**Secondo compito di "Teoria dei Sistemi" - 22 Dicembre 2000 - Esercizi**

1. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

1.a) Utilizzando il lemma di Heymann applicato al primo ingresso, si calcoli, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -2.

1.b) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori del 4 sottosistemi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ e $\mathcal{S}_4$.

1.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

2. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in $-1$ il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato. Si utilizzi la formula di Akermann.

2.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico di ordine ridotto che posizioni in $-1$ il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore. Si utilizzi la forma canonica di osservabilità.

3. Si consideri il seguente sistema lineare discreto [$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

3.a) Si determini se il sistema è raggiungibile e/o controllabile. Calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0\ 2\ 0]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

3.b) Si determini se il sistema è osservabile e/o ricostruibile. Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 3$, $y(2) = 6$.

3.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

**Secondo compito di "Teoria dei Sistemi" - 22 Dicembre 2000 - Soluzione degli esercizi**

1.a) Applichiamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante il primo ingresso. Le matrici $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{M}_1$ hanno la seguente struttura

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{cc|c} b_1 & \mathbf{A}b_1 & b_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & e_2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema che si ottiene retroazionato la matrice $\mathbf{M}_1$ è il seguente

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_1} = s^3 - 3s^2 + 2s$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}} = (s+2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{K}_1$ che impone al sistema retroazionato gli autovalori desiderati è

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -8 & -10 & -9 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & -10 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -8 & -10 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -45 & -37 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice di retroazione complessiva è quindi

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -45 & -37 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.b) Le matrici di raggiungibilità e di osservabilità del sistema sono

$$\mathcal{R}^+ = \left[\begin{array}{rr|rr|c} -1 & 1 & 0 & 2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \end{array}\right], \qquad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio raggiungibile e quello non osservabile sono

$$\mathcal{X}^+ = \mathbf{R}^3 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{E}^- = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Le basi dei quattro sottospazi che determinano la scomposizione in forma canonica di Kalman sono:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_3 = \{\}, \qquad \mathcal{B}_4 = \{\}$$

La matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ è

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato ($\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$) in forma canonica di Kalman è caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Si noti che in questo caso la forma canonica di Kalman coincide con la forma standard di raggiungibilità.

1.c) L'autovalore della parte non raggiungibile è instabile per cui non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

2.a) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{R}^+ = -12$$

Il sistema è completamente raggiungibile per cui esiste una retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ che posiziona in -1 tutti e tre gli autovalori del sistema retroazionato. In questo caso, il polinomio deisderato e formula di Ackerman da utilizzare sono:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^3, \qquad \mathbf{k}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{q}(\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A})$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{\mathrm{T}} &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \\ &= -\frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-12} \begin{bmatrix} 10 & 2 & -14 \\ 6 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ -19 & 27 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -4.5 & -0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.b) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{O}^- = 12$$

Il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico di ordine ridotto. Una trasformazione $\mathbf{P}$ che porta a far coincidere l'uscita con l'ultima componente del vettore di stato è la seguente:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato ($\mathbf{x} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}$) che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \overline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e il polinomio desiderato sono i seguenti:

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \qquad\qquad p(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Il vettore $\mathbf{l}$ che posiziona in -1 i due autovalori dell'osservatore di ordine ridotto è

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) - \mathbf{l}y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{l}\mathbf{A}_{21}]\mathbf{v}(t) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{l}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{l} - \mathbf{l}\mathbf{A}_{21}\mathbf{l}]y(t) + [\mathbf{b}_1 + \mathbf{l}\mathbf{b}_2]u(t)$$

e cioè

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

3.a) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 per cui il sistema non è completamente raggiungibile. Per verificare se il sistema è controllabile, occorre verificare se $\mathrm{Im}\mathbf{A}^3 \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^3 = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad\qquad \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La condizione $\mathrm{Im}\mathbf{A}^3 \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$ è verificata per cui il sistema è controllabile a zero.

Per calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porta il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0\ 2\ 0]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ occorre calcolare in quanti passi $k$ lo stato $\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ è raggiungibile. Per $k = 1$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\mathbf{B}$$

Per $k = 2$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = - \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}]$$

Quindi la transizione è possibile in 2 passi. La sequenza cercata soddisfa la relazione

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = - \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

La sequenza cercata è quindi la seguente: $u(0) = -4$, $u(1) = 0$.

