Teoria dei Sistemi - Secondo Compito
16 Dicembre 2002 - Esercizi
Compito Nr. $a =$ | $b =$

Nome:			
Nr. Mat.			
Firma:			
C.L.:	Info.	Elet.	Telec.

1. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)]$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} b & a+b & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ -a-b & -a-b & -a \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

1.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori della parte raggiungibile e della parte osservabile.

1.b) Portare il sistema in forma standard di raggiungibilità e in forma standard di osservabilità.

1.c) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato. Nella sintesi della matrice $\mathbf{K}$ si utilizzi la formula di Ackermann.

1.d) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

2. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)]$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} b-a & b & -a \\ a & 0 & a \\ -b & -b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

2.a) Calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0,\ -b,\ b]^{\mathrm{T}}$.

2.b) Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = b$. Se i calcoli dovessero essere troppo pesanti, lasciare la soluzione in forma simbolica.

2.c) Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

3. Scrivere una realizzazione completamente osservabile della seguente matrice di trasferimento:

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z(z+2)} & \frac{z+1}{(z+2)^2} & \frac{2}{z(z+1)} \end{bmatrix}$$

4. Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ di un sistema lineare continuo e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati.

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

Teoria dei Sistemi - Secondo Compito
16 Dicembre 2002 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec.

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1. Dato il sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, riportare la struttura di uno stimatore asintotico: a) in catena aperta; b) in catena chiusa e di ordine pieno.

   a) $\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ b) $\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$

2. Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{X}_K^+$ i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}, \mathbf{B})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

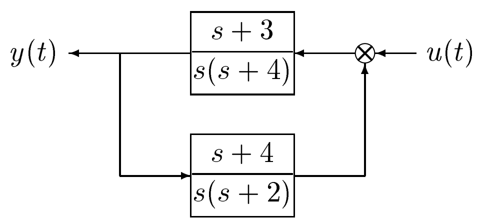
   ○ $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$
   ○ $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$
   ○ $\mathcal{X}^+ \neq \mathcal{X}_K^+$
   ⊗ nessuna delle precedenti

3. Sia $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$ il sistema discreto ottenuto campinando, con periodo di campionamento T, un sistema continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ completamente raggiungibile ed osservabile e con tutti i poli reali. Si può allora affermare che

   ○ La matrice $\mathbf{F}$ ha tutti gli autovalori a modulo minore di 1;
   ⊗ Il sistema $(\mathbf{F},\ \mathbf{G})$ è completamente raggiungibile;
   ⊗ Il sistema $(\mathbf{F},\ \mathbf{H})$ è completamente osservabile;

4. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

   ⊗ Il sistema è completamente raggiungibile;
   ○ Il sistema non è completamente raggiungibile;
   ⊗ Il sistema è completamente osservabile;
   ○ Il sistema non è completamente osservabile.



5. Scrivere in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$ l'espressione finale della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di una sistema discreto caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ 0 & \mathbf{A}_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_5 & \mathbf{A}_6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [\ 0 \quad \mathbf{C}_1 \quad 0\ ]$$

$$\mathbf{H}(z) = 0$$

6. Enunciare il *Lemma di Heymann*:
   Se $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ *è raggiungibile e se* $\mathbf{b}_i$ *è una colonna non nulla di* $\mathbf{B}$, *allora esiste una matrice* $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m\times n}$ *tale che* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_i,\ \mathbf{b}_i)$ *è raggiungibile.*

7. Il seguente sistema lineare continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ posto in forma canonica di Jordan:

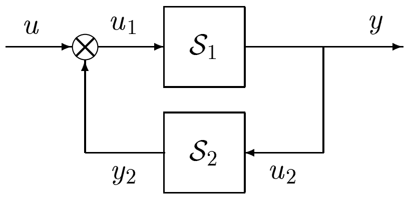
   ◯ è raggiungibile;
   ⊗ non è raggiungibile;
   ◯ è controllabile;
   ⊗ non è controllabile;

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]$$

8. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, uno stato $\mathbf{x}_1$ è indistinguibile nel futuro dallo stato nullo $\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ se e solo se

