il sistema è raggiungibile, la matrice W_t è a rango pieno per cui

$$\eta = (W_t)^{-1}[\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)]$$

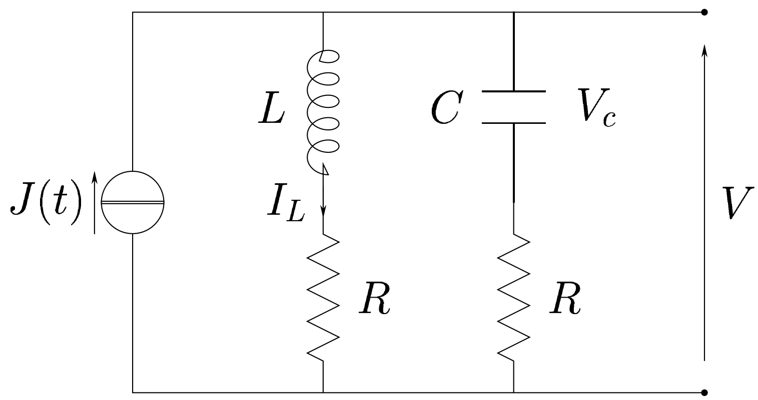
e quindi la soluzione a norma minima è la seguente:

$$\bar{\mathbf{u}}(\tau) = R_t^*(W_t)^{-1}[\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)]$$

La soluzione $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ è quella a norma minima in quanto essa è perpendicolare alla soluzione $\bar{\mathbf{v}}$ del sistema omogeneo. Infatti $\bar{\mathbf{v}} \in \ker R_t$, $\bar{\mathbf{u}}(\tau) \in \mathrm{Im}R_t^*$ e questi due sottospazi sono ortogonali fra di loro:

$$\ker R_t = (\mathrm{Im}R_t^*)^\perp$$

Esempio. Si consideri la seguente rete elettrica:



Le equazioni dinamiche del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} L\dfrac{d\,I_L}{dt} &= V_C + R(J - I_L) - R\,I_L \\ C\dfrac{d\,V_C}{dt} &= J - I_L \\ \quad V &= V_C + R(J - I_L) \end{cases}$$

dove I_L è la corrente che scorre nell'induttanza, V_C la tensione ai capi del condensatore, J la corrente in ingresso e V la tensione di uscita.

In forma matriciale, la dinamica del sistema è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} J \\ V &= \begin{bmatrix} -R & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + [\, R \,] J \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

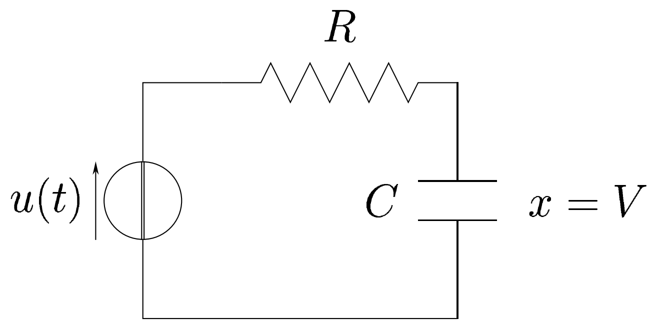
$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{LC} - \frac{2R^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{R}^+ = \frac{1}{LC}\left[\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}\right]$$

Il sistema è raggiungibile solo se $\mathcal{R}^+$ ha rango pieno. Il sistema non è completamente raggiungibile se

$$R^2 = \frac{L}{C} \qquad \leftrightarrow \qquad R\,C = \frac{L}{R}$$

cioè se la costante di tempo dell'induttanza è uguale a quella della capacità, cioè quando i due autovalori del sistema coincidono: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Esempio. Si consideri il seguente circuito elettrico:



Si calcoli la funzione di ingresso $u(\tau)$ di norma minima che porti la tensione V del condensatore dal valore nullo al valore 6 V nell'intervallo di tempo $[0,\, 1]$.

L'equazione dinamica del sistema è:

$$C\frac{dV}{dt} = \frac{u - V}{R}$$

Posto $x = V$, $C = 1$ F ed $R = 1\,\Omega$, l'equazione diventa:

$$\dot{x} = -x + u$$

Essendo $\mathbf{A} = -1$, $\mathbf{B} = 1$ e $t = 1$, il gramiano di raggiungibilità è

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^1 e^{-(1-\tau)} e^{-(1-\tau)} d\tau = \int_0^1 e^{-2(1-\tau)} d\tau \\ &= \left[\frac{e^{-2(1-\tau)}}{2}\right]_0^1 = \frac{1-e^2}{2} \end{aligned}$$

La funzione di ingresso $u(\tau)$ a norma minima è quindi la seguente:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(1-\tau)} (W_1)^{-1}[x(1) - e^{\mathbf{A}} x(0)] \\ &= e^{-(1-\tau)} \frac{2}{1-e^2} 6 = \frac{12\, e^{\tau}}{e - e^{-1}} \end{aligned}$$

Sistemi equivalenti

Proprietà. Sistemi (discreti o continui) *algebricamente equivalenti* hanno le stesse proprietà di raggiungibilità.

