Secondo compito di "Teoria dei Sistemi" - 17 Dicembre 2001 - Esercizi

1. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

essendo $\mathbf{x}(t)$ il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

1.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori della parte raggiungibile e della parte osservabile.

1.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

1.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

2. Si consideri il seguente sistema lineare discreto [$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [2\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [4\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

2.b) Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$.

2.c) Per il sistema dato si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat di ordine ridotto.

3. Scrivere una realizzazione completamente raggiungibile della seguente matrice di trasferimento:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{s+3}{s^2} \\ \dfrac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

4. Dato il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ ed $\mathbf{H}$ del corrispondente sistema a segnali campionati. Si ponga $T = 2$;

Primo compito di "Teoria dei Sistemi" - 17 Dicembre 2001 - Soluzione degli esercizi

1.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \ker\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio coincide con il sottospazio $\mathcal{E}^-$, infatti la seguente matrice ha determinante nullo

$$\det\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}_4 = 0$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il sottosistema raggiungibile è composto dalle prime due componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_r} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_r} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

ed è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. La parte non raggiungibile è stabile: $\lambda_3 = -1$.
Il sottosistema osservabile è dato dalla prima e dalla terza componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Anche il sottosistema osservabile è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_3 = -1$. La parte non osservabile è stabile: $\lambda_2 = -1$.

1.b) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -2 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire sintetizzando la matrice $\bar{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_r$ e quello della matrice $\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_1\bar{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_r}(s) = (s-2)(s+1) = s^2 - s - 2 \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_r+\mathbf{B}_1\bar{K}}(s) = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

La matrice $\bar{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 & 0.5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La stessa matrice $\bar{\mathbf{K}}$ poteva essere calcolata anche utilizzando la formula di Ackerman:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1}(\mathbf{A}_r + 2\mathbf{I})^2 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}^2 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 & 0.5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -5.5 & 0.5 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & \alpha & \alpha - 6 \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

1.c) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non osservabile del sistema è stabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato. La matrice $\mathbf{L}$ potrà agire quindi solo su due dei tre autovalori del sistema, cioè gli autovalori della parte osservabile. La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ risulterà agevole se si parte dalla forma canonica di Kalman ottenuta al punto 1.a). La matrice $\bar{\mathbf{L}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte osservabile si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{L}} &= \mathbf{P}_c\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{42}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.25 \\ 0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

In questo caso si ha che $\mathbf{L}_c = \mathbf{K}_c^{\mathrm{T}}$ in quanto il polinomio caratteristico e il polinomio desiderato sono gli stessi del punto precedente. La matrice $\mathbf{L}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} l_1 \\ \beta \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{42}{8} \\ \beta \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{42}{8} + \beta \\ \frac{43}{8} \\ \frac{42}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.25 + \beta \\ 5.375 \\ 5.25 \end{bmatrix}$$

dove β è un parametro arbitrario.

2.a) Il sistema non è raggiungibile

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui il problema potrebbe non avere soluzioni. Per calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [2\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [4\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ occorre calcolare in quanti passi k lo stato $\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ è raggiungibile. Per $k = 1$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \notin \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}[\mathbf{B}]$$

Per $k = 2$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}]$$

Quindi la transizione richiesta è possibile in 2 passi. La sequenza cercata soddisfa la relazione:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

da cui si ha che la sequenza cercata è $u(0) = 0.5$, $u(1) = 2$.

2.b) Il sistema è completamente osservabile

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{E}^- = 0$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con l'evoluzione libera $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$ si determina risolvendo il seguente sistema lineae

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.c) Il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto. Il primo passo é quello di calcolare una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti la matrice $\mathbf{c}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{c}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Ma il sistema è già in questa forma, per cui la matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ può essere scelta coincidente con la matrice identità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{c} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato è quello di partenza partizionato in modo opportuno