3.b) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 per cui il sistema non è completamente osservabile. Per verificare se il sistema è ricostruibile, occorre verificare se $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$:

$$\ker \mathbf{A}^3 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La condizione $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$ è verificata per cui il sistema è ricostruibile.
L'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con l'evoluzione libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 3$, $y(2) = 6$ sono tutti e soli quelli che soddisfano la seguente relazione:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \mathcal{O}^- \mathbf{x}_0 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

cioè

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{E}^- = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

3.c) Al punto precedente abbiamo visto che il sistema non è completamente osservabile. Inoltre, il sistema si trova già nella forma standard di osservabilità.

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

L'autovalore che caratterizza la parte non osservabile è stabile per cui è possible costruire un osservatore asintotico dello stato. Utilizzando la formula di Ackerman si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'osservatore di ordine pieno ha la seguente struttura

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{Ly}(k) + \mathbf{Bu}(k)$$

dove il vettore $\mathbf{L}$ è:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

**Secondo compito di "Teoria dei Sistemi"** - 22 Dicembre 2000 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabililità in $k$ passi del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

2. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ di un sistema lineare $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C})$ caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$

   $\bigcirc$ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;
   $\bigcirc$ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;
   $\bigcirc$ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;
   $\otimes$ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;

3. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema continuo $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

   $\otimes$ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
   $\otimes$ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è ricostruibile;
   $\bigcirc$ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
   $\otimes$ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

4. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

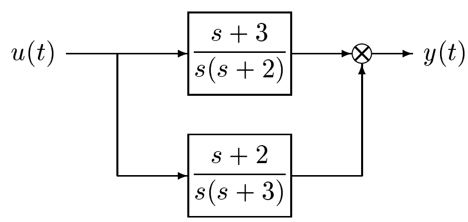
$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

5. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, uno stato $\mathbf{x}_1$ è indistinguibile nel futuro dallo stato nullo $\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$

   $\bigcirc$ la corrispondente successione di uscita $\mathbf{y}_1(\tau)$ è identicamente nulla: $\mathbf{y}_1(\tau) = 0$ per $\tau \geq 0$;
   $\otimes$ la corrispondente evoluzione libera $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$ è identicamente nulla: $\mathbf{y}_{l,1}(\tau) = 0$ per $\tau \geq 0$;
   $\otimes$ se il vettore $\mathbf{x}_1$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

6. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

   $\bigcirc$ Il sistema è raggiungibile;
   $\otimes$ Il sistema non è raggiungibile;
   $\bigcirc$ Il sistema è osservabile.
   $\otimes$ Il sistema non è osservabile;




7. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

   $\bigcirc$ Il sistema è raggiungibile;
   $\otimes$ Il sistema non è raggiungibile;
   $\bigcirc$ Il sistema è osservabile;
   $\bigcirc$ Il sistema non è osservabile;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

8. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1,\, \mathbf{B}_1,\, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2,\, \mathbf{B}_2,\, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di osservabilità $\mathcal{O}_1^-$ ed $\mathcal{O}_2^-$ esiste il legame:

   ○ $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}\mathcal{O}_1^-$
   ○ $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_1^-$
   ⊗ $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^-\mathbf{T}$
   ○ $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^-\mathbf{T}^{-1}$

9. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, la funzione di ingresso $\mathbf{u}(t)$, per $t \in [0,\, \bar{t}]$, che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(\bar{t})$:

   ○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) \in \mathcal{X}^+$;
   ⊗ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) - e^{\mathbf{A}\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;
   ○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{A}^{\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;
   ⊗ esiste se il sistema è raggiungibile;

10. Un sistema lineare $(\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C})$ può essere scomposto nella forma canonica di Kalman

   ⊗ sempre;
   ○ solo se il sistema è raggiungibile;
   ○ solo se il sistema è controllabile;
   ○ solo se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare;

11. Il seguente sistema lineare continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ posto in forma canonica di Jordan:

   ⊗ è raggiungibile;
   ○ non è raggiungibile;
   ⊗ è controllabile;
   ○ non è controllabile;

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]$$

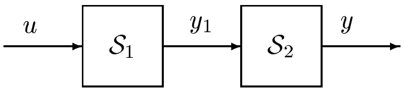
12. La formula $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \mathbf{k}_c^{\mathrm{T}}[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$ per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

   ○ per qualunque sistema;
   ⊗ solo se il sistema è raggiungibile;
   ○ solo se il sistema è osservabile;
   ⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

13. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione $K$) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

   ○ è un sistema raggiungibile ed osservabile;
   ○ è un sistema non osservabile;
   ⊗ è un sistema non raggiungibile;

14. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *serie* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1,\, \mathbf{B}_1,\, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2,\, \mathbf{B}_2,\, \mathbf{C}_2)$:




$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$