Primo compito di "Teoria dei Sistemi" - 9 Novembre 2000 - Esercizi

1. Sia $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico di una matrice $\mathbf{A}$ ciclica rispetto al vettore $\mathbf{b}$. Scrivere la struttura delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{b}}$ che si ottengono portando il sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ in forma compagna.

2. Mostrare come si calcola la catena di autovettori generalizzati associati ad un autovalore λ avente grado ν sia nel polinomio minimo che nel polinomio caratteristico.

3. Dato il *movimento* di un sistema dinamico $\psi(t, \bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i), \bar{u}(.))$, dove $\bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i)$ e $\bar{u}(.)$ sono, rispettivamente, istante iniziale, stato iniziali e funzione di ingresso, enunciare la definizione di stabilità di tale movimento rispetto a perturbazioni dello stato iniziale (secondo Lyapunov).

4. Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da: 1) due autovalori coincidenti $\lambda_{1,2} = -1$ a cui corrisponde un solo autovettore reale; 2) due autovalori coincidenti $\lambda_{1,2} = 2$ a cui corrispondono die autovettori reali; 3) due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

5. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera dei seguenti sistemi autonomi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t); \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t); \qquad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

6. Dato il seguente sistema lineare continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

   a) Determinare l'evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [1,\ -2]^{\mathrm{T}}$.
   b) Determinare l'evoluzione forzata dell'uscita $y(t)$ in risposta al gradino unitario in ingresso $u(t) = 1$.

7. Sia dato il seguente sistema non lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 \\ \dot{x}_2 & = \sin x_1 - u(t)\cos x_1 \end{cases}$$

   (a) Linearizzare il sistema non lineare nell'intorno dell'origine. Calcolare le matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ del corrispondente sistema lineare essendo $u(t)$ l'ingresso, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ lo stato e $y(t) = x_1$ l'uscita.
   (b) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dell'origine utilizzando il criterio ridotto di Lyaponov.
   (c) Facendo riferimento al sistema lineare $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$, calcolare l'evoluzione libera dello stato $\mathbf{x}(t)$ a patire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

8. Dato il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

   Calcolare la matrice $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan.

Primo compito di "Teoria dei Sistemi" - 9 Novembre 2000 - Soluzione degli esercizi

1. La struttura delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{b}}$ che si ottengono portando il sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ in forma compagna.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. *Si determina l'unico autovettore* $\mathbf{v}$ *associato all'autovalore* λ*:*

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = 0$$

e poi si determina la catena di autovettori generalizzati risolvendo in modo ricorsivo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 \\ \qquad \vdots & \quad \vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_\nu &= \mathbf{v}_{\nu-1} \end{cases}$$

3. *Un movimento* $\psi(t, \bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i), \bar{u}(.))$ *è stabile secondo Lyapunov se* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tale che per tutti gli stati iniziali* $x(\bar{t}_i)$ *tali che*

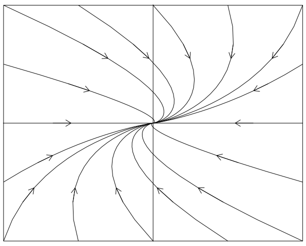
$$||x(\bar{t}_i) - \bar{x}(\bar{t}_i)|| < \delta$$

si ha che

$$||\psi(t, \bar{t}_i, x(\bar{t}_i), \bar{u}(.)) - \psi(t, \bar{t}_i, \bar{x}(\bar{t}_i), \bar{u}(.))|| < \epsilon, \qquad \forall t \geq \bar{t}_i$$

4. *Ad autovalori coincidenti caratterizzati da un solo autovettore reale corrispondono gli andamenti mostrati in figura:*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t} \mathbf{x}_0$$



5.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t & 0 \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