Sia $\mathbf{T}$ la matrice di trasformazione (non–singolare) che rende algebricamente equivalenti i due sistemi lineari invarianti $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ ed $\bar{\mathcal{S}} = (\overline{\mathbf{A}},\ \overline{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{C}},\ \overline{\mathbf{D}})$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, & \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, & \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{cases}$$

- I sottospazi raggiungibili in k passi dei due sistemi $\mathcal{S}$ ed $\bar{\mathcal{S}}$ sono legati tra loro dalla seguente relazione:

$$\overline{\mathcal{X}}^+(k) = \mathrm{Im}[\overline{\mathbf{B}} \ldots \overline{\mathbf{A}}^{k-1}\overline{\mathbf{B}}] = \mathrm{Im}(\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]) = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{X}^+(k)$$

- Siano $\mathcal{R}^+$ e $\overline{\mathcal{R}}^+$ le *matrici di raggiungibilità* dei due sistemi. Per $k = n$ vale la relazione:

$$\overline{\mathcal{R}}^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}^+$$

Nota. Nel caso di sistemi raggiungibili tale relazione consente di calcolare la matrice di trasformazione di base $\mathbf{T}$:

$$\overline{\mathcal{R}}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T} = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{T} = \mathcal{R}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T}(\overline{\mathcal{R}}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T})^{-1}$$

Se i sistemi hanno un solo ingresso, $\mathcal{R}^+$ e $\overline{\mathcal{R}}^+$ sono quadrate e non singolari, per cui vale la semplice relazione:

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\overline{\mathcal{R}}^+)^{-1}}$$

Forma standard di raggiungibilità

- Consideriamo il sistema lineare discreto (continuo):

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) & = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

di dimensione n e non (completamente) raggiungibile:

$$dim \mathcal{X}^+ = \rho < n$$

- Consideriamo la seguente matrice di trasformazione:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1,\ \mathbf{T}_2], \qquad\qquad \mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}(k)$$

dove $\mathbf{T}_1$, di dimensione $n \times \rho$, è una matrice di base del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$, e dove $\mathbf{T}_2$, di dimensione $\mathbf{n} \times n - \rho$, è una matrice che rende non singolare la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$.

- Siccome $\mathcal{X}^+$ è $\mathbf{A}$-invariante e $\mathrm{Im}\mathbf{B} \subseteq \mathcal{X}^+$, il sistema equivalente che si ottiene utilizzando la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$:

$$(2) \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{x}}(k+1) & = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}(k) + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(k) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

ha una struttura semplificata, cioè le matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{C}}$ e $\overline{\mathbf{D}}$ hanno la seguente struttura:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \overline{\mathbf{A}}_{1,2} \\ 0 & \overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix}, \qquad\qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

dove $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$ ha dimensione $\rho \times \rho$ e $\overline{\mathbf{B}}_1$ ha dimensione $\rho \times m$.

Il sistema (2) viene detto *forma standard di raggiungibilità* del sistema (1), in quanto viene messa in evidenza la parte raggiungibile del sistema originario.

