

Analisi Modale

Analisi Modale

Si faccia riferimento al sistema tempo-discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

e al sistema tempo-continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Le evoluzioni libere dei due sistemi a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ sono

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

e

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$$

Le funzioni elementari del parametro k (del tempo t) che compaiono all'interno della matrice $\mathbf{A}^k$ (matrice $e^{\mathbf{A}t}$) possono essere facilmente evidenziate operando un cambiamento di base $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ nello spazio degli stati che trasformi la matrice $\mathbf{A}$ nella corrispondente forma canonica di Jordan $\bar{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$

e

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$

Definizione. Le funzioni discrete del tempo k che compaiono nella matrice $\bar{\mathbf{A}}^k$ e le funzioni continue del tempo t che compaiono nella matrice $e^{\bar{\mathbf{A}}t}$ prendono il nome di modi del sistema.

Nota : Attraverso l'analisi dei modi del sistema è possibile caratterizzare la risposta libera del sistema a partire dai suoi autovalori.

I - Autovalori reali distinti

Nel caso in cui gli autovalori della matrice $\overline{\mathbf{A}}$ siano tutti distinti, necessariamente la matrice $\overline{\mathbf{A}}$ è in forma diagonale:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Le corrispondenti matrici di transizione $\overline{\mathbf{A}}^k$ e $e^{\overline{\mathbf{A}}t}$ assumono la forma:

$$\overline{\mathbf{A}}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \quad e^{\overline{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- I modi del sistema sono funzioni linearmente indipendenti in quanto gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono distinti.

$$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k, \quad e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

- Se lo stato iniziale $\overline{\mathbf{x}}_0$ appartiene all'autospazio relativo ad un particolare autovettore, allora l'evoluzione libera del sistema appartiene allo stesso autospazio.
- Ciascun modo reale può venire "eccitato" indipendentemente dagli altri modi; ciascun modo complesso in generale viene eccitato assieme al suo coniugato, a meno che lo stato iniziale che lo eccita sia a componenti complesse.
- Una matrice è diagonalizzabile sse il polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$ ha tutte radici semplici;
- Una matrice è diagonalizzabile sse $\exists n$ autovettori linearmente indipendenti;

Rappresentazione grafica - caso discreto

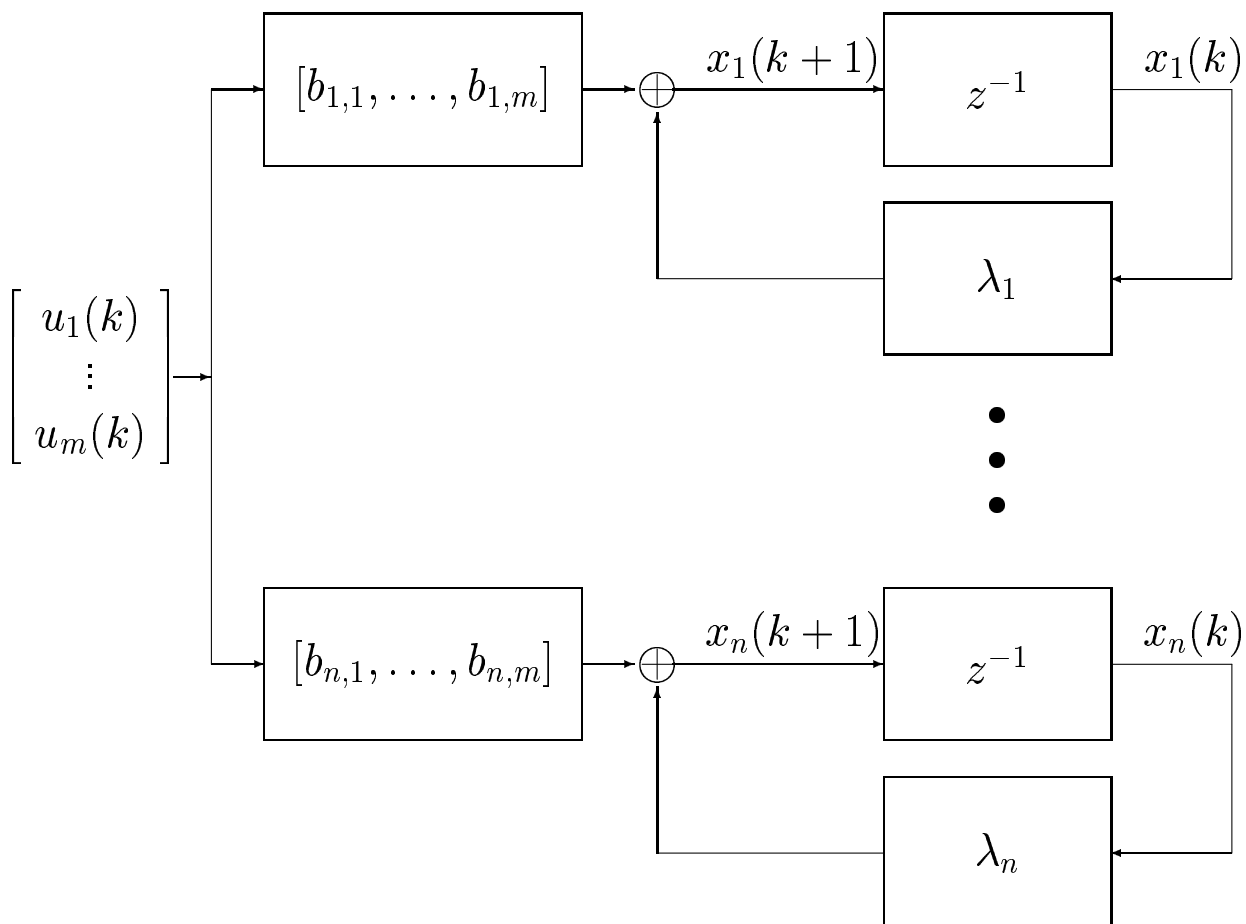
L'equazione alle differenze di tipo matriciale

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}u(k)$$

cioè

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}$$

descrive n sistemi lineari del primo ordine non interagenti tra di loro:



Rappresentazione grafica - caso continuo

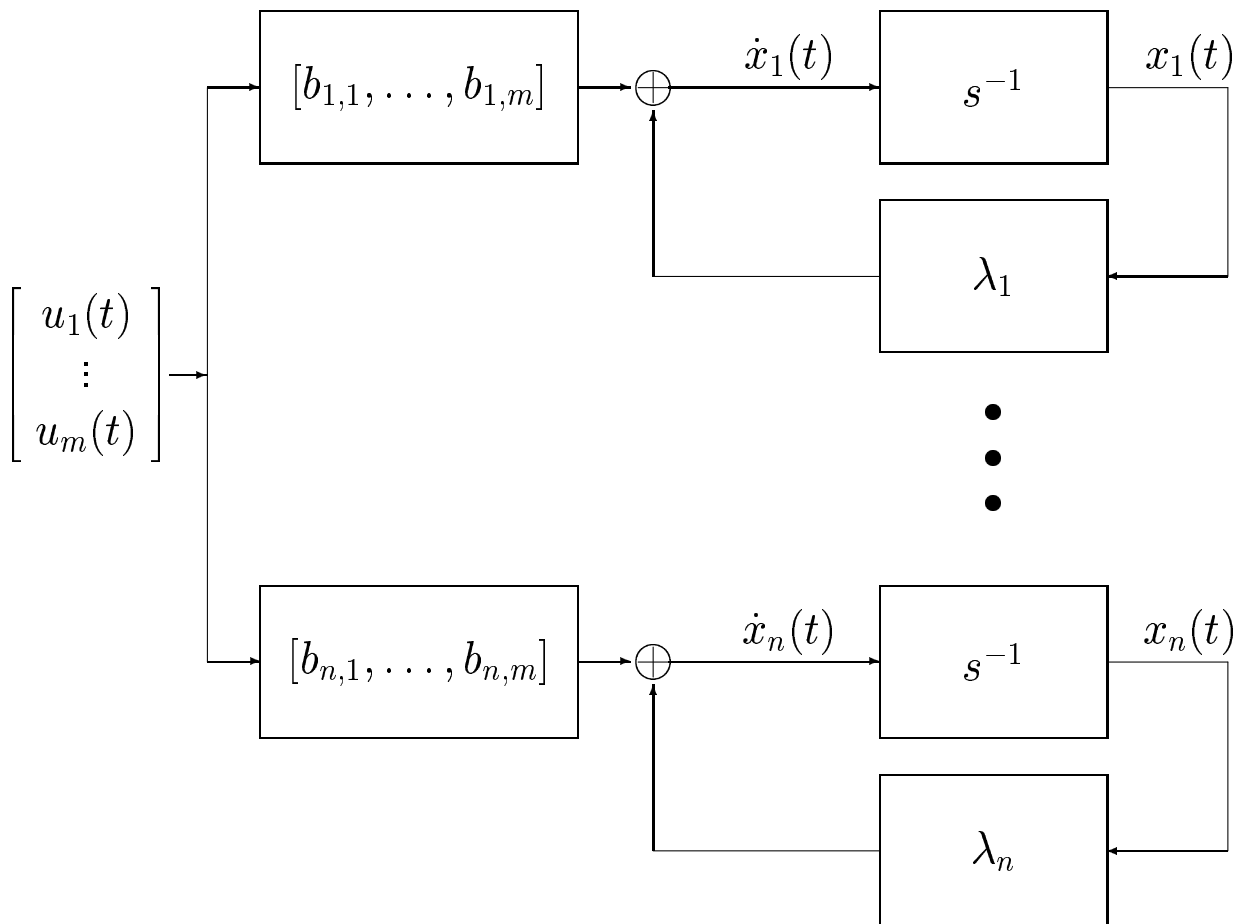
L'equazione differenziale di tipo matriciale:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}} u(t)$$

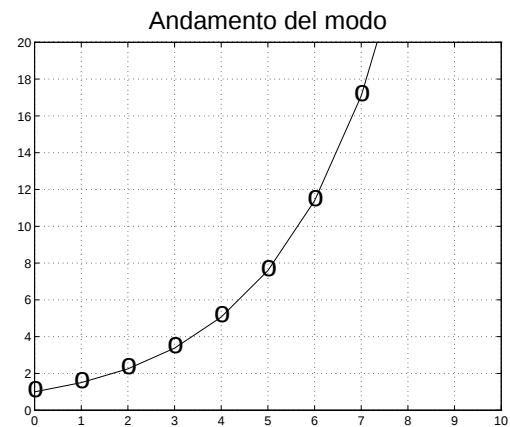
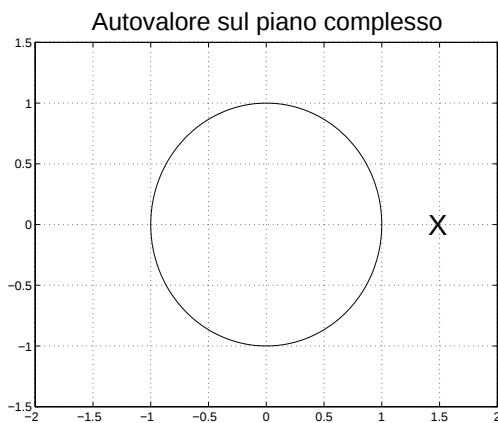
cioè

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

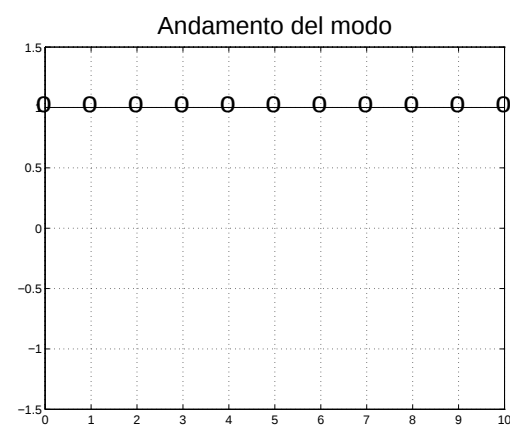
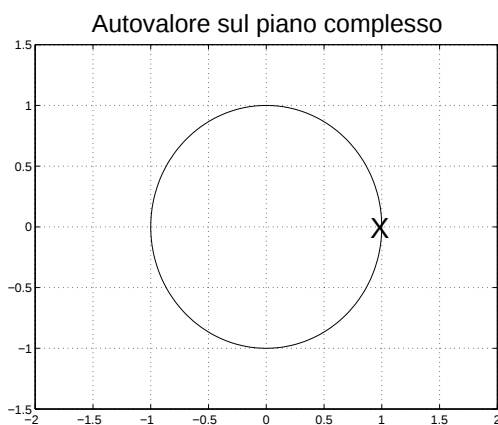
descrive n sistemi lineari del primo ordine non interagenti tra di loro:



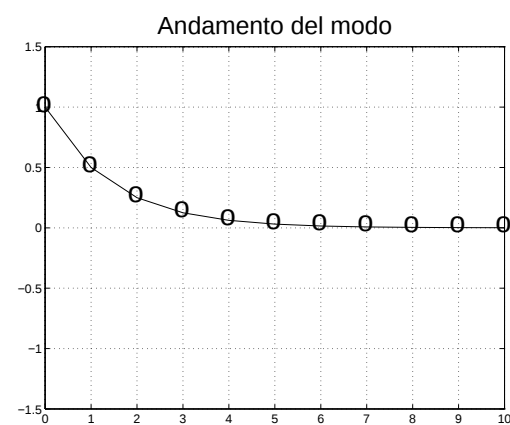
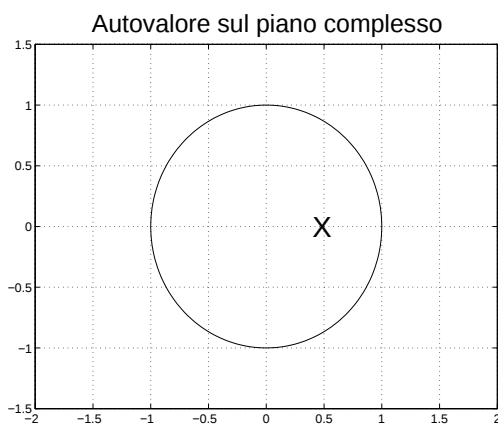
Autovalori reali - caso discreto I



λ^k dove $\lambda = 1.5$

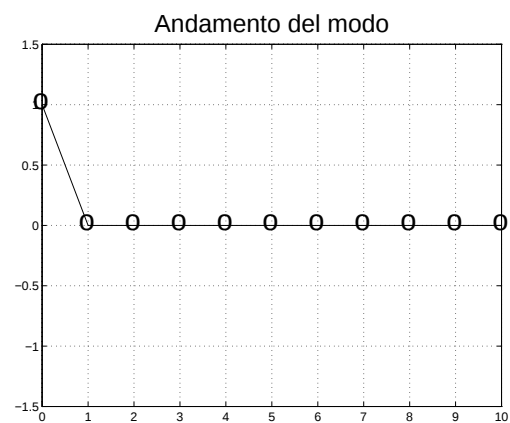


λ^k dove $\lambda = 1$

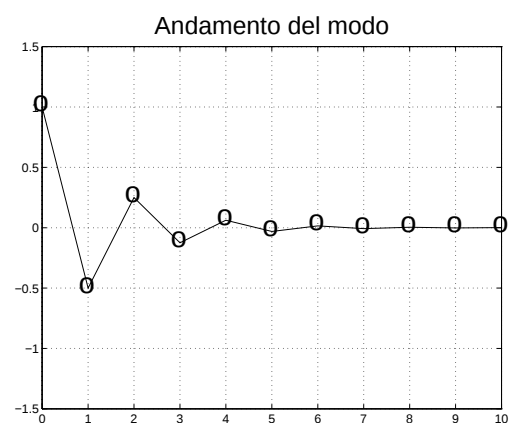
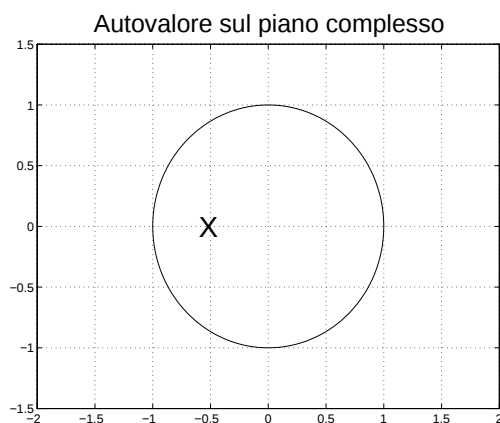


