

Esercizi

1. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

- 1.a) Calcolare gli autovalori del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ del sistema. Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{k}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;
- 1.b) Calcolare gli autovalori del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

- 1.a) La matrice di raggiungibilità del sistema dato è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Posto $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$, il sistema trasformato che si ottiene ha la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio $\mathcal{X}^+$ sono gli autovalori della sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$, cioè $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile è $\lambda = -1$, quindi un autovalore stabile. È quindi possibile determinare una retroazione dello stato $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo. Il vettore $\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ che posiziona in -2 gli autovalori della parte raggiungibile si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \bar{\mathbf{b}}_1 \bar{\mathbf{k}}}(s) &= \det[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{1,1} - \bar{\mathbf{b}}_1 \bar{\mathbf{k}}] = \begin{vmatrix} s - k_1 & -k_2 \\ -3 & s - 3 \end{vmatrix} \\ &= (s - 3)(s - k_1) - 3k_2 = s^2 - (3 + k_1)s + 3k_1 - 3k_2 \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \bar{\mathbf{b}}_1 \bar{\mathbf{k}}}(s) = (s + 2)^2 = s + 4s + 4$$

occorre utilizzare il vettore

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{25}{3} \end{bmatrix}$$

Il vettore dei guadagni $\mathbf{k}$ si ottiene applicando la trasformazione inversa

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}} & k_3 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -\frac{25}{3} & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + k_3 & -7 & k_3 \end{bmatrix}$$

1.b) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è instabile, $\lambda = 3$, per cui non esiste nessun osservatore asintotico dello stato.

2. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ in modo che il sistema retroazionato $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$ sia di tipo "dead-beat";

2.b) Per il sistema dato si costruisca, se possibile, uno stimatore dead beat di ordine ridotto.

2.a) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è non singolare ($\det \mathcal{R}^+ = -1$) per cui il sistema è completamente raggiungibile. Esiste quindi una retroazione statica dello stato $u(k) = \mathbf{k}\mathbf{x}(k)$ che posiziona a piacere i poli del sistema retroazionato. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z-1 & -1 & 0 \\ 0 & z-1 & -1 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$$

Il polinomio caratteristico desiderato per il sistema retroazionato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{bk}}(z) = z^3$$

La matrice $\mathbf{k}$ si determina, per esempio, utilizzando la formula $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Un modo alternativo per calcolare il vettore $\mathbf{k}$ è quello di utilizzare la formula di Ackermann:

$$\mathbf{k} = -\mathbf{q}(\mathcal{R}^+)^{-1}p(\mathbf{A}) = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1} \mathbf{A}^3$$

dove $p(z)$, in questo caso $p(z) = z^3$, è il polinomio caratteristico desiderato. Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.b) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è non singolare, il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto. Il primo passo è quello di calcolare una

matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti la matrice $\mathbf{c}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{c}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \mathbf{c} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array} \right] \rightarrow \mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array} \right]$$

Il sistema trasformato $[\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{b}}u(k), y(k) = \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{x}}(k)]$ è

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] u(k) \\ y(k) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{array} \right.$$

Le matrici $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ vengono partizionate come segue

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \end{array} \right], \quad \bar{\mathbf{b}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array} \right], \quad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \left[\begin{array}{cc} 1 & l_1 \\ 1 & 1 + l_2 \end{array} \right]$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}}(z) = (z-1)(z-1-l_2) - l_1 = z^2 - (2+l_2)z + 1 + l_2 - l_1$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \right]$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{P} \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{array} \right]$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{b}_1 + \mathbf{L}\mathbf{b}_2]u(k)$$

e cioè

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right] \hat{\mathbf{v}}(k) + \left[\begin{array}{c} -2 \\ -3 \end{array} \right] y(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right] u(k)$$

3. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(k+1) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] u(k) \\ y(k) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(k) = \left[\begin{array}{c} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{array} \right]$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

3.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

3.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

3.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(k+1) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

3.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 2 \\ l_2 - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ è

$$\Delta(z) = (z - l_1)(z - 1) - 2(l_1 - 1) = z^2 - (l_1 + 1)z + l_1 + 2 - 2l_2$$

Imponendo $\Delta(z) = z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0.5 - l_3 \\ -1 - l_3 \end{bmatrix}$$

4. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $\mathbf{u}(t)$ il segnale d'ingresso.

