Teoria dei Sistemi - Primo Compito
13 Novembre 2002 - Esercizi
Compito Nr. $\boxed{a =}$ $\boxed{b =}$

Nome:			
Nr. Mat.			
Firma:			
C.L.:	Info.	Elet.	Telec.

1. Sia dato il seguente sistema lineare continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$]:

$$\left\{ \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} b-a & b & -a \\ a & 0 & a \\ -b & -b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \right.$$

   a) Portare il sistema in forma compagna calcolando anche la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$;
   b) Disegnare lo schema a blocchi (o il grafo a flusso di segnale) corrispondente alla forma compagna determinata.
   c) Determinare tutti i punti di equilibrio del sistema nel caso di ingresso costante $u(t) = 0$;
   d) Portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma canonica di Jordan;
   e) Calcolare il polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$;
   f) Calcolare la matrice di transizione dello stato del sistema dato;
   g) Per ogni coppia di autovalori della matrice $\mathbf{A}$ determinare una base del corrispondente sottospazio vettoriale dove agiscono gli autovalori e mostrare (con un grafico qualitativo) qual è l'andamento delle traiettorie nel sottospazio determinato.

2. Si consideri il seguente sistema non-lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^5(t)\, x_2(t) - a\, x_1^5(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)\, x_2^5(t) - b\, x_2^5(t) \end{cases}$$

   a) Calcolare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilià utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;
   b) Se necessario, per concludere lo studio di stabilità del punto precedente, si utilizzi la seguente funzione di Lyapunov: $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

3. Dato il seguente sistema non–lineare tempo–discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k)\, \cos[a\, x_1(k)] \\ x_2(k+1) = -\, x_1(k)\, \cos[b\, x_2(k)] \end{cases}$$

   a) Si verifichi che l'origine punto di equilibrio per il sistema e si studi la stabilità di tale punto utilizzando il teorema ridotto di Lyapunov;
   b) Eventualmente si concluda lo studio di stabilità utilizzando la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ed il criterio di La Salle–Krasowskii.

4. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera dei seguenti sistemi autonomi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t); \qquad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k); \qquad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \mathbf{x}(0); \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \mathbf{x}(0); \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \mathbf{x}(0);$$

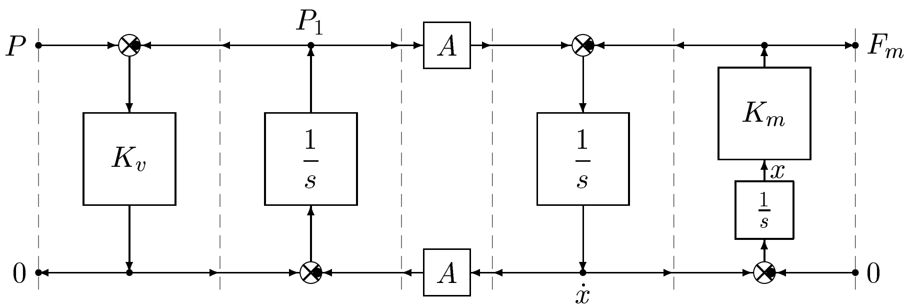
5. Una matrice **A** è stata portata nella seguente forma diagonale **D** utilizzando la seguente trasformazione complessa **T**:

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma+j\,\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma+j\,\omega & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma-j\,\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma-j\,\omega \end{array}\right], \qquad \mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1-j & 1 & -1+j \\ 1+j & 2+3j & 1-j & 2-3j \\ 2j & -4+j & -2j & -4-j \\ 3 & 1-j & 3 & 1+j \end{array}\right]$$

Qual è la matrice di trasformazione $\overline{\mathbf{T}}$ che porta la matrice **A** in forma "reale" di Jordan? Qual è la corrispondente forma "reale" di Jordan $\mathbf{J}_R$ della matrice **D**?

$$\overline{\mathbf{T}} = \left[\qquad \qquad \right], \qquad \mathbf{J}_R = \left[\qquad \qquad \right]$$

6. Sia dato il seguente schema a blocchi:



Scegliendo $\mathbf{x} = \left[\begin{array}{ccc} P_1 & \dot{x} & x \end{array}\right]^{\mathrm{T}}$ come vettore di stato, scrivere le equazioni dinamiche del sistema nello spazio degli stati nel caso in cui $u = P$ sia l'ingresso ed $y = F_m$ l'uscita:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} \dot{P}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{x} \end{array}\right]}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\left[\qquad \qquad \right]}_{\mathbf{A}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{array}\right]}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\left[\qquad \right]}_{\mathbf{B}} \underbrace{P}_{\mathbf{u}}$$

$$y = \underbrace{\left[\qquad \qquad \right]}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