λ^k dove $\lambda = 0.5$

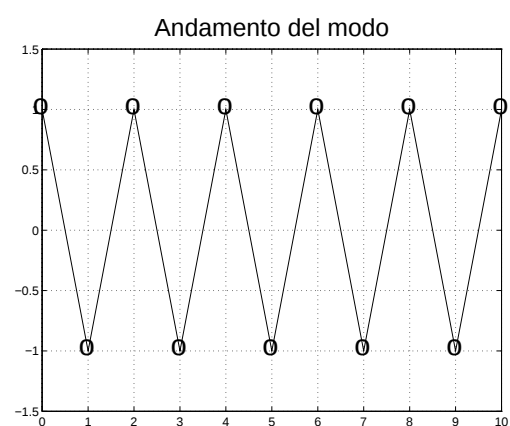
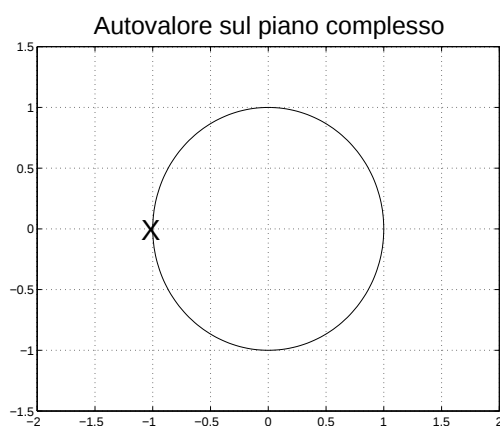
Autovalori reali - caso discreto II



λ^k dove $\lambda = 0$

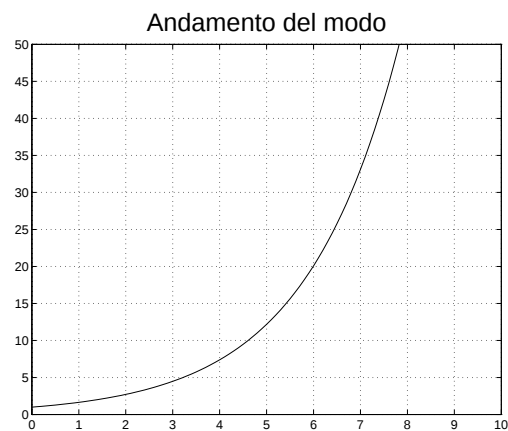
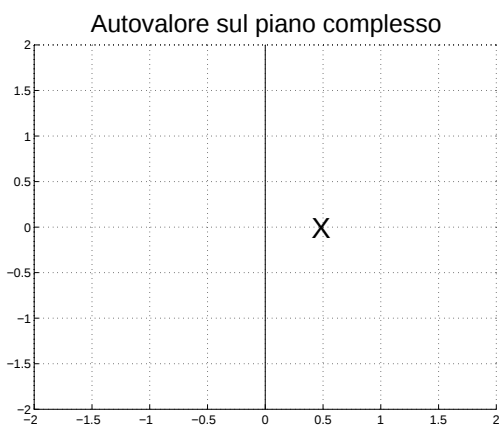


λ^k dove $\lambda = -0.5$

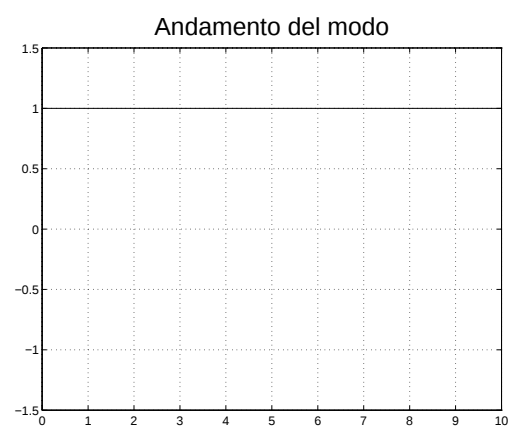
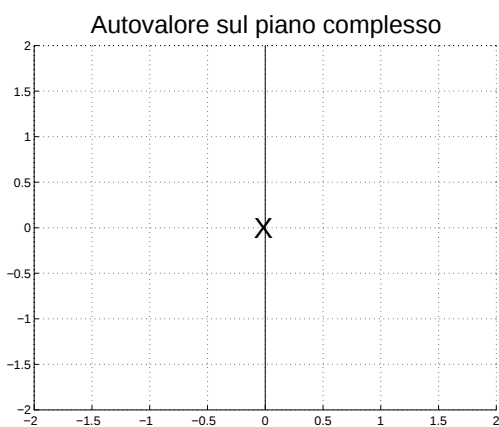


λ^k dove $\lambda = -1$

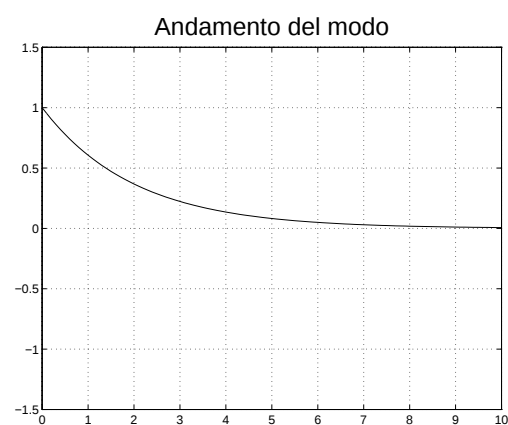
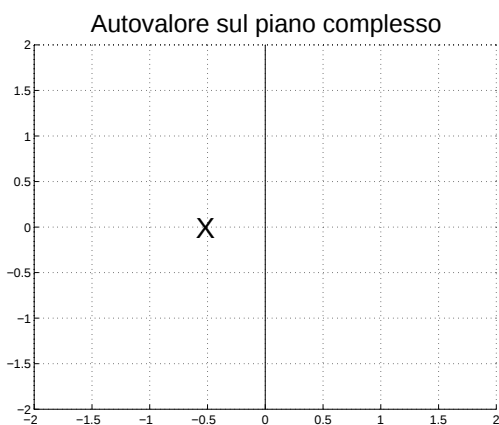
Autovalori reali - caso continuo



$e^{\lambda t}$ dove $\lambda = 0.5$



$e^{\lambda t}$ dove $\lambda = 0$



$e^{\lambda t}$ dove $\lambda = -0.5$

Autovalori complessi distinti.