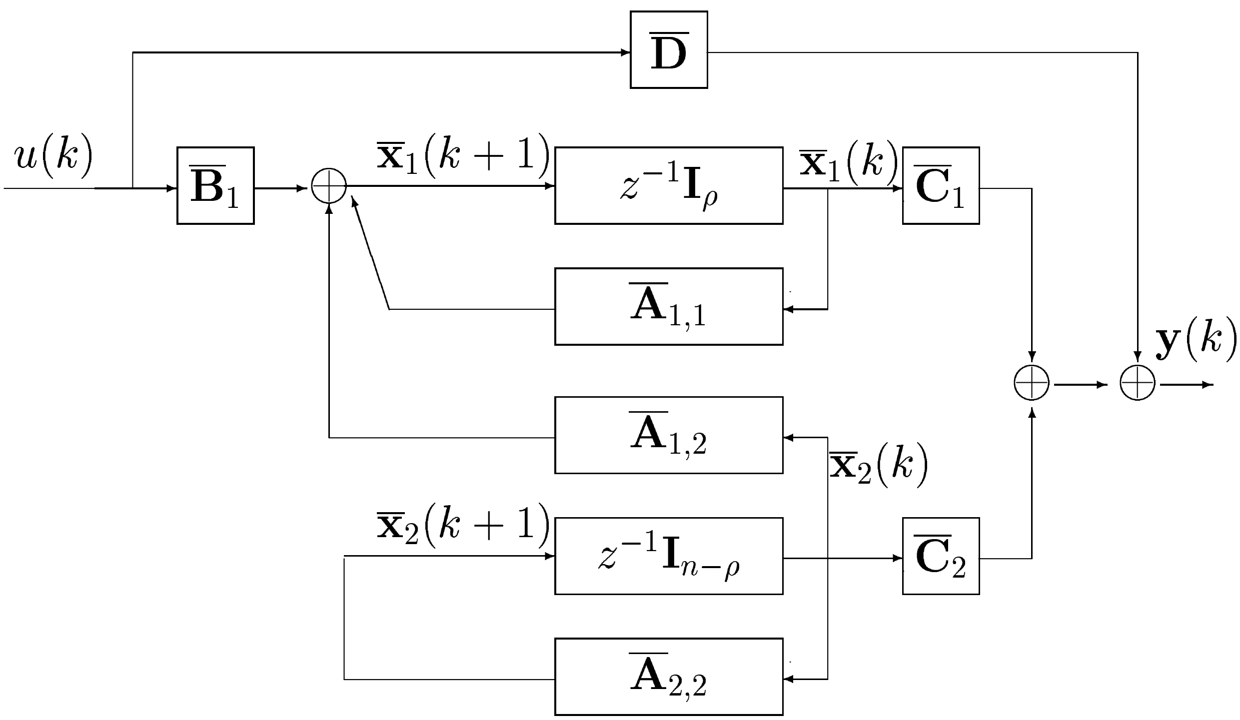
Forma standard - schema a blocchi

Consideriamo il vettore di stato $\overline{\mathbf{x}}(k)$ partizionato in due parti: la componente *raggiungibile* $\overline{\mathbf{x}}_1$ e quella *non raggiungibile* $\overline{\mathbf{x}}_2$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_1 \\ \overline{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}$$

dove $dim\, \mathbf{x}_1 = \rho$. Le equazioni di (2) diventano:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}_1(k+1) = & \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\overline{\mathbf{x}}_1(k)+ & \overline{\mathbf{A}}_{1,2}\overline{\mathbf{x}}_2(k)+ & \overline{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(k) \\ \overline{\mathbf{x}}_2(k+1) = & & \overline{\mathbf{A}}_{2,2}\overline{\mathbf{x}}_2(k) & \\ \mathbf{y}(k) = & \overline{\mathbf{C}}_1\overline{\mathbf{x}}_1(k)+ & \overline{\mathbf{C}}_2\overline{\mathbf{x}}_2(k)+ & \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



<ins>*Nota*</ins>. Le medesime osservazioni e la medesima scomposizione standard vale anche nel caso dei sistemi a tempo continuo.

Forma standard di raggiungibilità

- Il sottosistema (2.1) di dimensione ρ caratterizzato dalle matrici $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$, $\overline{\mathbf{B}}_1$, è completamente raggiungibile:

$$\rho = rango\mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}^+ = rango\overline{\mathcal{R}^+} = rango \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 & \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\overline{\mathbf{B}}_1 & \dots & \overline{\mathbf{A}}_{1,1}^{n-1}\overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \rho &= rango \left[\overline{\mathbf{B}}_1 \;\; \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\overline{\mathbf{B}}_1 \;\; \dots \;\; \overline{\mathbf{A}}_{1,1}^{n-1}\overline{\mathbf{B}}_1 \right] \\ &= rango \left[\overline{\mathbf{B}}_1 \;\; \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\overline{\mathbf{B}}_1 \;\; \dots \;\; \overline{\mathbf{A}}_{1,1}^{\rho-1}\overline{\mathbf{B}}_1 \right] = rango\overline{\mathcal{R}^+}_1 \end{aligned}$$

dove $\overline{\mathcal{R}^+}_1$ è la matrice di raggiungibilità del sottosistema (2.1).

- Il sottosistema (2.1), detto *sottosistema raggiungibile*, rappresenta integralmente la dinamica del sistema originario (1) quando lo stato iniziale appartiene al sottospazio raggiungibile:

$$\text{se} \quad \mathbf{x}_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

- Il sottosistema (2), caratterizzato dalle matrici $\overline{\mathbf{A}}_{2,2}$, $\overline{\mathbf{B}}_2 = 0$, e $\overline{\mathbf{C}}_2$, detto *sottosistema non raggiungibile*, ha una dinamica che dipende solo dallo stato iniziale $\overline{\mathbf{x}}_2(0)$ e non è influenzato dall'ingresso.

Matrice di trasferimento.

- La matrice di trasferimento di un sistema dinamico, coincide con la matrice di trasferimento della sua parte *raggiungibile*.

Infatti sia dato il sistema nella forma standard di raggiungibilità:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}$$

La matrice di trasferimento vale:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - \mathbf{A}_{1,1} & -\mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & zI - \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - \mathbf{A}_{1,1})^{-1} & ** ** \\ 0 & (zI - \mathbf{A}_{2,2})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{C}_1 (zI - \mathbf{A}_{1,1})^{-1} \mathbf{B}_1
\end{aligned}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema discreto:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} u(k) \\ y(k) & = & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \end{array}\right.$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R}^+ = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \end{array}\right] \qquad \mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente raggiungibile per cui è possibile operare una trasformazione nello spazio degli stati che porta il sistema in forma standard di raggiungibilità.

Utilizzando la seguente matrice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$$

il sistema trasformato assume la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{array}\right.$$

Gli zeri indicati in grassetto sono quelli strutturali della forma standard di raggiungibilità.

La parte non raggiungibile è caratterizzata da un autovalore nullo, per cui è stabile.

La matrice di trasferimento $\mathbf{M}(z)$ del sistema complessivo coincide con quella della sola parte raggiungibile:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\
&= \mathbf{C}_1(z\mathbf{I}-\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{B}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & z^{-2} \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (z-1)^{-1} & z^{-1} & (z^{-1}+z^{-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{z+1}{z^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ulteriori criteri di raggiungibilità

Oltre alla relazione $\text{rango}\mathcal{R}^+ = n$, esistono altri criteri di raggiungibilità.