4.a) Calcolare i sottospazi raggiungibili con il solo ingresso u_1 , con il solo ingresso u_2 oppure con entrambi gli ingressi. Si dica se il sistema è stabilizzabile con retroazione dello stato tramite un solo ingresso o con entrambi gli ingressi.

4.b) Utilizzando il lemma di Heymann applicato al primo ingresso, si calcoli, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

4.a) I sottospazi di raggiungibilità del sistema rispetto al primo e al secondo ingresso sono

$$\mathcal{X}_{b_1}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{X}_{b_2}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è raggiungibile utilizzando un solo ingresso. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^3 - 3s^2 + 3s - 1 = (s - 1)^3$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono quindi tutti instabili, $\lambda_{1,2,3} = 1$, per cui se si utilizza un solo ingresso, la parte non raggiungibile è sicuramente instabile. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione dello stato che utilizzi un solo ingresso. Utilizzando entrambi gli ingressi, il sottospazio di raggiungibilità del sistema è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile per cui esiste una matrice $\mathbf{K}$ di retroazione dello stato tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato.

4.b) Appliciamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante il primo ingresso. Le matrici $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{M}_1$ hanno la seguente struttura

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} b_1 & \mathbf{A}b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & e_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema che si ottiene retroazionato la matrice $\mathbf{M}_1$ è il seguente

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_1} = s^3 - 3s^2 + 2s = s(s-1)(s-2)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}} = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{K}_1$ che impone al sistema retroazionato gli autovalori desiderati è

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -20 & -14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di retroazione complessiva è quindi

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -20 & -14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

5.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

5.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

5.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

- 5.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = (z - l_1)z - (l_2 + 1) = z^2 - l_1z - l_2 - 1$$

Imponendo $\Delta(z) = z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -0.25 + \alpha \end{bmatrix}$$

6. Si consideri il seguente sistema lineare, stazionario discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $\mathbf{y}(k)$ il vettore di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

- 6.a) Utilizzando l'ingresso $u(k)$ e la sola seconda uscita $y_2(k)$, si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato di ordine ridotto di tipo dead-beat.
- 6.b) Si risolva lo stesso problema del punto precedente (stimatore dead-beat di ordine ridotto) utilizzando l'ingresso $u(k)$ ed entrambe le uscite del sistema.

6.a) La matrice di osservabilità del sistema rispetto alla seconda uscita è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore di ordine ridotto. D'altra parte il sistema è già nella forma più idonea per la sintesi dell'osservatore di ordine ridotto

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ siano entrambi nulli

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 + l_1 \\ 1 & 2 + l_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = z(z - 2 - l_2) + 1 - l_1 = z^2 - (2 + l_2)z + 1 - l_1$$

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(k) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(k) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(k)$$

e cioè

$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

6.b) Anche nel caso in cui si utilizzino entrambe le uscite, il sistema è già nella forma opportuna per la sintesi dell'osservatore di ordine ridotto

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

La matrice $\mathbf{L}$ deve essere scelta in modo che l'unico autovalore della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ sia nullo

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \end{bmatrix}$$

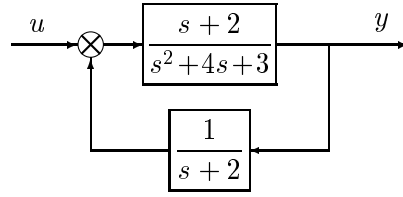
La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & l_2 \end{bmatrix} \quad \forall l_2 \in \mathcal{R}$$

Posto $l_2 = 0$, l'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} v(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad v(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} y(k)$$

7. Fornire una realizzazione del seguente sistema retroazionato:



Verificare numericamente se il sistema è raggiungibile e/o osservabile.

7.Sol. Facendo riferimento alle realizzazioni canoniche di raggiungibilità per i sottosistemi $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$, il sistema retroazionato $\mathcal{S}$ assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} \right] \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

I singoli sottosistemi sono raggiungibili e osservabili. Il sistema complessivo non è ne raggiungibile, ne osservabile in quanto vi è una cancellazione tra il numeratore di $\mathcal{S}_1$ e il denominatore di $\mathcal{S}_2$. Infatti, le matrici di raggiungibilità e osservabilità del sistema $\mathcal{S}$ sono singolari:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{R}^+ = 0$$

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 8 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{O}^- = 0$$

8. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

- 8.a) Portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità. Calcolare gli autovalori del sottospazio non raggiungibile.
- 8.b) Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;
- 8.c) Portare il sistema nella forma standard di osservabilità. Calcolare gli autovalori del sottospazio non osservabile.
- 8.d) Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

8.a) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sia $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$. Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ sono: $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile del sistema è $\lambda = -1$.