Nel caso di autovalori complessi distinti le matrici di transizione hanno la seguente forma:

$$\tilde{\mathbf{A}}^k = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^k \begin{bmatrix} \cos k\theta_1 & \sin k\theta_1 \\ -\sin k\theta_1 & \cos k\theta_1 \end{bmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\lambda_n|^k \begin{bmatrix} \cos k\theta_n & \sin k\theta_n \\ -\sin k\theta_n & \cos k\theta_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1 t} \begin{bmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{bmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\sigma_n t} \begin{bmatrix} \cos \omega_n t & \sin \omega_n t \\ -\sin \omega_n t & \cos \omega_n t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- I corrispondenti modi reali sono:

tempo discreto

$$|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), \quad |\lambda_i|^k \sin(k\theta_i),$$

tempo continuo

$$e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t, \quad e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t$$

- Ogni evoluzione libera ha componenti esprimibili come combinazioni lineari a coefficienti reali dei modi reali.
- I due modi corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi coniugati $|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), |\lambda_i|^k \sin(k\theta_i)$ (oppure $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t), e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)$) non possono essere “eccitati” in modo indipendente.

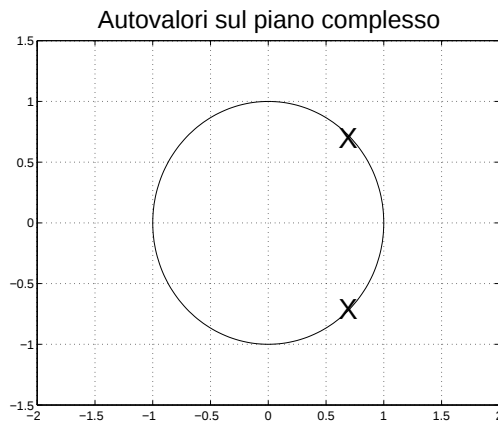
Caso tempo discreto:

$$\begin{cases} x_{i,1}(k) = |\lambda_i|^k [\cos(k\theta_i)x_{i,1}(0) + \sin(k\theta_i)x_{i,2}(0)] \\ x_{i,2}(k) = |\lambda_i|^k [-\sin(k\theta_i)x_{i,1}(0) + \cos(k\theta_1)x_{i,2}(0)] \end{cases}$$

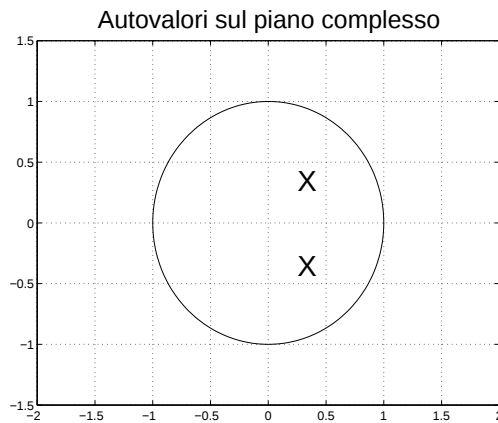
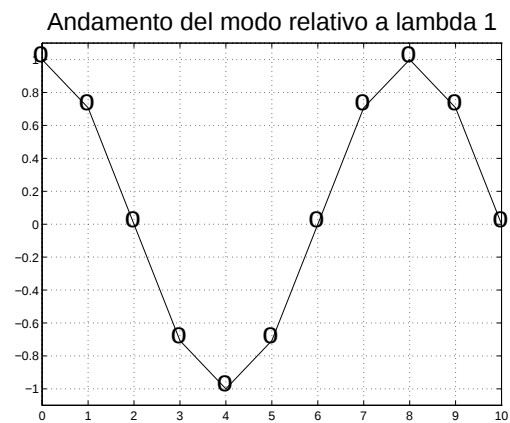
Caso tempo continuo:

$$\begin{cases} x_{i,1}(t) = e^{\sigma_i t} [\cos(\omega_i t)x_{i,1}(0) + \sin(\omega_i t)x_{i,2}(0)] \\ x_{i,2}(t) = e^{\sigma_i t} [-\sin(\omega_i t)x_{i,1}(0) + \cos(\omega_i t)x_{i,2}(0)] \end{cases}$$

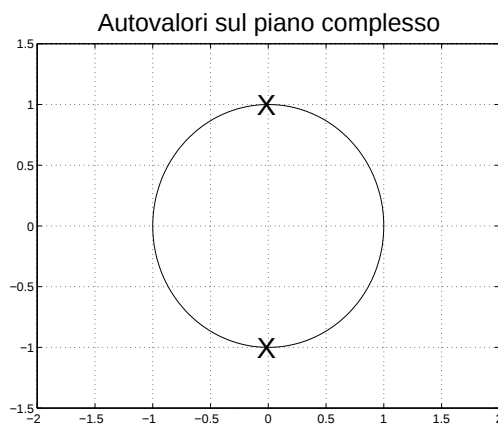
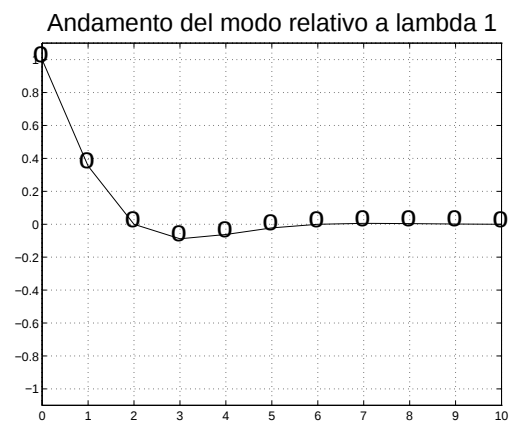
Autovalori complessi - caso discreto



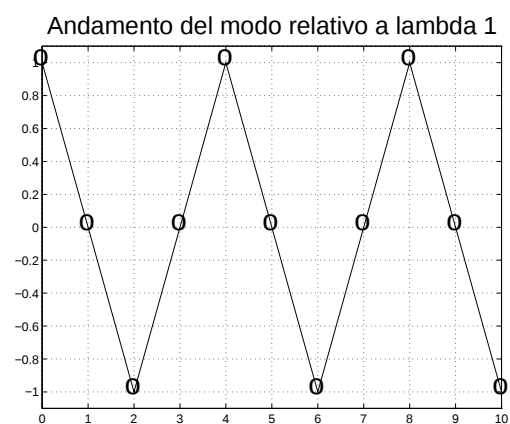
$$\lambda_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \rightarrow \cos \frac{k\pi}{4}$$



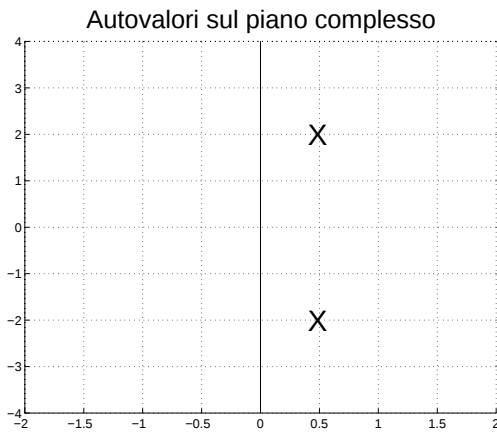
$$\lambda_{1,2} = 0.5e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \rightarrow (0.5)^k \cos \frac{k\pi}{4}$$