6. Esercizio

   (a) Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente:

$$det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

La matrice $\mathbf{A}$ ha un solo autovalore $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica 2. A tale autovalore corrisponde un solo autovettore $\mathbf{v}_1$ che si determina risolvendo il seguente sistema omogeneo:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{o} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Un autovettore generalizzato del secondo ordine $\mathbf{v}_2$ si determina risolvendo il seguente sistema lineare:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1 \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione di coordinate $\mathbf{x}=\mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan è la seguente

$$\mathbf{T}=[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di stato $\overline{\mathbf{A}}$ del sistema trasformato ha la forma seguente:

$$\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera $x(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0=[1,\ -2]^{\mathrm{T}}$ si determina come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0=\mathbf{T}e^{\overline{\mathbf{A}}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-t}-te^{-t} \\ te^{-t}-2e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) L'evoluzione forzata $y(t)$ si determina in base alla relazione:

$$y(t)=\mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau=\mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(t-\tau)\,d\tau$$

Utilizzando il risultato ottenuto al punto precedente relativamente al calcolo dell'esponenziale di matrice si ha che

$$y(t)=\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-\tau}+\tau e^{-\tau} & \tau e^{-\tau} \\ -\tau e^{-\tau} & e^{-\tau}-\tau e^{-\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}d\tau=0$$

Quindi la risposta al gradino di questo sistema è identicamente nulla. Un modo alternativo per giungere allo stesso risultato è quello di utilizzare le trasformate di Laplace. La funzione di trasferimento del sistema è

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-A)^{-1}\mathbf{B} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=0
\end{aligned}$$

Siccome la funzione di trasferimento $G(s)$ è nulla, la risposta forzata del sistema è nulla anche per qualunque altro segnale di ingresso.

7. Soluzione dell'esercizio

(a) Quando $u=0$, l'unico punto di equilibrio del sistema è $\mathbf{x}=0$. Linearizzando nell'intorno di questo punto di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{(0,0)} \mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right]_{(0,0)} u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_1 + u \sin x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1 \end{bmatrix}_{(0,0)} u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

(b) Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono reali distinti:

$$\Delta_A(s) = s^2 - 1 = (s+1)(s-1) \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov il sistema è instabile nell'intorno dell'origine in quanto uno degli autovalori è instabile.

(c) Sia $\mathbf{T}$ la matrice degli autovettori del sistema:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$

Le due colonne $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ della matrice $\mathbf{T}$ sono gli autovettori associati, rispettivamente, all'autovalore $\lambda_1 = -1$ e all'autovalore $\lambda_2 = 1$. L'esponenziale della matrice $\mathbf{A}$ si calcola nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{T} e^{\bar{\mathbf{A}}} \mathbf{T}^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

L'evoluzione libera del sistema a partire da $\mathbf{x}(0)$ risulta quindi essere la seguente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{bmatrix}$$

8. Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono: $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$. Gli autovettori corrispondenti a $\lambda_1 = 1$ si determinano risolvendo il seguente sistema omogeneo:

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{o} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{1,2} = 0$$

In questo caso esistono due autovettori linearmente indipendenti:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'autovettore corrispondente a $\lambda_2 = -1$ si determina in modo analogo:

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}, \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essendo stati determinati 3 autovettori linearmente indipendenti, ne segue che la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile e che il polinomio minimo di $\mathbf{A}$ è

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

La matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ ha quindi la forma seguente

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ assumono la forma:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primo compito di "Teoria dei Sistemi" - 9 Novembre 2000 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ nel caso di sistemi dinamici discreti lineari tempo-varianti:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1)\ldots\mathbf{A}(h+1)\mathbf{A}(h) & \text{se } k > h \\ \mathbf{I} \text{ (Matrice identità)} & \text{se } k = h \end{cases}$$

2. Qual è la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ essendo $\mathbf{x}(t_9)$ lo stato all'istante iniziale t_0?

