Domande

1. Sia $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ la funzione di transizione dello stato di un sistema dinamico continuo. Completare le seguenti definizioni:

   Uno stato $x(t_1)$ è raggiungibile dallo stato $x(t_0)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\, t_1]$ se ...

   esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.

   Uno stato $x(t_0)$ è controllabile allo stato $x(t_1)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\, t_1]$ se ...

   esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$.

2. Sia dato un sistema *lineare, discreto, tempo–invariante* descritto dalle matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. Completare la seguente definizione:

   Due stati $\mathbf{x}_1$ *e* $\mathbf{x}_2$ *sono* indistinguibili nel futuro in k passi *se ...*

   per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$, le successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\cdot)$ e $\mathbf{y}_2(\cdot)$, che corrispondono agli stati iniziali $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$, coincidono nei primi k passi:

   $$\mathbf{x}_1(0) \overset{k}{\approx} \mathbf{x}_2(0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{y}_2(\tau), \qquad 0 \le \tau \le k$$

3. Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

   $$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

4. Sia $S' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T},\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{C}\mathbf{T})$ il sistema che si ottiene da $S = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ applicando la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$. La matrice di trasformazione $\tilde{\mathbf{T}}$ che permette di passare dal sistema S_D (duale di S) al sistema S'_D (duale di S') in base alla trasformazione di coordinate $\mathbf{x}_D = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}'_D$ è

   ○ $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$
   ○ $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}$
   ⊗ $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}$
   ⊗ $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^{-1})^{\mathrm{T}}$

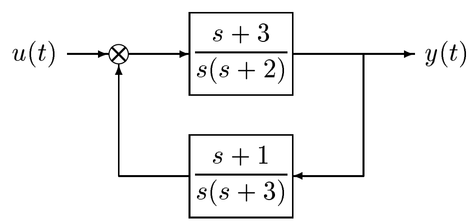
5. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo (raggiungibile e osservabile) caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, quando si utilizza un periodo di campionamento $T = 2\pi$

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   ⊗ è un sistema raggiungibile;
   ○ è un sistema non raggiungibile;
   ⊗ è un sistema osservabile;
   ○ è un sistema non osservabile;

6. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

   ○ Il sistema è completamente raggiungibile;
   ⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;
   ○ Il sistema è completamente osservabile;
   ⊗ Il sistema non è completamente osservabile,



7. Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nel caso in cui la parte non raggiungibile e non osservabile sia assente (cioè abbia dimensione nulla):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}$$

8. Calcolare una realizzazione completamente raggiungibile della seguente matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s+3)} \\ \dfrac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+6s} \\ \dfrac{s+3}{s(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Per un sistema lineare, tempo discreto e stazionario di dimensione n:

   ⊗ La completa raggiungibilità implica la controllabilità.

   ◯ La completa controllabilità implica la raggiungibilità.

10. Dato un sistema dinamico lineare a tempo continuo, stazionario, instabile, completamente osservabile, allora:

    ⊗ Non è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena aperta perchè l'errore di stima diverge.

    ⊗ È possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa, con errore di stima convergente.

    ◯ Non è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa.

11. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

    Scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno in catena chiusa:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

12. Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{E}^-$ rispettivamente i sottospazi raggiungibile e non osservabile di un sistema lineare tempo–continuo:

    ⊗ se $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}^+$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni funzione di ingresso

    ◯ se $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}^-$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}^-$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni funzione di ingresso

13. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione n,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

    ⊗ Mediante la retroazione stato–ingresso è possibile allocare a piacimento gli autovalori della parte raggiungibile del sistema.

    ⊗ La retroazione stato–ingresso non consente di modificare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità.

    ⊗ E' sempre possibile stabilizzare il sistema mediante retroazione stato–ingresso se gli autovalori del sottosistema relativo alla parte non–raggiungibile hanno modulo inferiore all'unità.