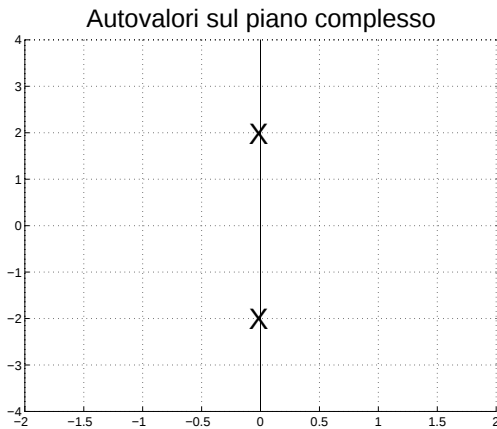
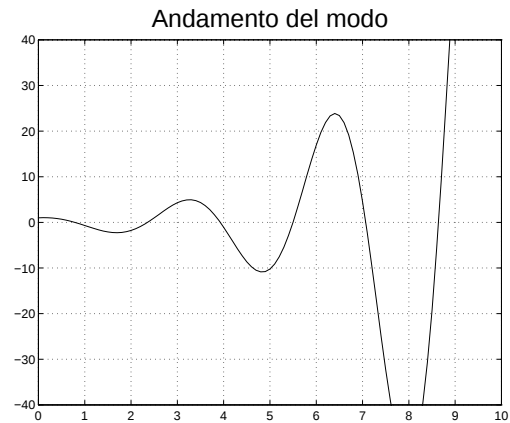
$$\lambda_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j \rightarrow \cos \frac{k\pi}{2}$$



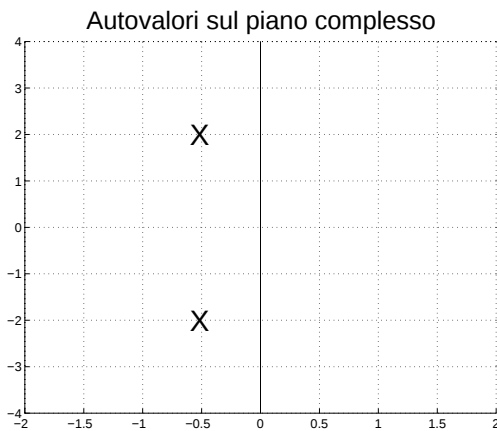
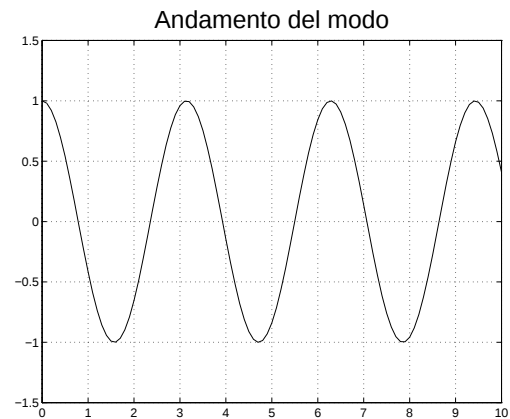
Autovalori complessi - caso continuo



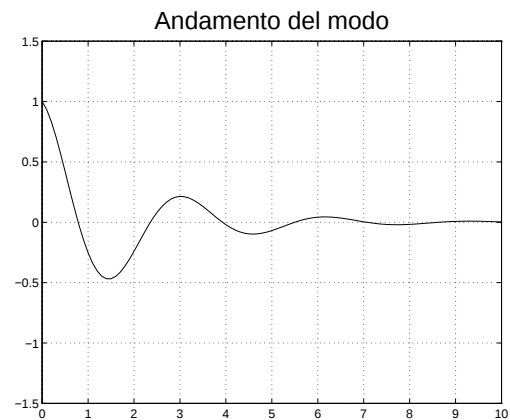
$e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ dove $\lambda_{1,2} = 0.5 \pm j2$



$e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ dove $\lambda_{1,2} = \pm j2$



$e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ dove $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j2$



II - Autovalori reali multipli

Nel caso tempo-discreto la matrice di transizione vale:

$$\overline{\mathbf{A}}^k = \text{diag}(\mathbf{J}_1^k, \mathbf{J}_2^k, \dots, \mathbf{J}_r^k)$$

dove ciascuno dei miniblocchi di Jordan produce un miniblocco del tipo:

$$\mathbf{J}_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \left(\frac{k(k-1)}{2!}\right)\lambda_i^{k-2} & \dots & \left(\frac{k(k-1)\dots(k-\nu_i+2)}{(\nu_i-1)!}\right)\lambda_i^{k-\nu_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

In questo caso i modi del sistema sono:

$$\lambda_i^k, k\lambda_i^{k-1}, \left(\frac{k(k-1)}{2!}\right)\lambda_i^{k-2}, \dots, \left(\frac{k(k-1)\dots(k-\nu_i+2)}{(\nu_i-1)!}\right)\lambda_i^{k-\nu_i+1}$$

Nel caso tempo-continuo, la matrice di transizione vale:

$$e^{\overline{\mathbf{A}}t} = \text{diag}(e^{\mathbf{J}_1 t}, e^{\mathbf{J}_2 t}, \dots, e^{\mathbf{J}_r t})$$

dove ciascuno dei miniblocchi di Jordan produce un miniblocco del tipo:

$$e^{\mathbf{J}_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

In questo caso i modi del sistema sono:

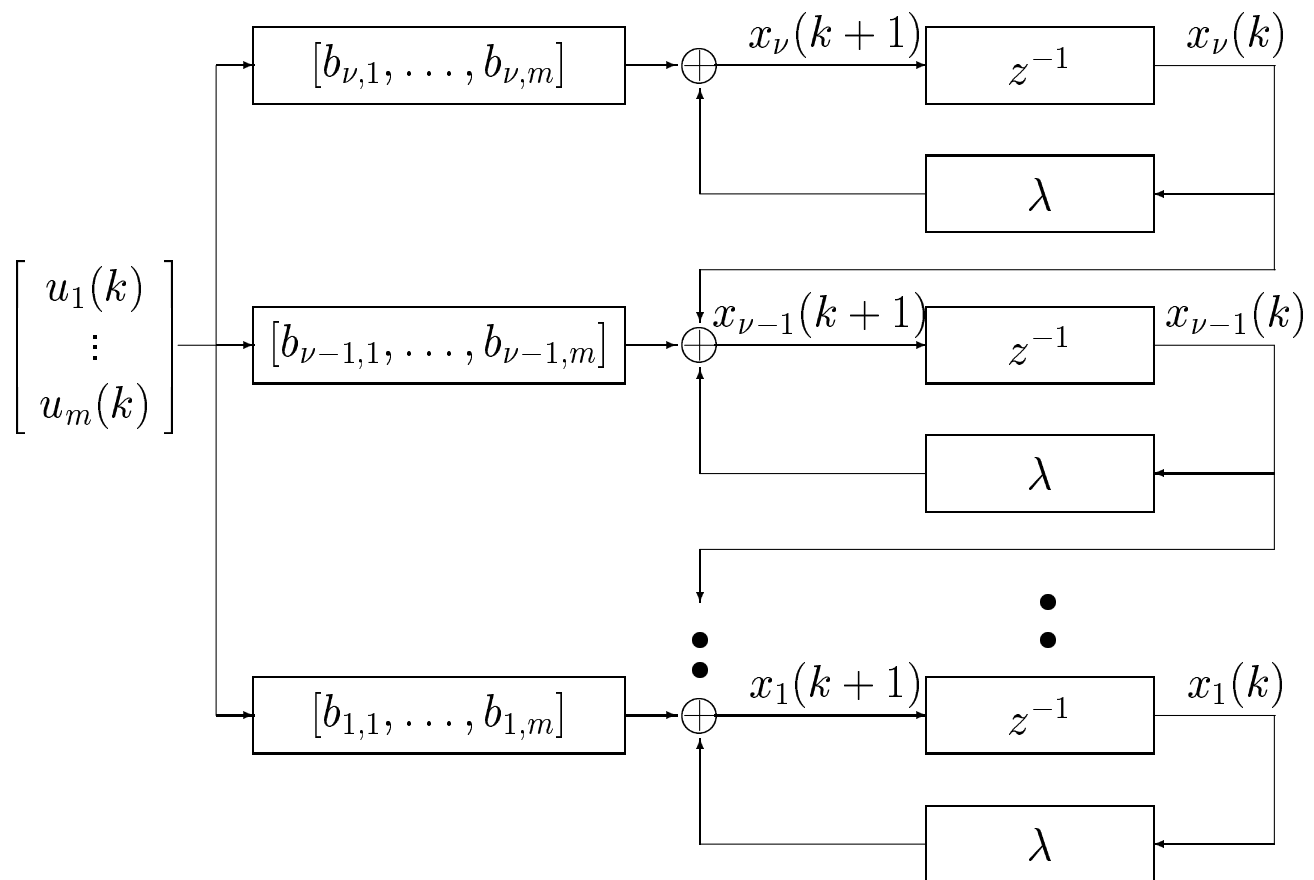
$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}e^{\lambda_i t}$$