<u>Proprietà</u>. *(PBH test) Il sistema* $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ *è raggiungibile se e solo se la matrice*

$$\left[\ s\mathbf{I} - \mathbf{A}\,\middle|\,\mathbf{B}\ \right]$$

ha rango pieno per ogni $s \in \mathcal{C}$*.*

<u>Proprietà</u>. *(Struttura di Jordan dei sistemi raggiungibili) Sia dato il sistema* $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ *con* $\mathbf{A}$ *in forma canonica di Jordan e* $\mathbf{B}$ *partizionata in modo conforme ai miniblocchi di Jordan. Il sistema è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore* λ_i *di* $\mathbf{A}$ *le ultime righe dei blocchi* $\mathbf{B}$ *corrispondenti ai miniblocchi associati a* λ_i *sono linearmente indipendenti.*

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \times & \times & \times \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \end{array}\right]$$

Il sistema è raggiungibile se e solo se le righe di $\mathbf{B}$ indicate con crocette $(\times)$ sono linearmente indipendenti fra di loro.

Il numero minimo di ingressi che il sistema deve avere per poter essere raggiungibile è pari al numero massimo di miniblocchi associati allo stesso autovalore.

Retroazione dello stato

- Legge di controllo:
  - *Controllo in catena aperta* : La legge di controllo è predeterminata sulla base dei valori iniziale e finale dello stato e delle caratteristiche (modello) del sistema.
  - *Controllo in retroazione* : La legge di controllo tiene conto, istante per istante, dell'evoluzione del sistema.
- In riferimento al controllo in retroazione è poi possibile distinguere fra:
  - *Retroazione dinamica* : In cui il controllo viene calcolato in base allo stato del sistema da un dispositivo avente una dinamica propria.
  - *Retroazione statica* : In cui il controllo viene calcolato in base allo stato del sistema in modo statico.
- Per quanto riguarda gli obiettivi di controllo distinguiamo tra:
  - *Problemi di regolazione* : Si suppone che per effetto di disturbi il sistema si trovi in una condizione iniziale diversa da zero e si intenda riportare il sistema allo stato zero con velocità assegnata.
  - *Problemi di asservimento* : Si richiede che l'uscita del sistema approssimi, secondo certi criteri, un andamento assegnato.

Le metodologie che verranno introdotte riguarderanno la *reazione statica* per risolvere il *problema della regolazione*.

Equazione di stato dei sistemi in retroazione

Consideriamo un sistema lineare tempo–invariante $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C},\, \mathbf{D})$ (discreto o continuo), in cui *si suppone che tutte le componenti del vettore di stato siano direttamente accessibili*.

L'equazione che definisce la legge di retroazione dello stato è la seguente:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

dove $dim(\mathbf{K}) = m \times n$.

Applicando la legge di controllo in retroazione ad un sistema continuo (lo stesso vale per il discreto) si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t) \end{cases}$$

———————

Nota. Un secondo schema di retroazione possibile è costituito dalla retroazione dell'*uscita*, anzichè dello stato:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$$

- Per sistemi con *un ingresso ed una uscita* $(m = p = 1)$ la matrice $\mathbf{K}_1$ è uno scalare, mentre la matrice $\mathbf{K}$ è un vettore di n componenti.
- Il fatto di poter disporre di n gradi di libertà anzichè uno, consente più ampie possibilità di modifica della dinamica del sistema tramite una retroazione dello stato anzichè dell'uscita.

Invarianza rispetto a retroazione dello stato

- Sia $\mathcal{S}_K$ il sistema dinamico che si ottiene retroazionando il sistema $\mathcal{S}$ mediante la matrice $\mathbf{K}$.
- *Invarianza del sottospazio di Raggiungibilità*. I sottospazi di raggiungibilità del sistema $\mathcal{S}$ e del sistema $\mathcal{S}_K$ ottenuto mediante retroazione dello stato, coincidono:

$$\forall \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m\times n} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+} = \mathcal{X}_{\mathcal{S}_K}^{+}$$

- Prova. Valgono infatti le seguenti relazioni:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+} \subseteq \mathbf{A}\mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+} + \mathrm{Im}\mathbf{B} \subseteq \mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+} + \mathrm{Im}\mathbf{B} = \mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+}$$

in quanto $\mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+}$ è il più piccolo sottospazio $\mathbf{A}$–invariante che contiene l'immagine di $\mathbf{B}$. Il sottospazio $\mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+}$ è $(\mathbf{A}+\mathbf{BK})$-invariante e contiene l'immagine di $\mathbf{B}$ per cui si ha $\mathcal{X}_{\mathcal{S}_K}^{+} \subseteq \mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+}$.

Inoltre il sistema $\mathcal{S}$ può essere ottenuto dal sistema $\mathcal{S}_K$ con una retroazione dello stato $-\mathbf{K}$. In altre parole la matrice $\mathbf{A}$ di $\mathcal{S}$ può essere scritta come:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BK}) + \mathbf{B}(-\mathbf{K})$$

Quindi ripetendo il ragionamento precedente si ottiene l'inclusione inversa:

$$\mathcal{X}_{\mathcal{S}}^{+} \subseteq \mathcal{X}_{\mathcal{S}_K}^{+}$$

- *Invarianza degli autovalori del sottosistema non raggiungibile*. Se il sistema $\mathcal{S}$ è in forma standard di raggiungibilità:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}$$

allora anche il sistema retroazionato $\mathcal{S}_K$ è in forma standard di raggiungibilità, e in entrambi i casi la matrice $\mathbf{A}_{2,2}$ è quella che caratterizza la parte non raggiungibile.