8.b) Siccome la parte non raggiungibile è stabile, esiste quindi una retroazione dello stato $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo e tale da posizionare in -2 gli autovalori della parte raggiungibile. Per calcolare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ che, nella forma standard di raggiungibilità, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(\lambda) = \lambda^2 - 1 \quad \Delta_{\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1\tilde{\mathbf{K}}}(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

La matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 - \alpha & -4.5 - \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

8.c) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det \mathcal{O}^- = 0$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è singolare, il sistema non è completamente osservabile. Per portare il sistema nella forma standard di osservabilità è possibile utilizzare la seguente matrice di trasformazione:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right.$$

La parte non osservabile del sistema è caratterizzata da un autovalore stabile $\lambda = -1$ per cui è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato sia di ordine pieno che di ordine ridotto.

8.d) Il progetto dell'osservatore di ordine ridotto parte dal calcolo una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti la matrice $\mathbf{C}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \mathbf{C} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene assume la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right.$$

Al punto precedente abbiamo visto che il sistema non è completamente osservabile e certamente la parte non osservabile non è quella relativa alla variabile x_3 perchè tale variabile coincide esattamente con il segnale di uscita $y(t)$. Ne segue che la parte non osservabile è quella relativa alla coppia di matrici $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21})$. Se infatti si calcola la matrice di osservabilità di questa sottoparte, si trova una matrice singolare:

$$\mathcal{O}_1^- = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi nel progetto dell'osservatore di ordine ridotto, la matrice $\mathbf{L}$ non potrà spostare l'autovalore $\lambda = -1$ della parte non osservabile, ma potrà agire solamente sull'autovalore della parte osservabile posizionandolo, come richiesto in -2.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -1 - 2l_1 & 2l_1 \\ -2 - 2l_2 & 1 + 2l_2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$ è:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= (\lambda + 1 + 2l_1)(\lambda - 1 - 2l_2) + 2l_1(2 + 2l_2) \\ &= \lambda^2 - 1 - 4l_1l_2 + 2l_1(\lambda - 1) - 2l_2(\lambda + 1) + 4l_1 + 4l_1l_2 \\ &= \lambda^2 - 1 + 2l_1\lambda - 2l_1 - 2l_2\lambda - 2l_2 + 4l_1 \\ &= \lambda^2 - 1 + 2(l_1\lambda - 2l_2\lambda - 2l_2 + 2l_1)\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza con il polinomio desiderato:

$$d(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

si ottiene:

La soluzione cercata è quindi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(t) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(t)$$

e cioè

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

9. Scrivere una realizzazione completamente osservabile della seguente matrice di trasferimento:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}, & \frac{s+3}{s^2}, & \frac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

9.Sol. La matrice di trasferimento assegnata può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s+1}{s^2} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2(s+1)} \begin{bmatrix} s^2 + s & s^2 + 2s + 1 & 2s^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2(s+1)} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{B_2} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_0} \right\}\end{aligned}$$

Una realizzazione completamente osservabile della matrice $\mathbf{G}(s)$ è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

10. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{dove:} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

- 10.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori dei 4 sottosistemi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ e $\mathcal{S}_4$.
- 10.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -4 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.
- 10.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine intero (pieno) che posizioni in -4 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.
- 10.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im} \mathcal{R}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \ker \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & -10 & 10 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathbf{X}_2 = \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio è nullo in quanto il vettore che genera $\mathcal{E}^-$ non è combinazione lineare dei vettori di base del sottospazio $\mathcal{X}^+$, infatti la seguente matrice ha rango pieno

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{B}_2 = \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \{0\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = 0, \quad \mathcal{B}_3 = 0, \quad \mathcal{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è basata sulla matrice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \mathbf{C} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il sistema dato è composto da una parte raggiungibile e osservabile $\mathcal{S}_1$ di dimensione 2 e da una parte non raggiungibile e non osservabile $\mathcal{S}_4$ di dimensione 1.

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{S}_4 = \{\mathbf{A}_{44}, 0, 0\} = \{-1, 0, 0\}$$

Gli autovalori della parte $\mathcal{S}_1$ sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. L'autovalore della parte $\mathcal{S}_4$ è $\lambda = -1$.