Rappresentazione grafica - caso discreto

L'interazione tra i modi corrispondenti ad un miniblocco di Jordan di dimensione ν , può essere evidenziata mediante uno schema a blocchi corrispondente alla relazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_{\nu-1}(k+1) \\ x_{\nu}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_{\nu-1}(k) \\ x_{\nu}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\nu-1,1} & \dots & b_{\nu-1,m} \\ b_{\nu,1} & \dots & b_{\nu,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}$$

descrive ν sistemi lineari del primo ordine interagenti tra di loro:

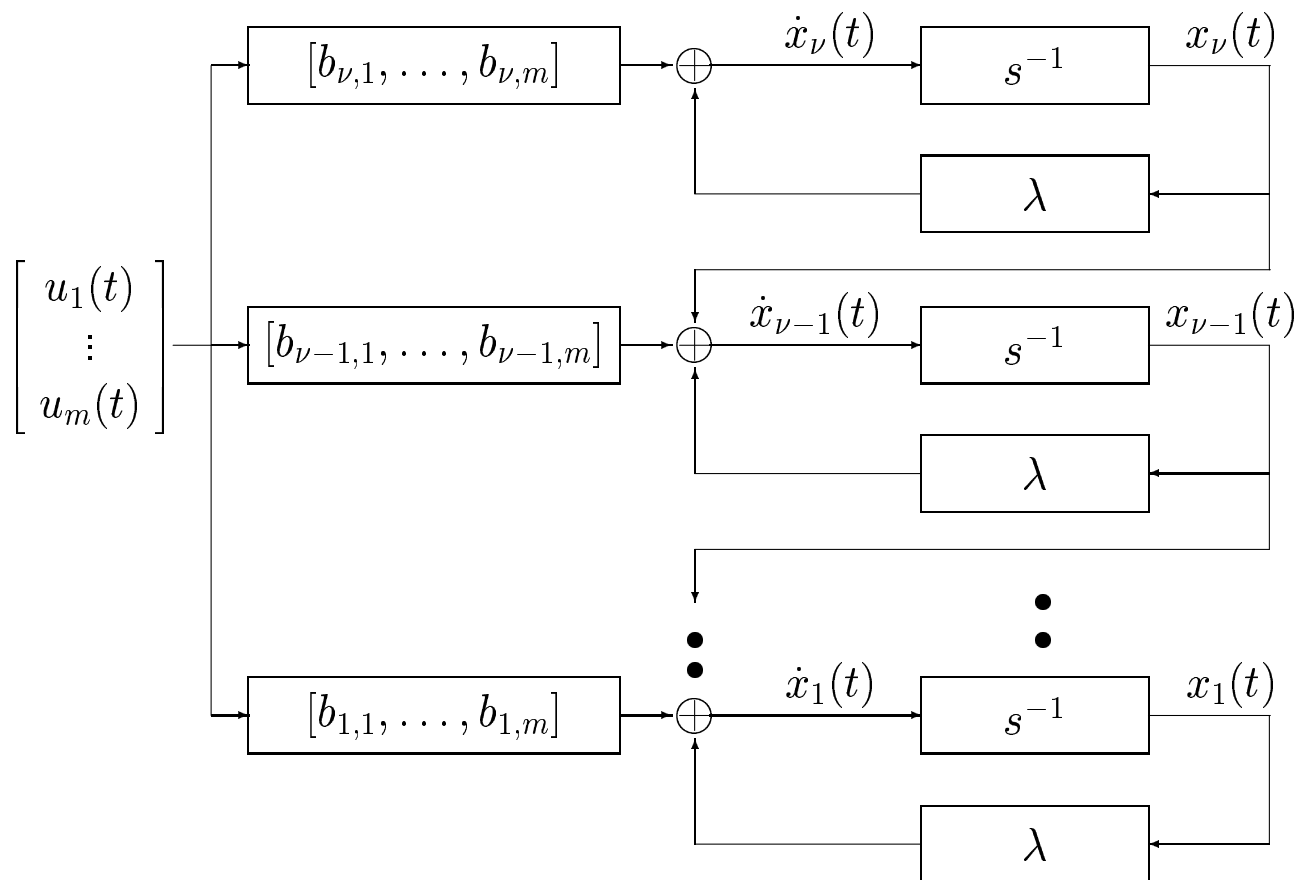


Rappresentazione grafica - caso continuo

L'interazione tra i modi corrispondenti ad un miniblocco di Jordan di dimensione ν , può essere evidenziata mediante uno schema a blocchi corrispondente alla relazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{\nu-1}(t) \\ \dot{x}_\nu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{\nu-1}(t) \\ x_\nu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{\nu-1,1} & \dots & b_{\nu-1,m} \\ b_{\nu,1} & \dots & b_{\nu,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

descrive ν sistemi lineari del primo ordine interagenti tra di loro:



Proprietà dei modi associati ad autovalori multipli

- Invarianza : Se lo stato iniziale $\mathbf{x}_0$ appartiene al sottospazio generato da una catena di Jordan (miniblocco) relativa ad un autovalore λ , allora la traiettoria è completamente contenuta nel medesimo sottospazio.
- Interdipendenza : Non è possibile in alcun modo eccitare singolarmente i modi appartenenti ad un miniblocco di Jordan.

Sia $\mathbf{x}(0)$ lo stato iniziale del sistema:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{\nu 0} \end{bmatrix}$$

Caso tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(k) = \lambda^k x_{10} + k\lambda^{k-1}x_{20} + \dots + \left(\frac{k(k-1)\dots(k-\nu+2)}{(\nu-1)!}\right) \lambda^{k-\nu+1}x_{\nu 0} \\ x_2(k) = \lambda^k x_{20} + \dots + \left(\frac{k(k-1)\dots(k-\nu+3)}{(\nu-2)!}\right) \lambda^{k-\nu+2}x_{\nu 0} \\ \vdots \\ x_{\nu}(k) = \lambda^k x_{\nu 0} \end{cases}$$

Caso tempo continuo:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t}x_{10} + te^{\lambda t}x_{20} + \dots + \frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}e^{\lambda t}x_{\nu 0} \\ x_2(t) = e^{\lambda t}x_{20} + \dots + \frac{t^{\nu_i-2}}{(\nu_i-2)!}e^{\lambda t}x_{\nu 0} \\ \vdots \\ x_{\nu}(t) = e^{\lambda t}x_{\nu 0} \end{cases}$$

Autovalori reali multipli - Esempio

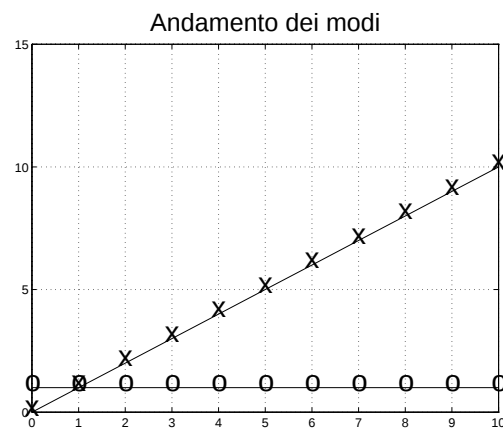
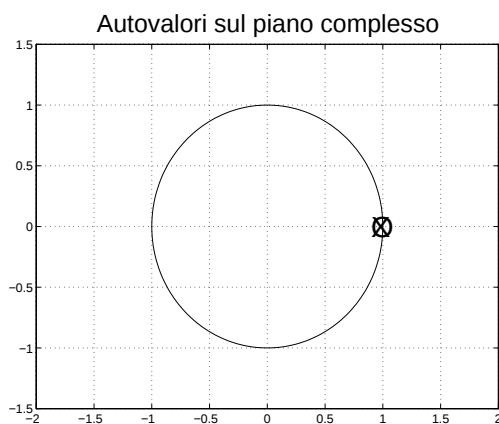
Sia il sistema in forma di Jordan con autovalore λ di molteplicità due:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