7. Scrivere in modo simbolico la soluzione esplicita (evoluzione libera + evoluzione forzata) del sistema lineare discreto tempo variante $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ nell'intervallo di tempo $[h,\ k]$:

$$\mathbf{x}(k) =$$

dove

$$\mathbf{\Phi}(k,h) =$$

Teoria dei Sistemi - Primo Compito
13 Novembre 2002 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec.

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1. Sia data l'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Essendo $\mathbf{x}(t_0)$ lo stato all'istante iniziale t_0, qual è la sua soluzione generale?

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

2. Per una matrice $\mathbf{A}$ di ordine n la molteplicità *geometrica* r di un autovalore λ

   ○ è la dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato con l'autovalore;
   ○ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$;
   ○ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$;
   ⊗ è la dimensione dell'autospazio U_λ;

3. Siano $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ due matrici simili: $\mathbf{A} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$. Per qualunque funzione di matrice $f(\mathbf{A})$ è vero che:

   ○ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}^{-1}\, f(\overline{\mathbf{A}})\, \mathbf{T}$;
   ⊗ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}\, f(\overline{\mathbf{A}})\, \mathbf{T}^{-1}$;
   ○ $f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{T})\, f(\overline{\mathbf{A}})\, f(\mathbf{T}^{-1})$;
   ○ $f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}^{-1}\, f(\overline{\mathbf{A}})$;

4. In un sistema lineare, stazionario, discreto, con n autovalori distinti tutti reali negativi:

   ⊗ è possibile portare la matrice di stato del sistema nella forma di Jordan;
   ○ il sistema è stabile;
   ⊗ la matrice di stato del sistema è diagonalizzabile;
   ○ il sistema è asintoticamente stabile;

5. Sia $y(t) = \eta(t, x(t))$ la funzione di uscita di sistema dinamico:

   ⊗ è un sistema tempo-variante;
   ○ è un sistema stabile;
   ⊗ è un sistema strettamente causale;
   ○ è un sistema autonomo;

6. Per una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n il grado di molteplicità di un autovalore λ nel polinomio minimo:

   ⊗ è sempre minore od uguale al grado di molteplicità dell'autovalore nel polinomio caratteristico;
   ⊗ è sempre pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato a quel autovalore;
   ○ è sempre pari al numero di miniblocchi di Jordan associati a quel autovalore;
   ○ è sempre pari al numero di autovettori linearmente indipendenti associati a quel autovalore;

7. Sia dato un sistema lineare stazionario autonomo. Allora:

   ⊗ se un movimento è stabile rispetto a piccole perturbazioni dello stato iniziale, allora è stabile anche rispetto a perturbazioni di qualunque entità.

   ⊗ se un movimento è stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, allora è stabile qualunque altro movimento e per qualunque altro stato iniziale.

   ⊗ l'origine è sempre un punto di equilibrio per il sistema.

   ○ l'origine non è mai un punto di equilibrio per il sistema.

8. Una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n è diagonalizzabile

   ○ se e solo se ha n autovalori reali distinti;

   ⊗ se ha n autovettori linearmente indipendenti;

   ⊗ se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti;

   ○ se e solo se il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico;

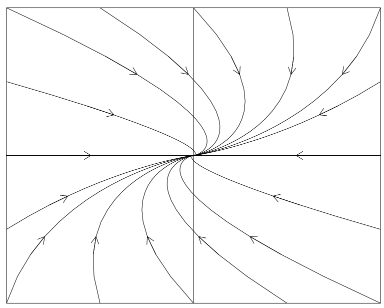
   ⊗ se è una matrice simmetrica;

   ⊗ se gli autovalori sono radici semplici del polinomio caratteristico;

9. Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori coincidenti $\lambda_{1,2} = -5$ a cui corrisponde un solo autovettore reale, per esempio $\mathbf{v} = [1,\ 1]^{\mathrm{T}}$.