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad \bar{\mathbf{b}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli. Utilizzando la formula di Ackerman si ottiene:

$$\mathbf{L} = -p(A)(\mathcal{O}^-)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}_{11}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{b}_1 + \mathbf{L}\mathbf{b}_2]u(k)$$

e cioè

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

3) La matrice di trasferimento assegnata può essere riscritta nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{s+3}{s^2} \\ \dfrac{2}{s+3} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2(s+3)} \begin{bmatrix} s^2+3s \\ s^2+6s+9 \\ 2s^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2(s+3)} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B_2} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_0} \right\}
\end{aligned}
$$

Una realizzazione completamente raggiungibile della matrice $\mathbf{G}(s)$ é la seguente:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{aligned}
\right.
$$

4) Calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ ed $\mathbf{H}$ del corrispondente sistema a segnali campionati sono:

$$
\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}
$$

e

$$
\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}
$$

Il sistema a segnali campionati ha quindi la seguente forma:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{aligned}
\right.
$$

Posto $T = 2$ si ottiene:

$$
\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}
$$

Primo compito di "Teoria dei Sistemi" - 17 Dicembre 2001 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1. Scrivere, in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

2. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione $n[\ \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$, scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno in catena "aperta":

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

3. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema tempo discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

   ⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è raggiungibile;

   ○ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;

   ○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è raggiungibile;

   ⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

4. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ 0 & \mathbf{A}_{33} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} & \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_3 & 0 \end{bmatrix} & \end{cases}$$

5. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ di un sistema lineare $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$

   ○ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto in $\mathrm{Im}\mathbf{B}$

   ⊗ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$

   ○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto in $\mathrm{Im}\mathbf{B}$

   ○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$

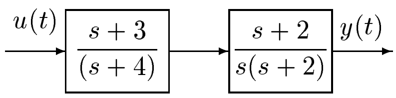
6. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

   ○ Il sistema è completamente raggiungibile;

   ⊗ Il sistema può essere completamente raggiungibile;

   ○ Il sistema è completamente osservabile.

   ⊗ Il sistema può essere completamente osservabile;



7. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$

   ⊗ le corrispondenti successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\tau)$ e $\mathbf{y}_2(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;

   ⊗ le corrispondenti evoluzioni libere $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$ e $\mathbf{y}_{l,2}(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;

   ⊗ se il vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

8. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1,\, \mathbf{B}_1,\, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2,\, \mathbf{B}_2,\, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di osservabilità $\mathcal{O}_1^-$ ed $\mathcal{O}_2^-$ esiste il legame:

   ○ $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_2^-$

   ○ $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}^{-\mathrm{T}}\mathcal{O}_2^-$

   ⊗ $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}^{-1}$

   ○ $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}^{-\mathrm{T}}$

9. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, l'insieme $\mathcal{X}^+(t)$ degli stati raggiungibili dall'origine nell'intervallo di tempo $[0,\, t]$:

   ⊗ è un sottospazio vettoriale;

   ○ dipendente dal tempo t;

   ⊗ coincide con l'insieme $\mathcal{X}^-(t)$ degli stati controllabili all'origine nell'intervallo di tempo $[0,\, t]$;

10. Una qualunque realizzazione "minima" di una matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$

   ○ è stabile;

   ⊗ è algebricamente equivalente a qualunque altra realizzazione minima;

11. Il seguente sistema lineare continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ posto in forma canonica di Jordan:

   ⊗ è osservabile;

   ○ non è osservabile;

   ⊗ è ricostruibile;

   ○ non è ricostruibile;

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

12. La formula di Ackerman per il calcolo del vettore $\mathbf{k}$ di una retroazione statica che posiziona ad arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

   ○ per qualunque sistema dinamico lineare;

   ⊗ solo se il sistema è raggiungibile;

   ○ solo se il sistema è osservabile;

   ⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

13. Sia dato un sistema raggiungibile e osservabile. Il sistema complessivo che si ottiene retroazionando il sistema originario con un "regolatore" (cioè la cascata di uno stimatore asintotico dello stato e di un elemento statico di retroazione K)

   ⊗ è un sistema osservabile;

   ○ è un sistema raggiungibile;

   ○ è un sistema raggiungibile ed osservabile;

14. Una retroazione statica dello stato

   ○ modifica gli zeri del sistema di partenza;

   ⊗ modifica i poli del sistema di partenza;

   ○ modifica il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ del sistema di partenza;