14. Scrivere una realizzazione completamente osservabile e completamente raggiungibile della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+4)(s+3)} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

15. Nel caso di sistemi discreti, scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinchè uno stato finale $\mathbf{x}_f$ sia raggiungibile in k passi a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 \in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

16. Enunciare il *Lemma di Heymann*:

Se $(\mathbf{A},\, \mathbf{B})$ *è raggiungibile e se* $\mathbf{b}_i$ *è una colonna non nulla di* $\mathbf{B}$, *allora esiste una matrice* $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m\times n}$ *tale che* $(\mathbf{A} + \mathbf{BM}_i,\, \mathbf{b}_i)$ *è raggiungibile.*

17. Nella sintesi del regolatore, la proprietà di separazione

$\bigcirc$ afferma che mediante retroazione è sempre possibile stabilizzare un qualsiasi sistema dinamico lineare;

$\otimes$ afferma che la sintesi dell'osservatore può essere fatta indipendentemente dalla sintesi della retroazione statica;

$\bigcirc$ è valida solo nel caso di osservatore asintotico di ordine pieno;

$\otimes$ è valida anche nel caso di osservatore asintotico di ordine ridotto;

18. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C},\, \mathbf{D})$:

$\otimes$ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

$\bigcirc$ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è raggiungibile;

$\bigcirc$ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

$\bigcirc$ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è raggiungibile;

19. Sia dato un sistema lineare continuo completamente raggiungibile e osservabile avente due soli poli complessi coniugati in $p_{12} = -4 \pm j$. Indicare per quali valori del periodo di campionamento T il corrispondente sistema a segnali campionati è completamente raggiungibile:

$$T \neq k\pi \qquad\qquad k = 1,\, 2,\, 3,\, \dots$$

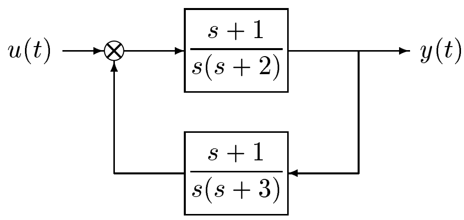
20. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

$\otimes$ Il sistema è completamente osservabile;

$\bigcirc$ Il sistema non è completamente osservabile,

$\otimes$ Il sistema è completamente raggiungibile;

$\bigcirc$ Il sistema non è completamente raggiungibile;

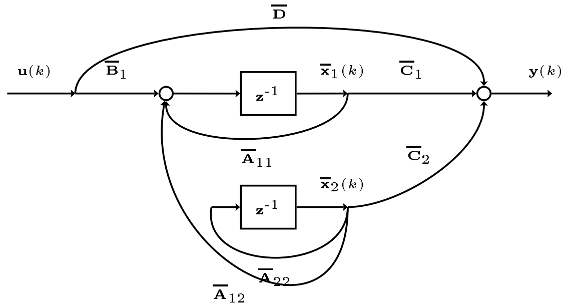


21. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

22. Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di raggiungibilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici **A**, **B**, **C** e **D**:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & \overline{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



23. Relativamente ad un sistema lineare discreto, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto.

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = (\overline{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(k) + (\overline{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}(k)$$

24. Siano $\mathcal{X}^+$ e $\mathcal{X}_K^+$ i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A}+\mathbf{BK}, \mathbf{B})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

- ○ $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$
- ○ $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$
- ⊗ $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}_K^+$
- ○ nessuna delle precedenti

25. Il sistema duale $\mathcal{S}_D$ del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ è :

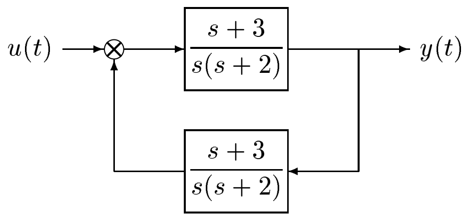
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D})$
- ⊗ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$
- ○ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D})$

26. Sia $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k)$ il sistema discreto ottenuto campinando, con periodo di campionamento T, un sistema continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ asintoticamente stabile. Si può allora affermare che

- ○ La matrice **F** ha tutti gli autovalori a parte reale negativa;
- ⊗ La matrice **F** ha tutti gli autovalori a modulo minore di 1;
- ○ La matrice **F** è stabile solo se $T \neq \frac{2k\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j)}$

27. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- ⊗ Il sistema è completamente raggiungibile;
- ○ Il sistema non è completamente raggiungibile;
- ⊗ Il sistema è completamente osservabile;
- ○ Il sistema non è completamente osservabile.