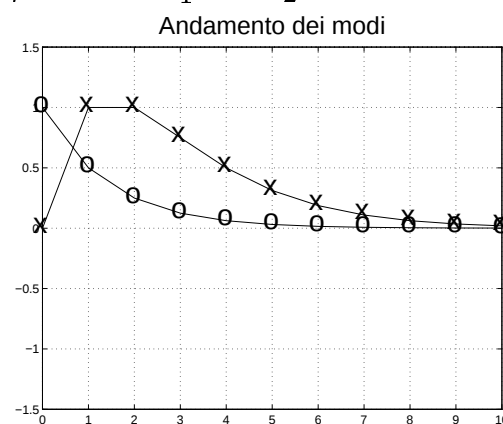
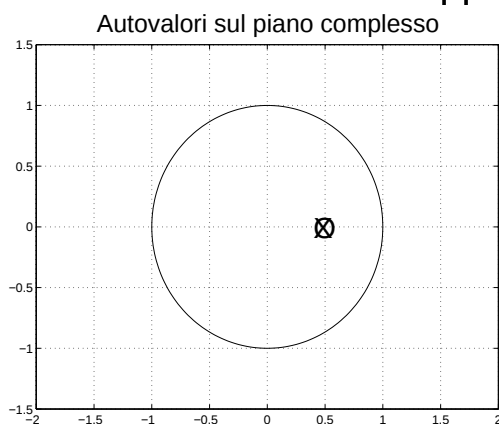
La traiettoria dello stato è quindi definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} x_1(k) = \lambda^k x_1(0) + k\lambda^{k-1}x_2(0), & x_1(0) = 1 \\ x_2(k) = \lambda^k x_2(0) & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Analizziamo i due modi $m_1 = \lambda^k$ e $m_2 = k\lambda^{k-1}$:



Autovalore doppio $\lambda = 1$, modi m_1 e m_2



Autovalore doppio $\lambda = 0.5$, modi m_1 e m_2

Autovalori reali multipli - Esempio

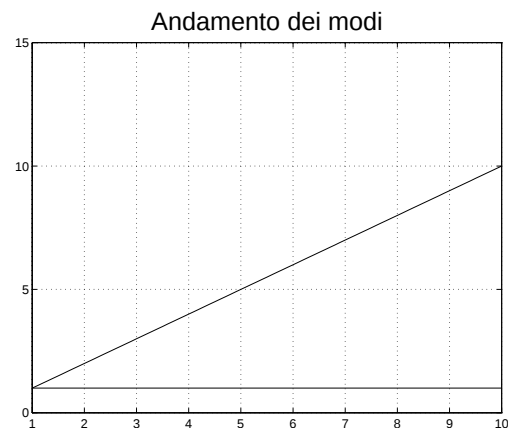
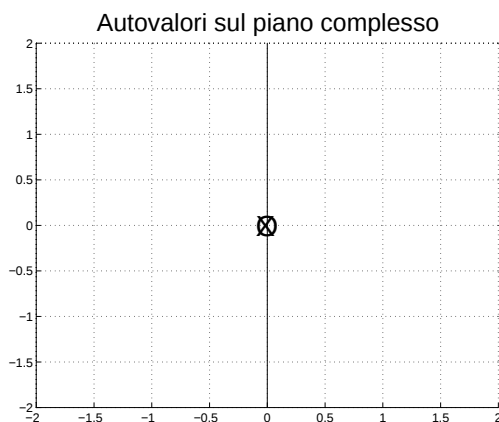
Sia il sistema in forma di Jordan con autovalore λ di molteplicità due:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

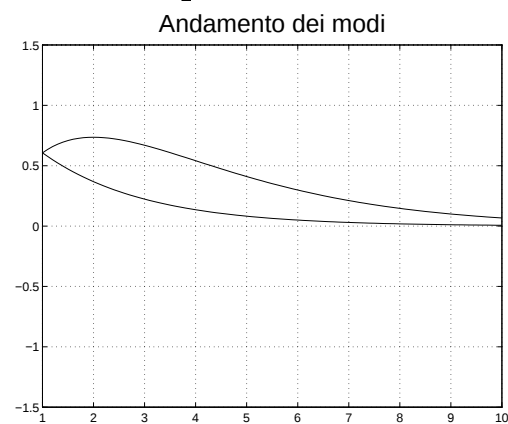
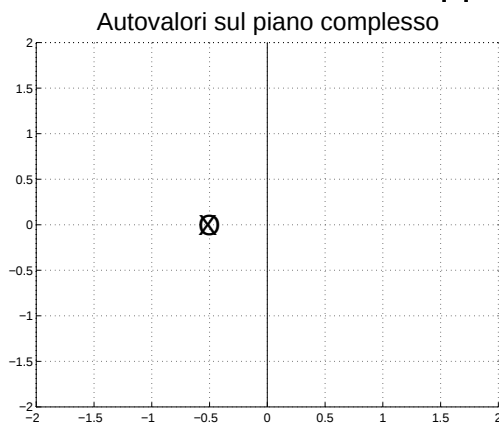
La traiettoria dello stato è quindi definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} x_1(0) + t e^{\lambda t} x_2(0), & x_1(0) = 1 \\ x_2(t) = e^{\lambda t} x_2(0) & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Analizziamo i due modi $m_1 = e^{\lambda t}$ e $m_2 = t e^{\lambda t}$:



Autovalore doppio $\lambda = 0$, modi m_1 e m_2



Autovalore doppio $\lambda = -0.5$, modi m_1 e m_2

Autovalori complessi coniugati multipli

- Sulla base della forma reale di Jordan, è possibile considerare i modi reali corrispondenti a coppie di autovalori complessi coniugati con grado di molteplicità maggiore di uno.

Caso tempo-discreto:

$$\begin{cases} |\lambda|^k \cos(k\theta) \\ |\lambda|^k \sin(k\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k|\lambda|^{k-1} \cos((k-1)\theta) \\ k|\lambda|^{k-1} \sin((k-1)\theta) \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} \frac{k(k-1)\dots(k-\nu+2)}{(\nu-1)!} |\lambda|^{k-\nu+1} \cos((k-\nu+1)\theta) \\ \frac{k(k-1)\dots(k-\nu+2)}{(\nu-1)!} |\lambda|^{k-\nu+1} \sin((k-\nu+1)\theta) \end{cases}$$

Caso tempo-continuo:

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t), \quad e^{\sigma t} \sin(\omega t),$$

$$te^{\sigma t} \cos(\omega t), \quad te^{\sigma t} \sin(\omega t),$$

$\vdots$

$\vdots$

$$\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\sigma t} \cos(\omega t), \quad \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\sigma t} \sin(\omega t).$$

Carattere di convergenza dei modi.

Consideriamo un sistema lineare tempo-invariante (a tempo continuo o discreto). Diremo che un modo $m(t)$ (reale o complesso), definito per $t \geq 0$ è:

- convergente se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |m(t)| = 0$$

- limitato, ma non convergente, se esiste un numero reale $+\infty > M > 0$ tale che, $\forall t \geq 0$, si abbia:

$$0 < |m(t)| < M$$

- non limitato, se per ogni numero reale prefissato $M > 0$, esiste un istante di tempo t per cui:

$$|m(t)| > M$$

Proposizione 1) : I modi del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ sono:

- *Convergenti* se e solo se tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale strettamente negativa.
- *Limitati* se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa o nulla e quelli a parte reale nulla sono associati a miniblocchi di Jordan di dimensione unitaria (cioè sono radici semplici del polinomio minimo).