- Prova. Si partizioni la matrice di retroazione $\mathbf{K}$ in modo conforme alla partizione di $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}$$

Si ha allora:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{1,2} + \mathbf{B}_1\mathbf{K}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma canonica di controllo

- Si faccia riferimento al seguente sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{b},\, \mathbf{C},\, \mathbf{d})$ lineare, invariante e ad un solo ingresso:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}\,u(t) \end{cases}$$

- Proprietà. *Il sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{b},\, \mathbf{C},\, \mathbf{d})$ è raggiungibile* se e solo se *è algebricamente equivalente ad un sistema $\mathcal{S}_c = (\mathbf{A}_c,\, \mathbf{b}_c,\, \mathbf{C}_c,\, \mathbf{d}_c)$ in* forma canonica di controllo (o di raggiungibilità), *cioè un sistema dove le matrici $\mathbf{A}_c$ e $\mathbf{b}_c$ hanno la struttura:*

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

e dove i parametri $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, sono i coefficienti del polinomio caratteristico monico *della matrice $\mathbf{A}$:*

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0$$

- La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{x}_c$ che porta il sistema (1) nella forma canonica di controllo è caratterizzata dalla seguente matrice

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+ (\mathcal{R}_c^+)^{-1}$$

dove $\mathcal{R}^+$ è la matrice di raggiungibilità del sistema (1) e dove $(\mathcal{R}_c^+)^{-1}$ è una matrice che ha la seguente struttura:

$$(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Infatti, indicando con $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n$ le colonne della matrice $\mathbf{T}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \left[\, \mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \ldots \ \ \mathbf{v}_n \,\right] = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} \\
&= \left[\, \mathbf{b} \ \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \ \ldots \ \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \,\right]
\begin{bmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\
\alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\
\alpha_3 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_{n-1} & 1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\
1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$
\begin{cases}
\mathbf{v}_1 & = \ \alpha_1\mathbf{b} + \alpha_2\mathbf{A}\mathbf{b} + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \\
\vdots & = \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{v}_{n-2} & = \ \alpha_{n-2}\mathbf{b} + \alpha_{n-1}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{A}^2\mathbf{b} \\
\mathbf{v}_{n-1} & = \ \alpha_{n-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b} \\
\mathbf{v}_n & = \ \mathbf{b}
\end{cases}
$$

- Per $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ i vettori $\mathbf{v}_i$ soddisfano la relazione

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} - \alpha_{i-1}\mathbf{v}_n$$

e per $i = 1$ si ha che

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{A})\mathbf{b} = -\alpha_0\mathbf{b} = -\alpha_0\mathbf{v}_n$$

- La struttura della matrice $\mathbf{A}_c$ si determina quindi nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_c &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\left[\, \mathbf{A}\mathbf{v}_1,\ \ \mathbf{A}\mathbf{v}_2,\ \ \ldots,\ \ \mathbf{A}\mathbf{v}_n \,\right] \\
&= \mathbf{T}^{-1}\left[\, -\alpha_0\mathbf{v}_n,\ \ \mathbf{v}_1 - \alpha_1\mathbf{v}_n,\ \ \ldots,\ \ \mathbf{v}_{n-1} - \alpha_{n-1}\mathbf{v}_n \,\right] \\
&= \left[\, -\alpha_0\mathbf{e}_n,\ \ \mathbf{e}_1 - \alpha_1\mathbf{e}_n,\ \ \ldots,\ \ \mathbf{e}_{n-1} - \alpha_{n-1}\mathbf{e}_n \,\right] \\
&= \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0\ldots & 0 \\
0 & 0 & 1\ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
-\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- La matrice $\mathbf{b}_c$ si determina in modo analogo:

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_n = \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Utilizzando $\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$ come matrice di trasformazione si ottiene un sistema $\mathbf{S}^+ = (\mathbf{A}^+, \mathbf{b}^+, \mathbf{C}^+, \mathbf{d}^+)$ algebricamente equivalente a quello di partenza dove $\mathbf{A}^+ = (\mathcal{R}^+)^{-1}\mathbf{A}\mathcal{R}^+$ e $\mathbf{b}^+ = (\mathcal{R}^+)^{-1}\mathbf{b}$ hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & -\alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La matrice $(\mathcal{R}_c^+)^{-1}$, precedentemente definita, non è altro che la matrice inversa della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}_c^+$ del sistema $\mathcal{S}_c$ in forma canonica di controllo:

$$\mathcal{R}_c^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -\alpha_{n-1} & \dots & \dots \\ 1 & -\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- La matrice $(\mathcal{R}_c^+)^{-1}$ trasforma il sistema $\mathbf{S}^+ = (\mathbf{A}^+, \mathbf{b}^+, \mathbf{C}^+, \mathbf{d}^+)$ nella forma canonica di controllo $\mathbf{S}_c = (\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{d}_c)$:

$$\mathbf{A}_c = \mathcal{R}_c^+\mathbf{A}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} \qquad\qquad \mathbf{b}_c = \mathcal{R}_c^+\mathbf{b}^+$$

- La matrice $\mathbf{T}$ non è altro che la composizione delle due precedenti matrici di trasformazione:

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}$$

Allocazione degli autovalori ($m = 1$)

- *Proprietà*. Sia $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{b},\, \mathbf{C},\, \mathbf{d})$ un sistema lineare di dimensione n, invariante, completamente raggiungibile e con un solo ingresso.