   ◯ lo stato $\mathbf{x}_1$ é osservabile;
   ⊗ lo stato $\mathbf{x}_1$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;
   ⊗ l'evoluzione libera $\mathbf{y}_{l,1}(\tau) = 0$ è nulla per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$;

9. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *retroazione* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

10. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ di un sistema lineare $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$

    ◯ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;
    ⊗ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;
    ◯ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;
    ◯ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;

11. Se un sistema dinamico é completamente osservabile allora

    ◯ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena aperta;
    ⊗ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine pieno;
    ⊗ per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine ridotto;

12. Un sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ è sempre "stabilizzabile" mediante retroazione statica della stima dello stato fornita da un osservatore asintotico

    ⊗ se il sistema è stabile;
    ◯ se e solo se il sistema è raggiungibile ed osservabile;
    ⊗ se e solo se la parte non raggiungibile e non osservabile del sistema è stabile;

13. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k)$, quale condizione deve essere soddisfatta affinché sia possibile far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(\bar{k})$:

$$\mathbf{x}(\bar{k}) - \mathbf{A}^{\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$$

Secondo compito di "Teoria dei Sistemi" - 16 Dicembre 2002 - Soluzione degli esercizi

1.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 2 & b-a & a^2+b^2 \\ -1 & a & -a^2 \\ -1 & -b & -b^2 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b-a \\ a \\ -b \end{bmatrix}\right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \ker\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2a & -a & -2a \\ 2a^2 & a^2 & 2a^2 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio si ottiene come intersezione di due piani nello spazio per cui è sicuramente sicuramente una retta. Le equazioni dei piani che rappresentano: a) il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$, e b) il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$, sono le seguenti:

$$\text{a)}\quad 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 0, \qquad\qquad \text{b)}\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Mettendo a sistema i due piani si trova che il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$ è il seguente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_3 = 0, \qquad \mathcal{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \left[\begin{array}{c|c|c} -a & 0 & 0 \\ \hline a+b & b & 2(a+b) \\ \hline 0 & 0 & -a \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]\mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

Il sottosistema raggiungibile è composto dalle prime due componenti dello spazio degli stati

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \overbrace{\begin{bmatrix} -a & 0 \\ a+b & b \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_r}\bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_r}\mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

ed è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = b$. La parte non raggiungibile è stabile: $\lambda_3 = -a$.
Il sottosistema osservabile è dato solamente dalla prima componente dello spazio degli stati

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \overbrace{\begin{bmatrix} -a \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_o}\bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ y(t) & = & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_o}\bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

Il sottosistema osservabile è caratterizzato dall'autovalore $\lambda_1 = -a$. La parte non osservabile è stabile ed è è caratterizzato dagli autovalori: $\lambda_2 = b$ e $\lambda_3 = -a$.

1.b) La forma canonica di Kalman racchiude in se sia la forma standard di raggiungibilità

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} -a & 0 & 0 \\ a+b & b & 2(a+b) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -a \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]\mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t)\end{array}\right.$$

che la forma standard di osservabilità:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) & = & \left[\begin{array}{c|cc} -a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline a+b & b & 2(a+b) \\ 0 & 0 & -a \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]\mathbf{u}(t) \\ \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{c|cc} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}(t)\end{array}\right.$$

1.c) Dall'analisi fatta al punto a) si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -3 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire sintetizzando la matrice $\bar{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico desiderato (quello della matrice $\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_r\bar{\mathbf{K}}$) è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_r+\mathbf{B}_r\bar{K}}(s) = (s+3)^2 = s^2+6s+9$$