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

3. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato all'istante iniziale h.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-h}\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

4. Dare la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$ nel caso di sistemi dinamici tempo-continui lineari invarianti:

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

5. Sia λ un autovalore della matrice $\mathbf{A}$ con grado di molteplicità r. L'autospazio U_λ

   ○ ha dimensione pari ad r;
   ⊗ ha dimensione minore od uguale r;
   ⊗ è composto da tutti e soli gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$ associati all'autovalore λ;
   ⊗ è un sottospazio vettoriale invariante rispetto ad $\mathbf{A}$;

6. Una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n è diagonalizzabile

   ○ se e solo se ha n autovalori distinti;
   ⊗ se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti;
   ○ se e solo se il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico;
   ⊗ se e solo se gli autovalori sono radici semplici del polinomio minimo;
   ○ se e solo se gli autovalori sono radici semplici del polinomio caratteristico;
   ⊗ se e solo so i miniblocchi di Jordan hanno tutti dimensione unitaria;

7. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$:

   ⊗ è un divisore del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$;
   ○ ha lo stesso grado del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$;
   ⊗ ha le stesse radici del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$;

8. Siano $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ due matrici simili: $\mathbf{A} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$. Qualunque funzione di matrice $f(\mathbf{A})$ gode della proprietà

   ⊗ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}\, f(\overline{\mathbf{A}})\, \mathbf{T}^{-1}$;
   ○ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}^{-1}\, f(\overline{\mathbf{A}})\, \mathbf{T}$;
   ○ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{f}(T)\, f(\overline{\mathbf{A}})\, f(\mathbf{T}^{-1})$;

9. Gli elementi della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ di un sistema lineare di ordine n

   ○ sono funzioni razionali fratte in s a grado relativo $r \geq 0$;
   ⊗ sono funzioni razionali fratte in s a grado relativo $r \geq 1$;
   ○ sono polinomi in s di grado minore od uguale ad n;
   ○ sono polinomi in s di grado minore ad n;

10. Come è possibile calcolare la matrice di transizione dello stato $\mathbf{A}^k$ di un sistema discreto lineare stazionario utilizzando le $\mathcal{Z}$-trasformate?

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

11. Scrivere, per sistemi continui e per sistemi discreti, i *modi reali* associati ad una coppia di poli complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega = |\lambda|e^{j\theta}$:

tempo discreto	tempo continuo
$\|\lambda\|^k \cos(k\theta), \quad \|\lambda\|^k \sin(k\theta),$	$e^{\sigma t} \cos \omega t, \quad e^{\sigma t} \sin \omega t$

12. Dato un sistema lineare, stazionario, a tempo discreto, con n autovalori tutti reali e distinti. Allora:

   ⊗ La matrice di sistema è diagonalizzabile.
   ⊗ É possibile scomporre il sistema dato in n sottosistemi non interagenti.
   ⊗ Il polinomio minimo della matrice di sistema ha grado n.

13. Dato un sistema lineare autonomo, allora:

   ⊗ Se un movimento è stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, allora è stabile qualunque altro movimento e per qualunque altro stato iniziale.
   ⊗ Se un movimento è stabile rispetto a piccole perturbazioni dello stato iniziale, allora è stabile rispetto a perturbazioni di qualunque entità.
   ⊗ L'origine è sempre un punto di equilibrio.

14. Sia dato un sistema non–lineare, tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$. I punti di equilibrio di questo sistema si ottengono:

   ○ Risolvendo l'equazione $2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$, in $\mathbf{x}(k)$.
   ⊗ Determinando i punti $\mathbf{x}_e$ tali che $\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e)$.
   ⊗ I sistemi non–lineari possono non avere punti di equilibrio.

15. Per sistemi regolari tempo-varianti

   ○ gli stati di equilibrio di determinano imponendo ingressi costanti;
   ○ la stabilità è completamente determinata dalla posizione degli autovalori della matrice di sistema $\mathbf{A}(t)$;
   ⊗ la stabilità è completamente determinata dalla norma della matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$;

16. Indicare quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno dell'origine:

   ○ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^4$;
   ○ $V(x_1, x_1) = x_1^3 + x_2^3$;
   ○ $V(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)$;
   ⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$;