  Per ogni polinomio $p(\lambda)$ monico di grado n, esiste una matrice $\mathbf{k}^T \in \mathcal{R}^{1\times n}$ tale che il polinomio caratteristico dalla matrice di stato $\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ che caratterizza il sistema retroazionato coincide proprio con $p(\lambda)$.

- Prova. Siano α_i $(i = 0,\, \ldots,\, n-1)$ i coefficienti del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

  e siano d_i $(i = 0,\, \ldots,\, n-1)$ i coefficienti del polinomio arbitrario $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$$

  La coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è raggiungibile, per cui esiste un cambiamento di base che porta il sistema $\mathcal{S}$ in una forma canonica di controllo:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{b}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}$$

  Adottando una legge di controllo del tipo:

$$u(t) = \mathbf{k}_c^T\mathbf{x}_c(t) + v(t)$$

  dove con $\mathbf{k}_c^T$ si è indicato il vettore:

$$\mathbf{k}_c^T = [k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_{n-1}]$$

  si ottiene la seguente equazione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = (\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T)\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{b}_c\, v(t)$$

  dove

$$\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_0-\alpha_0 & k_1-\alpha_1 & \ldots & k_{n-1}-\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

- Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T$ è:

$$\Delta_{\mathbf{A}_c+\mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}(\alpha_{n-1} - k_{n-1}) + \ldots + (\alpha_0 - k_0)$$

Imponendo che $\Delta_{\mathbf{A}_c+\mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T}(\lambda)$ coincida con il polinomio $p(\lambda)$ si ottiene:

$$d_i = \alpha_i - k_i, \qquad\qquad i = 0, \ldots, n-1$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{k}_c^T = \left[\ \alpha_0 - d_0,\ \ \alpha_1 - d_1,\ \ \ldots,\ \ \alpha_{n-1} - d_{n-1}\ \right]$$

- Il vettore $\mathbf{k}_c^T$ è quello che, nella forma canonica di controllo, impone al sistema retroazionato di avere autovalori coincidenti con gli zeri del polinomio $p(\lambda)$.

- Essendo:

$$u(t) = \mathbf{k}_c^T\mathbf{x}_c(t) + v(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t) + v(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{T}\mathbf{x}_c(t) + v(t)$$

si ricava che:

$$\mathbf{k}_c^T = \mathbf{k}^T\,\mathbf{T} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{k}_c^T[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}}$$

cioè il vettore dei guadagni $\mathbf{k}^T$ si calcola utilizzando la seguente formula:

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \left\{ \left[\ \mathbf{b},\ \ \mathbf{A}\mathbf{b},\ \ \ldots,\ \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\ \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

dove $\mathbf{k}_c^T$ è il vettore precedentemente definito.

- Si noti che per calcolare il vettore $\mathbf{k}^T$ occorre conoscere solamente le matrice $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ e i polinomi $p(\lambda)$ e $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(k)$ in modo che il sistema retroazionato $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ sia di tipo "dead-beat".

Risoluzione. La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det\mathcal{R}^+ = -1$$

Il sistema è completamente raggiungibile, per cui esiste una retroazione statica dello stato $u(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(k)$ tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^3 = \lambda^3 \underbrace{-3}_{\alpha_2} \lambda^2 \underbrace{+3}_{\alpha_1} \lambda \underbrace{-1}_{\alpha_0}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è è

$$p(\lambda) = \lambda^3 = \lambda^3 + \underbrace{0}_{d_2} \lambda^2 + \underbrace{0}_{d_1} \lambda + \underbrace{0}_{d_0}$$

Il vettore $\mathbf{k}^T$ si determina nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T &= \mathbf{k}_c^T [\mathcal{R}^+ (\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1} = \mathbf{k}_c^T \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \mathbf{k}_c^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underbrace{-1}_{\alpha_0 - d_0} & \underbrace{3}_{\alpha_1 - d_1} & \underbrace{-3}_{\alpha_2 - d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Formula di Ackerman

Sia dato un sistema lineare, invariante ad un solo ingresso ($m = 1$):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u$$

e sia $p(\lambda)$ un polinomio monico scelto a piacere:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$$

Se la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è raggiungibile, allora la matrice dei guadagni $\mathbf{k}^T$ tale per cui $\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T}(\lambda) = p(\lambda)$ si calcola anche utilizzando la seguente *formula di Ackerman*

$$\boxed{\mathbf{k}^T = -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A})}$$

dove $\mathbf{q}^T$ è l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità:

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1}$$

Con $p(\mathbf{A})$ si indica la matrice che si ottiene dal polinomio $p(\lambda)$ sostituendo la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

Il vantaggio della formula di Ackerman è quello di non richiedere la conoscenza del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

<u>Esempio</u>. Facendo riferimento al precedente esempio in cui era $p(\lambda) = \lambda^3$, la matrice $\mathbf{k}^T$ si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T &= -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A}) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1}\mathbf{A}^3 \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esempio. Dato il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\, u(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

calcolare la matrice dei guadagni della retroazione statica dello stato $u(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$ che posizioni in -1, -2 e -2 gli autovalori del sistema retroazionato.