- 10.b) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -4 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1 \mathbf{K}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(s) = s^2 - 1 \quad \Delta_{\mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_1 \tilde{\mathbf{K}}}(s) = (s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

La matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -8 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{7}{4} & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{4} - \alpha & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} + \alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

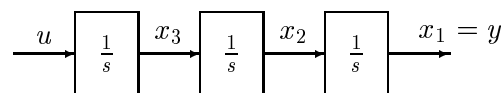
- 10.c) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non osservabile del sistema è stabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato. La matrice $\mathbf{L}$ potrà agire quindi solo su due dei tre autovalori del sistema, cioè potrà agire solo sugli autovalori della parte osservabile. La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ risulterà agevole se si parte dalla forma canonica di Kalman ottenuta al punto 2.a). La matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte osservabile si calcola nel modo seguente:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{P}_c \mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 14 & -10 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -17 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.375 \\ -1.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ si calcola nel modo seguente:

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.375 \\ -1.625 + \alpha \\ -2.375 + \alpha \end{bmatrix}$$

11. Sia dato il seguente sistema dinamico (cascata di tre integratori):



Scrivere il sistema nella forma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$ e calcolare le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ del corrispondente sistema discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k)$ che si ottiene mediante campionamento. Si ponga $T = \frac{1}{2}$.

- 11.Sol. Una descrizione nello spazio degli stati del sistema dinamico dato è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

La matrice $\mathbf{F}$ del corrispondente sistema a segnali campionati è la seguente:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{G}$ è invece la seguente:

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \sigma & \frac{\sigma^2}{2} \\ 0 & 1 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \\ \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

12. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

essendo $\mathbf{x}(t)$ il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

12.a) Si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori della parte raggiungibile e della parte osservabile.

12.b) Determinare, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizzi il sistema e che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato.

12.c) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -3 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

12.a) Per operare la scomposizione canonica di Kalman del sistema, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im}\mathcal{R}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \ker \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio coincide con il sottospazio $\mathcal{E}^-$, infatti la seguente matrice ha determinante nullo

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_4 = 0$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è la seguente:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Il sottosistema raggiungibile è composto dalle prime due componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_r} \bar{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_r} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

ed è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. La parte non raggiungibile è stabile: $\lambda_3 = -1$.

Il sottosistema osservabile è dato dalla prima e dalla terza componenti dello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_o} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Anche il sottosistema osservabile è caratterizzato dagli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = -1$. La parte non osservabile è stabile: $\lambda_2 = -1$.

- 12.b) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non raggiungibile del sistema è stabile per cui esiste una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che stabilizza il sistema e che pone in -3 i due autovalori della parte raggiungibile. Per sintetizzare la matrice $\mathbf{K}$ è bene partire sintetizzando la matrice $\bar{\mathbf{K}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_r$ e quello della matrice $\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{K}}$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_r}(s) = s^2 - 1 \quad \Delta_{\mathbf{A}_r + \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{K}}}(s) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

La matrice $\bar{\mathbf{K}}$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La stessa matrice $\bar{\mathbf{K}}$ poteva essere calcolata anche utilizzando la formula di Ackerman:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1} (\mathbf{A}_r + 3\mathbf{I})^2 \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}^2 \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di retroazione $\mathbf{K}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 10 & \alpha & 2 - \alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario.

- 12.c) Dall'analisi fatta al punto precedente si ha che la parte non osservabile del sistema è stabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato. La matrice $\mathbf{L}$ potrà agire quindi solo su due dei tre autovalori del sistema, cioè gli autovalori della parte osservabile. La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ risulterà agevole se si parte dalla forma canonica di Kalman ottenuta al punto 2.a). La matrice $\bar{\mathbf{L}}$ che, nella forma canonica di Kalman, impone gli autovalori desiderati alla parte osservabile si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}} &= \mathbf{P}_c \mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In questo caso si ha che $\mathbf{L}_c = \mathbf{K}_c^T$ in quanto il polinomio caratteristico e il polinomio desiderato sono gli stessi del punto precedente. La matrice $\mathbf{L}$ relativa al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} l_1 \\ \beta \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ \beta - 8 \\ \beta - 20 \end{bmatrix}$$

dove β è un parametro arbitrario.

13. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

- 13.a) Calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [2 \ 0 \ 1]^T$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [4 \ 0 \ 0]^T$.
 13.b) Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$.