La matrice $\bar{\mathbf{K}}$ può essere calcolata utilizzando la formula di Ackerman:

$$\begin{array}{rcl}\bar{\mathbf{K}} & = & -\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right](\mathcal{R}^+)^{-1}(\mathbf{A}_r+3\mathbf{I})^2 \\ & = & -\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & -a \\ 0 & a+b \end{array}\right]^{-1}\left\{\left[\begin{array}{cc} -a & 0 \\ a+b & b \end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right]\right\}^2 \\ & = & -\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{a}{a+b} \\ 0 & \frac{1}{a+b} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} (a-3)^2 & 0 \\ b^6+6(a+b)-a^2 & (b+3)^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} a-b-6 & -\frac{(b+3)^2}{a+b} \end{array}\right]\end{array}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{K} & = & \left[\begin{array}{cc} \bar{\mathbf{K}} & \alpha \end{array}\right]\mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} a-b-6 & -\frac{(b+3)^2}{a+b} & \alpha \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ & = & \left[\begin{array}{ccc} \alpha+2(a-b-6)+\frac{3(3+b)^2}{(a+b)} & \alpha+a-b-6+\frac{2(3+b)^2}{(a+b)} & \alpha+2(a-b-6)+\frac{4(3+b)^2}{(a+b)} \end{array}\right]\end{array}$$

dove α è un parametro arbitrario.

1.d) Dall'analisi fatta al punto a) si ha che la parte non osservabile del sistema non è stabile per cui non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

2.a) Il sistema non è raggiungibile

$$\mathcal{R}^+ = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -a-b & a^2-b^2 \\ -1 & a & -a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \det\mathcal{R}^+ = 0$$

per cui il problema potrebbe non avere soluzioni. Per calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0\ \ -b\ b]^{\mathrm{T}}$ occorre calcolare in quanti passi k lo stato $\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ è raggiungibile. Per $k=1$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{c} -b \\ -b \\ +2b \end{array}\right] \notin \mathrm{Im}\left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right] = \mathrm{Im}[\mathbf{B}]$$

Per $k=2$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{c} -b^2 \\ -b \\ b+b^2 \end{array}\right] \in \mathrm{Im}\left[\begin{array}{cc} 0 & -a-b \\ -1 & a \\ 1 & b \end{array}\right] = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}]$$

Infatti, la seguente matrice ha determinate nullo:

$$\det\left[\begin{array}{ccc} 0 & -a-b & -b^2 \\ -1 & a & -b \\ 1 & b & b+b^2 \end{array}\right] = 0$$

Quindi la transizione piò essere fatta in 2 passi. La successione di ingressi che porta lo stato iniziale in quello finale in 2 passi si ricava risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} -b^2 \\ -b \\ b+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a-b \\ -1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

La soluzione cercata è la seguente:

$$u(0) = \frac{b^2}{a+b}, \qquad u(1) = b + \frac{a\,b^2}{a+b}$$

2.b) Il sistema è completamente osservabile

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -a-b & -b & -a \\ a^2-b^2 & -b^2 & a^2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = a\,b\,(a+b) \neq 0$$

Esiste un solo stato iniziale $\mathbf{x}_p$ compatibile con l'evoluzione libera $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = b$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -a-b & -b & -a \\ a^2-b^2 & -b^2 & a^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.c) Siccome il sistema è completamente osservabile, è certamente possibile costruire un osservatore di ordine ridotto. Una possibile matrice di trasformazione che fa coincidere l'uscita con la terza componente del vettore di stato è la seguente:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}$ si ottiene il seguente sistema trasformato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 2b & -b & -b \\ -a & 0 & a \\ \hline a+2b & -b & -a-b \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ \hline 2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right.$$

La matrice $\mathbf{L}$ può essere calcolata utilizzando la formula di Ackerman:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -p(\mathbf{A}_{11})(\mathcal{O}^-_{\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{21}})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 2b & -b \\ -a & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} a+2b & -b \\ b(3a+4b) & -b(a+2b) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} b(a+4b) & -2b^2 \\ -2ab & ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+2b & -b \\ b(3a+4b) & -b(a+2b) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{a+b} \\ \frac{a}{a+b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(k)$$

4) La matrice di trasferimento assegnata può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z(z+2)} & \frac{z+1}{(z+2)^2} & \frac{2}{z(z+1)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z(z+2)^2(z+1)} \begin{bmatrix} z^2+3z+2 & z^3+2z^2+z & 2z^2+8z+8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z^4+5z^3+8z^2+4z} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_3} z^3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{B_2} z^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}}_{B_1} z + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{B_0} \right\} \end{aligned}$$

Una realizzazione completamente osservabile della matrice $\mathbf{G}(s)$ é la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{array} \right.$$