Proposizione 2) : I modi del sistema $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$ sono:

- *Convergenti* se e solo se tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno modulo strettamente minore di uno.
- *Limitati* se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno modulo minore od uguale ad uno e quelli con modulo unitario sono associati a miniblocchi di Jordan di dimensione unitaria (cioè sono radici semplici del polinomio minimo).

Modi dominanti

L'evoluzione libera del sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ è:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$$

Al tendere di t [di k] all'infinito, i modi del sistema tendono a zero, rimangono costanti o divergono in funzione del valore degli autovalori. Alcuni di essi, però, tendono a zero più rapidamente rispetto agli altri, per cui la loro influenza sul comportamento asintotico del sistema diventa trascurabile all'aumentare del tempo.

1) Consideriamo inizialmente il caso di autovalori reali distinti.

Definizione. Siano λ_i gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$. L'autovalore λ_1 è l'autovalore dominante della matrice $\mathbf{A}$ se vale la seguente relazione:

- *nel caso tempo-continuo*

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) > \operatorname{Re}(\lambda_2) \geq \operatorname{Re}(\lambda_3) \geq \dots \geq \operatorname{Re}(\lambda_n)$$

- *nel caso tempo-discreto*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Proprietà. Al tendere di t [di k] all'infinito, l'evoluzione libera $x(t)$ [$x(k)$] di un sistema lineare tempo-continuo [tempo-discreto] tende ad appiattirsi lungo il sottospazio corrispondente all'autovalore dominante, cioè l'autovalore λ_1 a parte reale [a modulo] più grande.

Siano $\mathbf{v}_i$ gli autovettori associati agli autovalori λ_i . Siccome gli autovettori $\mathbf{v}_i$ costituiscono una base dello spazio degli stati, una qualsiasi condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ può essere espressa come somma delle sue componenti lungo gli autovettori $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{x}_0 = x_{0,1}\mathbf{v}_1 + x_{0,2}\mathbf{v}_2 + \dots + x_{0,n}\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n x_{0,i}\mathbf{v}_i$$

Le componenti $x_{0,i}$ di tale scomposizione si possono esprimere come segue

$$x_{0,i} = \mathbf{v}_i^{*T} \mathbf{x}_0$$

cioè come prodotto scalare tra il vettore $\mathbf{x}_0$ e le righe $\mathbf{v}_i^*$ della matrice $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} \\ \mathbf{v}_2^{*T} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^{*T} \end{bmatrix}$$

Le evoluzioni libere $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(k)$ corrispondenti alla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ sono:

$$\mathbf{x}(t) = x_{0,1}e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + x_{0,2}e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \dots + x_{0,n}e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$

e

$$\mathbf{x}(k) = x_{0,1}\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + x_{0,2}\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \dots + x_{0,n}\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

Se $x_{0,1} \neq 0$, le evoluzioni libere $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(k)$ possono essere riscritte nel modo seguente

$$\mathbf{x}(t) = x_{0,1}e^{\lambda_1 t} \left[\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \frac{x_{0,i}e^{\lambda_i t}}{x_{0,1}e^{\lambda_1 t}} \mathbf{v}_i \right]$$

e

$$\mathbf{x}(k) = x_{0,1}\lambda_1^k \left[\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n \frac{x_{0,i}\lambda_i^k}{x_{0,1}\lambda_1^k} \mathbf{v}_i \right]$$

Chiaramente, al tendere di t e di k all'infinito, si ha che

$$\mathbf{x}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} x_{0,1}e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\simeq} x_{0,1}\lambda_1^k\mathbf{v}_1$$

cioè, indipendentemente dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$, se $x_{0,1} \neq 0$ l'evoluzione libera del sistema tende verso l'autospazio $\text{span}[\mathbf{v}_1]$ corrispondente al polo dominante.

2) Prendiamo ora in considerazione il caso di autovalori complessi coniugati.

In questo caso, una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ viene detta “*dominante*” rispetto agli altri autovalori se, nel caso tempo-continuo, vale la seguente relazione:

$$Re(\lambda_1) = Re(\underbrace{\lambda_1^*}_{\lambda_2}) > Re(\lambda_3) \geq Re(\lambda_4) \geq \dots \geq Re(\lambda_n)$$

Sia $\mathbf{v}_1$ l'autovettore complesso corrispondente all'autovalore λ_1 e siano $\mathbf{v}_{1R}$ e $\mathbf{v}_{1I}$, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria dell'autovettore $\mathbf{v}_1$. La condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ può sempre essere espressa come somma delle sue componenti lungo $\mathbf{v}_{1R}$, $\mathbf{v}_{1I}$ e gli altri autovettori $\mathbf{v}_i$ del sistema:

$$\mathbf{x}_0 = x_{0,1}\mathbf{v}_{1R} + x_{0,2}\mathbf{v}_{1I} + x_{0,3}\mathbf{v}_3 + \dots + x_{0,n}\mathbf{v}_n$$

L'evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ assume la seguente forma:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1R} & \mathbf{v}_{1I} \end{bmatrix} e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} + x_{0,3}e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3 + \dots + x_{0,n}e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$

che può anche essere riscritta nel seguente modo

$$\mathbf{x}(t) = e^{\sigma t} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1R} & \mathbf{v}_{1I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} + \sum_{i=3}^n \frac{x_{0,i}e^{\lambda_i t}}{e^{\sigma t}} \mathbf{v}_i \right\}$$

Al tendere di t all'infinito, si ha che

$$\mathbf{x}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1R} & \mathbf{v}_{1I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix}$$

cioè l'evoluzione libera del sistema tende verso il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_{1R}$ e $\mathbf{v}_{1I}$.

Considerazioni analoghe valgono anche nel caso di sistemi tempo-discreti con autovalori complessi coniugati dominati.

Esempio. Dato il seguente sistema dinamico tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

determinare il sottospazio corrispondente al modo dominante.

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-3 & 1 & 0 \\ -1 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s-2)[(s-3)(s-1)+1] = (s-2)^3$$

Il sistema presenta 3 autovalori coincidenti: $\lambda = 2$. Il corrispondente autovettore $\mathbf{v}_1$ si ottiene risolvendo il sistema

$$(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovettori generalizzati $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ si ricavano nel modo seguente:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la matrice di trasformazione

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice $\mathbf{A}$ viene diagonalizzata nel modo seguente

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera $\overline{\mathbf{x}}(t)$ nello spazio trasformato è

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = e^{\overline{\mathbf{A}}t}\overline{\mathbf{x}} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 t + \bar{x}_3 \frac{t^2}{2} \\ \bar{x}_2 + \bar{x}_3 t \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

Se $\bar{x}_3 \neq 0$ si ha che:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \frac{2}{t^2} + \bar{x}_2 \frac{2}{t} + \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \frac{2}{t^2} + \bar{x}_3 \frac{2}{t} \\ \bar{x}_3 \frac{2}{t^2} \end{bmatrix} \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{t^2}{2} e^{2t} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{v}}_1}$$

La direzione $\mathbf{v}_1$ lungo la quale si appiattisce la traiettoria $\mathbf{x}(t)$ è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{t^2}{2} e^{2t} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$$

Nel caso di sistema tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k)$$

si possono fare considerazioni analoghe. L'evoluzione libera è

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{A}}^k \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

Analogamente al caso precedente, se $\bar{x}_3 \neq 0$, per $k \rightarrow \infty$ si ha che:

$$\bar{\mathbf{x}}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{v}}_1} = \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$$