- 13.a) Il sistema non è raggiungibile

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui il problema potrebbe non avere soluzioni. Per calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [2 \ 0 \ 1]^T$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [4 \ 0 \ 0]^T$ occorre calcolare in quanti passi k lo stato $\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$ è raggiungibile. Per $k = 1$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \notin \text{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{Im}[\mathbf{B}]$$

Per $k = 2$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Im}[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B}]$$

Quindi la transizione richiesta è possibile in 2 passi. La sequenza cercata soddisfa la relazione:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

da cui si ha che la sequenza cercata è $u(0) = 1$, $u(1) = 4$.

13.b) Il sistema non è completamente osservabile

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{E}^- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con l'evoluzione libera $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$ si determina calcolando una soluzione $\mathbf{x}_p$ e sommando ad essa il sottospazio di non osservabilità $\mathcal{E}^-$. La soluzione $\mathbf{x}_p$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p \rightarrow \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'insieme cercato degli stati iniziali è quindi il seguente:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_p + \mathcal{E}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

14. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

14.a) Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato;

14.b) Portare il sistema in forma standard di osservabilità. Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di "ordine pieno" che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

14.a) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det \mathcal{R}^+ = 8$$

Il sistema dato è completamente raggiungibile. Esiste quindi una retroazione dello stato $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ che stabilizza il sistema complessivo e che posiziona in -1 tutti gli autovalori del sistema. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ -1 & -1 & s \end{vmatrix} = s^3 + 3s = s^2(s + 3)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è il seguente

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{BK}}(s) = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice $\mathbf{K}$ si calcola in base alla seguente formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

14.b) La matrice di osservabilità del sistema è la seguente

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det \mathcal{O}^- = 0$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è singolare. Il sistema non è completamente osservabile per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato solo se la parte non osservabile è asintoticamente stabile. Il primo passo è quello di calcolare una matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porti il sistema in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

La parte non osservabile è “semplicemente” stabile in quanto ha un autovalore nell’origine: $s = 0$. Non è quindi possibile giungere alla sintesi di un osservatore “asintotico” dello stato. In questo caso l’osservatore sarebbe “semplicemente stabile”, cioè la stima dello stato sarebbe nota a meno di una costante che è funzione della condizione iniziale della parte non osservabile.

Il fatto che la parte non osservabile non fosse asintoticamente stabile poteva essere dedotto dal fatto che tutti e tre gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono sull’asse immaginario: $s_1 = 0$, $s_{1,2} = \pm\sqrt{3}j$.

15. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

15.a) Si determini se il sistema è raggiungibile e/o controllabile. Calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0 \ 0 \ 0]^T$.

15.b) Si determini se il sistema è osservabile e/o ricostruibile. Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 1, y(1) = 1, y(2) = 1$.

15.a) La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 per cui il sistema non è completamente raggiungibile. Per verificare se il sistema è controllabile, occorre verificare se $\text{Im}\mathbf{A}^3 \subseteq \text{Im}\mathcal{R}^+$:

$$\text{Im}\mathbf{A}^3 = \text{Im} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{Im}\mathcal{R}^+ = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La condizione $\text{Im}\mathbf{A}^3 \subseteq \text{Im}\mathcal{R}^+$ è verificata per cui il sistema è controllabile a zero.

Per calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porta il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [0 \ 0 \ 0]^T$ occorre calcolare in quanti passi k lo stato $\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$ è raggiungibile. Per $k = 1$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \text{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{Im}\mathbf{B}$$

Per $k = 2$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0 = -\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Im}[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B}]$$

Quindi la transizione è possibile in 2 passi. La sequenza cercata soddisfa la relazione

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0 = -\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

La sequenza cercata è quindi la seguente: $u(0) = -2, u(1) = 0$.

15.b) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 per cui il sistema non è completamente osservabile. Per verificare se il sistema è ricostruibile, occorre verificare se $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$:

$$\ker \mathbf{A}^3 = \ker \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

La condizione $\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^3$ è verificata per cui il sistema è ricostruibile.

L'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con l'evoluzione libera: $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$ sono tutti e soli quelli che soddisfano la seguente relazione:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \mathcal{O}^- \mathbf{x}_0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

Il vettore $\bar{y}$ non è combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathcal{O}^-$, per cui il sistema non ammette soluzioni. Non esiste quindi nessuna condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ compatibile con l'evoluzione libera assegnata.