   Ad autovalori coincidenti caratterizzati da un solo autovettore reale corrispondono (rispetto alla base canonica di Jordan) gli andamenti mostrati in figura:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} t}\mathbf{x}_0$$



10. Sia $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ un sistema non lineare autonomo e sia $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ il corrispondente sistema linearizzato nel punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$. In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che in $\mathbf{x} = 0$:

    ○ se gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono tutti a parte reale negativa o nulla il sistema è stabile;

    ⊗ se gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono tutti a parte reale negativa il sistema è asintoticamente stabile;

    ○ se la matrice $\mathbf{A}$ ha autovalori immaginari con grado di molteplicità maggiore o uguale a due, allora il sistema è instabile;

11. Indicare quali di queste funzioni sono definite positive nell'intorno dell'origine:

    ○ $V(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1^4 - x_2^2 + x_2^4;$

    ⊗ $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1^4 + x_2^2 - x_2^4;$

    ○ $V(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_1^4 - x_3^2 + x_2^4;$

    ○ $V(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^4 + x_3^2 - x_2^4;$

    ○ $V(x_1, x_2) = x_1^6 - x_1^4 + x_2^6 - x_2^4;$

12. Dato il sistema lineare tempo continuo $\dot{x}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$, scrivere la trasformata di Laplace $\mathbf{Y}(s)$ del vettore di uscita $\mathbf{y}(t)$ in funzione della trasformata di Laplace $\mathbf{U}(s)$ del vettore di ingresso $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

Primo compito di "Teoria dei Sistemi" - 13 Novembre 2002 - Soluzione degli esercizi

1. Sia dato il seguente sistema lineare continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)]$:

$$\left\{ \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} b-a & b & -a \\ a & 0 & a \\ -b & -b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \right.$$

1.a) La matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica è:

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+ = [\ \mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 2\,b-a & 2\,b^2+a^2 \\ 1 & a & -a^2 \\ 0 & -2\,b & -2\,b^2 \end{bmatrix}$$

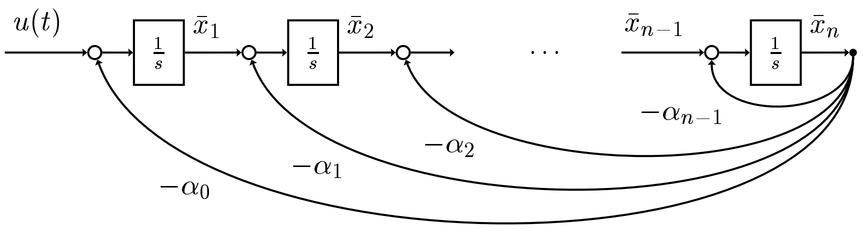
Il polinomio caratteristico del sistema è:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s(s+a)(s-b) = s^3 + (a-b)s^2 - a\,b\,s$$

La forma compagna del sistema assegnato è la seguente:

$$\left\{ \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a\,b \\ 0 & 1 & b-a \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \right.$$

1.b) Il grafo a flusso di segnale corrispondente alla forma compagna trovata è il seguente:



1.c) I punti di equilibrio del sistema nel caso di ingresso costante $u(t) = 0$ coincidono con i punti dell'autospazio associato all'autovalore nullo, cioè sono i punti $\mathbf{x}_0$ che appartengono al kernel della matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} b-a & b & -a \\ a & 0 & a \\ -b & -b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.d) Per portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma canonica di Jordan occorre calcolare la corrispondente matrice di trasformazione $\mathbf{T}$. Per calcolare tale matrice occorre calcolare gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$ corrispondenti agli autovalori $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = b$ e $\lambda_3 = 0$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b & b & -a \\ a & a & a \\ -b & -b & a \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -a & b & -a \\ a & -b & a \\ -b & -b & -b \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b-a & b & -a \\ a & 0 & a \\ -b & -b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ assume quindi la forma seguente:

$$\mathbf{T} = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma canonica di Jordan del sistema dato è la seguente ($\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$):

$$\left\{ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \right.$$

1.e) Il polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$ coincide con il polinomio caratteristico in quanto gli autovalori hanno tutti grado di molteplicità unitario:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = m(\lambda) = s(s+a)(s-b)$$

1.f) La matrice di transizione dello stato del sistema dato coincide con l'esponenziale della matrice $\mathbf{A}$:

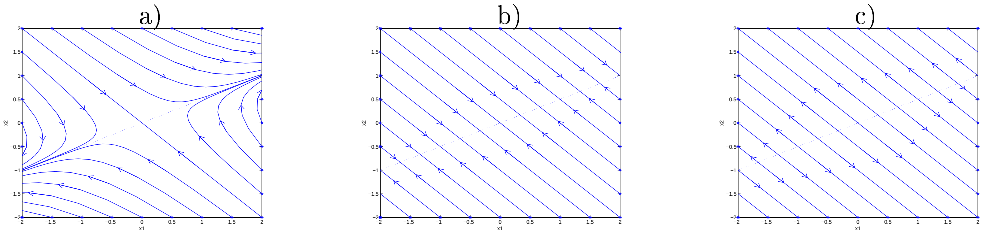
$$\Phi(t,\, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{T}\, e^{\mathbf{A}_J(t-t_0)}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-a(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{b(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.g) Gli autovalori e gli autovettori del sistema sono i seguenti:

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = b, \quad \lambda_3 = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alla coppia di autovalori $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = b$ è associato il sottospazio $\beta_{1,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ e l'andamento delle traiettorie mostrato nel grafico a). Alla coppia di autovalori $\lambda_1 = -a$, $\lambda_3 = 0$ è associato il sottospazio $\beta_{1,3} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ e l'andamento delle traiettorie mostrato nel grafico b). Alla coppia di autovalori $\lambda_2 = b$, $\lambda_3 = 0$ è associato il sottospazio $\beta_{2,3} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ e l'andamento delle traiettorie mostrato nel grafico c).

a) b) c)



2.a) I punti di equilibrio si determinano imponendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$, cioè:

$$\begin{cases} 0 = x_1^5\, x_2 - a\, x_1^5 \\ 0 = x_1\, x_2^5 - b\, x_2^5 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x_1^5\,(x_2 - a) = 0 \\ x_2^5\,(x_1 - b) = 0 \end{cases}$$

I due possibili punti di equilibrio sono:

$$(x_1,\, x_2) = (0,\, 0), \qquad\qquad (x_1,\, x_2) = (b,\, a)$$

Lo Jacobiano del sistema nel punto $(0,\, 0)$ vale:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 5x_1^4\, x_2 - 5\, a\, x_1^4 & x_1^5 \\ x_2^5 & 5\, x_1\, x_2^4 - 5\, b\, x_2^4 \end{bmatrix}_{(x_1,\, x_2)=(0,\, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo Jacobiano J_0 presenta due autovalori nell'origine per cui il criterio ridotto di Lyapunov non può essere utilizzato. Nel punto $(b,\, a)$, lo Jacobiano del sistema vale:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 5x_1^4\, x_2 - 5\, a\, x_1^4 & x_1^5 \\ x_2^5 & 5\, x_1\, x_2^4 - 5\, b\, x_2^4 \end{bmatrix}_{(x_1,\, x_2)=(b,\, a)} = \begin{bmatrix} 0 & b^5 \\ a^5 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo Jacobiano J_1 presenta un autovalore stabile $\lambda = -a^2 b^2 \sqrt{a\, b}$ e uno instabile $\lambda = a^2 b^2 \sqrt{a\, b}$ per cui in base al criterio ridotto di Lyapunov il sistema non lineare è instabile nell'intorno del punto di equilibrio $(b,\, a)$.

2.b) Per concludere lo studio di stabilità del punto di equilibrio $(0,\, 0)$ si utilizza la funzione di Lyapunov data

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Nell'intorno di tale punto la funzione $V(x_1, x_2)$ è definita positiva. La sua derivata temporale è:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \cdot \dot{\mathbf{x}} = x_1^6(x_2 - a) + x_2^6(x_1 - b) \simeq -a\, x_1^6 + -b\, x_2^6 < 0$$

Nell'intorno del punto $(0,\, 0)$ la funzione $\dot{V}(x_1, x_2)$ è definita negativa, per cui il punto $(0,\, 0)$ è localmente asintoticamente stabile.

3.a) Chiaramente l'origine è un punto di equilibrio per il sistema, infatti soddisfa le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_1(k) = x_2(k)\cos[a\,x_1(k)] \\ x_2(k) = -x_1(k)\cos[b\,x_2(k)] \end{cases} \quad \rightarrow \quad [x_1(k) = x_2(k) = 0] \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Lo Jacobiano del sistema è:

$$J(x_1,\,x_2) = \begin{bmatrix} -a\,x_2\sin(a\,x_1) & \cos(a\,x_1) \\ -\cos(b\,x_2) & b\,x_1\sin(b\,x_2) \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\,0) = \begin{bmatrix} -a\,x_2\sin(a\,x_1) & \cos(a\,x_1) \\ -\cos(b\,x_2) & b\,x_1\sin(b\,x_2) \end{bmatrix}_{(0,\,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm j$ sono sul cerchio unitario per cui il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace per studiare la stabilità del punto.