Il sistema è completamente raggiungibile:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}^T = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio desiderato è il seguente:

$$p(s) = (s+2)^2(s+1) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

Essendo:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha che:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2(A + \mathbf{I}) = \mathbf{A}^3 + 5\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} + 4\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 30 & 12 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la seguente matrice dei guadagni:

$$\mathbf{k}^T = -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 30 & 12 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Allo stesso risultato si sarebbe potuto giungere anche utilizzando la formula

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$$

In questo caso occorre calcolare il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ del sistema di partenza:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-1 & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = (s+1)(s-1)^2 = s^3 - s^2 - s + 1$$

Il polinomio desiderato è

$$p(s) = (s+2)^2(s+1) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

Il vettore $\mathbf{k}^T$ si ottiene nel modo seguente

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T &= \mathbf{k}_c^T\{\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \\
&= \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato

———————

La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sia $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$. Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ sono gli autovalori della sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$, cioè $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile del sistema è dato dalla sottomatrice $\mathbf{A}_{22}$, cioè $\lambda = -1$.

Siccome la parte non raggiungibile è stabile, esiste una retroazione dello stato $\mathbf{k}^T = \left[\begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array}\right]$ che stabilizza il sistema complessivo e tale da posizionare in -1 gli autovalori della parte raggiungibile. Per calcolare il vettore $\mathbf{k}^T$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{k}}^T$ che, nella forma standard di raggiungibilità, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{b}_1\tilde{\mathbf{k}}^T$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(s) = s^2 - s \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{b}_1\tilde{\mathbf{k}}^T}(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

Il vettore $\tilde{\mathbf{k}}^T$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{k}}^T &= \mathbf{k}_c^T \mathbf{T}_c^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -3 \end{array}\right] \left\{ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \right\}^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{cc} -1 & -3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & -2 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Il vettore di retroazione $\mathbf{k}^T$ relativo al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{k}^T = \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{k}}^T & \alpha \end{array}\right] \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -2 & \alpha \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -2+\alpha & -1 & \alpha \end{array}\right]$$

dove α è un parametro arbitrario.

Funzione di trasferimento di un sistema in forma canonica di controllo

Dato un sistema in forma canonica di controllo:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

La sua matrice di trasferimento è facilmente rappresentabile in:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{b}_c = \mathbf{C}_c \frac{agg(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)}{det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)} \mathbf{b}_c$$

dove:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

$$agg(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \begin{bmatrix} * & * & \dots & 1 \\ * & * & \dots & s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & s^{n-1} \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

Considerando la retroazione $\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T$, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa:

$$\mathbf{H}_R(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_0}{s^n + (\alpha_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \dots + (\alpha_0 - k_0)}$$

Nota: le funzioni $\mathbf{H}(s)$ e $\mathbf{H}_R(s)$ hanno lo stesso polinomio a numeratore in quanto *una retroazione algebrica dello stato non modifica gli zeri del sistema di partenza, ne modifica solamente i poli.*

Allocazione degli autovalori

- *Proprietà* : Sia dato un sistema con m ingressi descritto dalle matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$, completamente raggiungibile di dimensione n.

  Per ogni polinomio $p(\lambda)$ monico di grado n, esiste una matrice $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ tale che il polinomio caratteristico dalla matrice di stato $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ che descrive il sistema retroazionato coincide proprio con $p(\lambda)$.

Procedimento: se necessario, costruire una retroazione dello stato che renda raggiungibile il sistema tramite un solo ingresso.

1. Si considera la matrice di ingresso $\mathbf{B}$. Se esiste una colonna $\mathbf{b}_i$ della matrice $\mathbf{B}$ per cui il sistema risulti raggiungibile

$$rango[\mathbf{b}_i \ \mathbf{A}\mathbf{b}_i \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_i] = n$$

   allora, relativamente alla coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_i)$, si determina un vettore riga $\mathbf{k}_i^T$ tale che la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{b}_i\mathbf{k}_i^T$ abbia gli autovalori desiderati.

   La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ per $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ha righe tutte nulle, eccetto la i–esima, che coincide con $\mathbf{k}_i^T$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{k}_i^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lemma di Heymann. Se $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ è raggiungibile e se $\mathbf{b}_i$ è una colonna non nulla di $\mathbf{B}$, allora esiste una matrice $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m \times n}$, tale che $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_i \ , \ \mathbf{b}_i)$ è raggiungibile.

———————

Determinazione della matrice $\mathbf{M}_i$:

- Consideriamo $i = 1$. Si scelgono n colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$, procedendo nel seguente modo:
  - Si consideri la successione dei vettori $\mathbf{A}^i\mathbf{b}_1$, $i = 1, \dots, \nu_1$, arrestandosi al primo intero ν_1 per cui $\mathbf{A}^{\nu_1}\mathbf{b}_1$ risulti linearmente dipendente dai precedenti:
  $$\mathbf{A}^{\nu_1}\mathbf{b}_1 \quad \text{è comb. lin. di} \quad \{\mathbf{b}_1, \ \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \ , \dots, \mathbf{A}^{\nu_1 - 1}\mathbf{b}_1\}$$
  - Si consideri poi la successione dei vettori $\mathbf{A}^i\mathbf{b}_2$, $i = 1, \dots, \nu_2$, costruita in modo analogo.
  $$\mathbf{A}^{\nu_2}\mathbf{b}_2 \quad \text{è comb. lin. di} \quad \{\mathbf{b}_1, \ , \dots, \mathbf{A}^{\nu_1 - 1}\mathbf{b}_1, \ \mathbf{b}_2, \ , \dots, \mathbf{A}^{\nu_2 - 1}\mathbf{b}_2\}$$
  - Quando $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$ il procedimento si arresta.
- Si costruiscono le matrici $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ed $\mathbf{S} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ nel seguente modo:
  $$\mathbf{Q} = [\mathbf{b}_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{A}^{\nu_1 - 1}\mathbf{b}_1 \,\big|\, \ldots \,\big|\, \mathbf{b}_{k-1} \ \ \ldots \ \ \mathbf{A}^{\nu_{k-1} - 1}\mathbf{b}_{k-1} \,\big|\, \mathbf{b}_k \ \ \ldots \ \ \mathbf{A}^{\nu_k - 1}\mathbf{b}_k]$$
  $$\mathbf{S} = [0 \quad \ldots \qquad \mathbf{e}_2 \qquad \big| \ldots \big| \quad 0 \quad \ldots \qquad \mathbf{e}_k \qquad \big| \ 0 \quad \ldots \qquad 0]$$
  dove il vettore $\mathbf{e}_i$ rappresenta la i–esima colonna della matrice identità $\mathbf{I}_m$: il vettore $\mathbf{e}_2$ corrisponde alla ν_1–esima colonna di $\mathbf{S}$; $\mathbf{e}_3$ alla $(\nu_1 + \nu_2)$–esima colonna di $\mathbf{S}$, $\mathbf{e}_k$ è la $(\nu_1 + \ldots + \nu_{k-1})$–esima colonna di $\mathbf{S}$.
- La matrice
  $$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1}$$
  soddisfa il lemma di Heymann.

Esempio Si consideri il seguente sistema lineare ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$) a due ingressi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

Si calcoli, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

Risoluzione. I sottospazi di raggiungibilià del sistema rispetto al primo e al secondo ingresso sono:

$$\mathcal{X}^+_{\mathbf{b}1} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{X}^+_{\mathbf{b}2} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è raggiungibile utilizzando un solo ingresso. Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono tutti instabili, $\lambda_{1,2,3} = 1$, per cui se si utilizza un solo ingresso, la parte non raggiungibile è sicuramente instabile. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione dello stato che utilizzi un solo ingresso. Utilizzando entrambi gli ingressi, il sistema è completamente raggiungibile per cui esiste sicuramente una matrice $\mathbf{K}$ tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato.

Applichiamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante il primo ingresso. Le matrici $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{M}_1$ hanno la seguente struttura

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{b}_1 \;\; \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \,\middle|\, \mathbf{b}_2 \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \left[0 \;\; \mathbf{e}_2 \,\middle|\, 0 \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema che si ottiene retroazionando la matrice $\mathbf{M}_1$ è il seguente

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_1}(s) = s^3 - 3s^2 + 2s = s(s-1)(s-2)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice di raggiungibilità del sistema $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1,\ \mathbf{b}_1)$ è:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{k}_1^T$ che impone al sistema retroazionato gli autovalori desiderati è la seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1^T &= \mathbf{k}_c^T [\mathcal{R}^+ (\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -6 & -14 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice di retroazione complessiva è quindi la seguente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -6 & -14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipicamente, nel caso a più ingressi, esistono infinite soluzioni al problema di posizionamento arbitrario dei poli.

Nel caso in esame, una soluzione alternativa che non utilizza il lemma di Heymann è la seguente. Si consideri una matrice $\mathbf{K}$ ad elementi tutti incogniti

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

e si calcoli l'espressione della matrice retroazionata

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_{11} & 1 + k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & 1 + k_{23} \end{bmatrix}$$

Posto $k_{21} = 0$, $k_{22} = 0$ e $k_{13} = 0$ si ottiene un sistema diagonale a blocchi

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ k_{11} & 1 + k_{12} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 + k_{23} \end{array}\right]$$

Tutti gli autovalori della matrice retroazionata sono in -1 se, per esempio, si sceglie $k_{23} = -2$ e se si impone

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{BK}}(s) = s^2 - (2 + k_{12})s + 1 + k_{12} - k_{11} = s^2 + 2s + 1$$

Da tale relazione si ricava

$$k_{12} = -4, \qquad\qquad k_{11} = -4$$

In definitiva la matrice di retroazione è la seguente:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Stabilizzazione mediante retroazione dello stato.

Sia dato un sistema descritto dalle matrici di stato e di ingresso $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

- Se la coppia $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ è raggiungibile, il problema della stabilizzazione può essere risolto con il margine di stabilità che si desidera, in quanto gli autovalori di $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ sono allocabili arbitrariamente.
- Se la coppia $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ non è raggiungibile, si può ancora risolvere il problema *se il sottosistema non raggiungibile è asintoticamente stabile*.