3.b) Se si utilizza la funzione canditata di Lyapunov $V(x_1,\,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ si ottine:

$$\Delta V(x_1,\,x_2) = -x_1^2[1-\cos^2(b\,x_2)] - x_2^2[1-\cos^2(a\,x_1)] \le 0$$

Essendo ΔV semidefinita negativa, si può concludere che il sistema è almeno semplicemente stabile nell'interno dell'origine. L'insieme $\mathcal{N}$ dei punti per cui $\Delta V = 0$ coincide con l'insieme dei punti che si trovano sugli assi coordinati:

$$\mathcal{N} = \{x_1 = 0,\; x_2 \in R\} \cup \{x_2 = 0,\; x_1 \in R\}$$

Tutti gli stati iniziali appartenenti all'insieme $\mathcal{N}$ generano delle traiettorie completamente contenute in $\mathcal{N}$. Infatti, partendo per $k = 0$ dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = (0,\,x_0)$ si ottiene la seguente evoluzione libera $\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{x}(0) = (0,\,x_0) \;\rightarrow\; \mathbf{x}(1) = (x_0,\,0) \;\rightarrow\; \mathbf{x}(2) = (0,\,x_0) \;\rightarrow\; \mathbf{x}(3) = (x_0,\,0) \;\rightarrow\; \mathbf{x}(4) = (0,\,x_0) \;\rightarrow\; \ldots$$

Analoga evoluzione libera si ottiene partendo dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = (x_0,\,0)$. Si può quindi affermare che l'origine è un punto di equilibrio "semplicemente" stabile.

4) L'evoluzione libera dei seguenti sistemi autonomi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t); \qquad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k); \qquad \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k)$$

è la seguente. Nei primi 2 casi si ha:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t & t\,e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & t\,e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}\mathbf{x}(0); \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 4^k & k\,4^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\,4^{k-2} \\ 0 & 4^k & k\,4^{k-1} \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}\mathbf{x}(0);$$

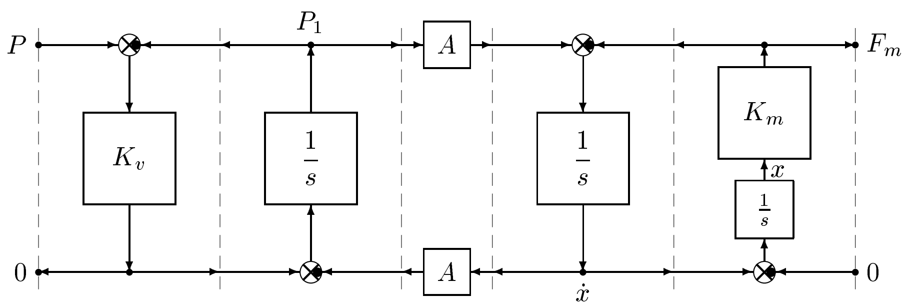
Nel terzo caso, posto $A = \sqrt{13}$ e $\varphi = \arctan(3/2)$ si ha:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} A^k\cos(k\varphi) & -A^k\sin(k\varphi) & 0 \\ A^k\sin(k\varphi) & A^k\cos(k\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{bmatrix}\mathbf{x}(0)$$

5) La matrice di trasformazione $\overline{\mathbf{T}}$ che porta la matrice $\mathbf{A}$ in forma "reale" di Jordan e la corrispondente forma "reale" di Jordan $\mathbf{J}_R$ sono le seguenti:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{J}_R = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right]$$

6) Sia dato il seguente schema a blocchi:



Le equazioni dinamiche del sistema nello spazio degli stati nel caso in cui $u = P$ sia l'ingresso ed $y = F_m$ l'uscita sono le seguenti:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -K_v & -A & 0 \\ A & 0 & -K_m \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{P}_{\mathbf{u}}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

7) Scrivere in modo simbolico la soluzione esplicita (evoluzione libera + evoluzione forzata) del sistema lineare discreto tempo variante $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ nell'intervallo di tempo $[h,\ k]$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k,h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)$$

dove

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1)\ldots\mathbf{A}(h+1)\mathbf{A}(h) & \text{se } k > h \\ \mathbf{I} \text{ (Matrice identità)} & \text{se } k = h \end{cases}$$