28. Scrivere in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$ l'espressione finale della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di una sistema discreto caratterizzato da matrici **A**, **B** e **C** aventi la seguente struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}$$

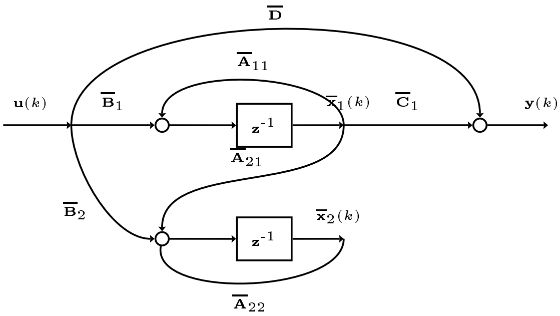
$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}_1(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{B}_1$$

29. Sia dato un sistema lineare SISO caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

30. Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di osservabilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{21} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & 0 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(k) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



31. Relativamente ad un sistema lineare continuo, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(t) + (\overline{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(t) + (\overline{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\overline{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(t)$$

32. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

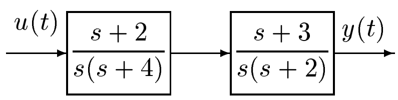
⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

33. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente al seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \qquad G(s) = \frac{8s^3 + 7s^2 + 6s + 5}{s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

34. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

○ Il sistema è completamente raggiungibile;
⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;
⊗ Il sistema è completamente osservabile;
○ Il sistema non è completamente osservabile.



35. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

36. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabililità in k passi del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

37. Per un sistema lineare stazionario discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ avente matrice di sistema $\mathbf{A}$ non singolare, è possibile affermare che:

   - $\otimes$ se il sistema è completamente controllabile è anche completamente raggiungibile;
   - $\otimes$ se il sistema è completamente raggiungibile è anche completamente controllabile;
   - $\otimes$ se il sistema è completamente osservabile è anche completamente ricostruibile;
   - $\otimes$ se il sistema è completamente ricostruibile è anche completamente osservabile;

38. Un sistema dinamico lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

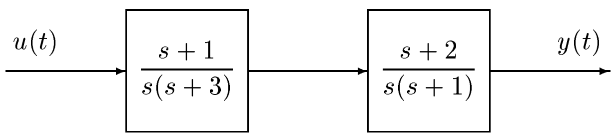
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

   - $\otimes$ Il sistema è in forma standard di ossevabilità
   - $\bigcirc$ Il sistema è in forma standard di raggiungibilità
   - $\otimes$ Il sistema non è completamente osservabile
   - $\bigcirc$ Il sistema non è completamente raggiungibilile

39. Il sistema duale $\mathcal{S}_D$ del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ è :

   - $\bigcirc$ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}})$
   - $\bigcirc$ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}})$
   - $\bigcirc$ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$
   - $\otimes$ $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$

40. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:



   - $\bigcirc$ Il sistema è completamente controllabile;
   - $\otimes$ Il sistema è completamente osservabile;
   - $\otimes$ Per tale sistema esiste un osservatore asintotico dello stato;

41. Sia dato un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ completamente raggiungibile. Il corrispondente sistema a dati campionati (essendo T il periodo di campionamento) è completamente raggiungibile se e solo se per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di $\mathbf{A}$ aventi la stessa parte reale, vale la relazione:

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \qquad\qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

42. Sia dato il seguente sistema lineare continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &=& \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &=& \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{LC}]\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

43. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

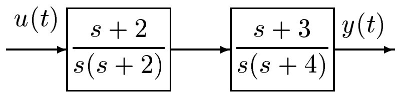
- ○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

44. Sia dato un sistema lineare continuo completamente raggiungibile e osservabile avente quattro soli poli complessi coniugati in $p_{1,2} = -3 \pm j$ e $p_{3,4} = -3 \pm j2$. Indicare per quali valori del periodo di campionamento T il corrispondente sistema a segnali campionati è completamente raggiungibile:

$$T \neq \frac{2k\pi}{1}, \qquad T \neq \frac{2k\pi}{2}, \qquad T \neq \frac{2k\pi}{3}, \qquad T \neq \frac{2k\pi}{4}, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

45. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- ⊗ Il sistema può essere completamente raggiungibile;
- ○ Il sistema non è completamente raggiungibile;
- ⊗ Il sistema può essere completamente osservabile;
- ○ Il sistema non è completamente osservabile.



46. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{2,4} \\ 0 & \mathbf{A}_{3,3} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{4,3} & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

47. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ di un sistema lineare $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$

- ○ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$
- ○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$
- ⊗ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$
- ○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$

48. Sia $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ un sistema lineare ad un ingresso e sia $n > 1$ la dimensione dello spazio degli stati. Se il vettore $\mathbf{b}$ coincide con uno degli autovettori della matrice $\mathbf{A}$, allora

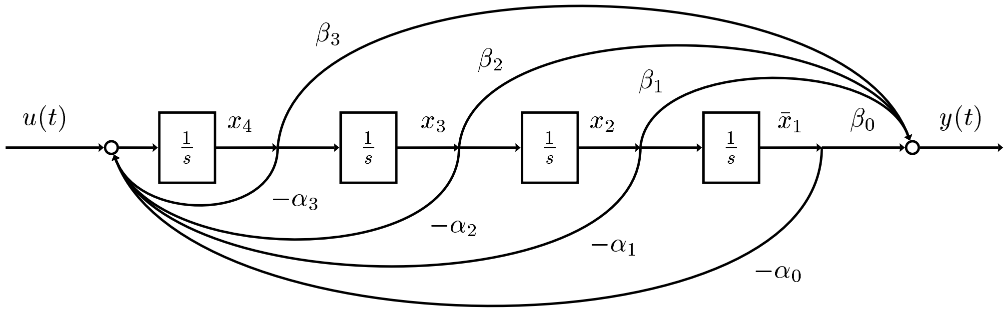
- ⊗ il sistema non è completamente raggiungibile;
- ○ il sistema può essere completamente raggiungibile;
- ⊗ il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ ha dimensione unitaria.

49. Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per garantire che i due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ siano indistinguibili del futuro in k passi:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k \end{bmatrix} = \mathcal{E}^-(k)$$

50. Disegnare lo schema a blocchi di un sistema tempo-continuo caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$



51. Scrivere una realizzazione completamente controllabile e completamente osservabile della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} \qquad \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

52. Nella sintesi del regolatore, la proprietà di separazione

- ○ è valida solo nel caso di osservatore asintotico di ordine pieno;
- ⊗ è valida anche nel caso di osservatore asintotico di ordine ridotto;
- ○ afferma che mediante retroazione è sempre possibile stabilizzare un qualsiasi sistema dinamico lineare;
- ⊗ afferma che la sintesi dell'osservatore può essere fatta indipendentemente dalla sintesi della retroazione statica;

53. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati.

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

54. Scrivere in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$ l'espressione finale della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di una sistema discreto caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} & 0 \\ (*) & (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{B}_2$$

55. Sia dato un sistema tempo-discreto $S = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C},\, \mathbf{D})$ con m ingressi e p uscite. Il corrispondete sistema duale ha la seguente struttura:

$S_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}},\ )$ avente p ingressi e m uscite

Indicare inoltre quali delle seguenti affermazioni sono vere:

⊗ S osservabile $\Rightarrow$ S_D controllabile;

○ S controllabile $\Rightarrow$ S_D osservabile;

○ S ricostruibile $\Rightarrow$ S_D osservabile;

⊗ S raggiungibile $\Rightarrow$ S_D ricostruibile;

56. Data la seguente "matrice" di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ di un sistema del quarto ordine tempo continuo con un solo ingresso (m=1) ed una sola uscita (p=1) completamente raggiungibile

$$\mathbf{H}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s^2+2)^2} = \frac{s^2+6s+8}{s^4+4s^2+4}$$

scrivere la corrispondente forma canonica di controllo $(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c)$.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_c = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una retroazione dello stato applicata al sistema $(\mathbf{A}_c,\, \mathbf{b}_c,\, \mathbf{c}_c)$:

⊗ modifica solo i poli del sistema retroazionato;

○ modifica solo gli zeri del sistema retroazionato;

○ modifica sia i poli che gli zeri del sistema retroazionato;

57. Dire come si costruisce la matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che permette di portare un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ in forma canonica di osservabilità $(\mathbf{A}_o,\, \mathbf{B}_o,\, \mathbf{C}_o)$. Indicare inoltre la struttura delle matrici $\mathbf{A}_o$, $\mathbf{B}_o$ e $\mathbf{C}_o$:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = [(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-]^{-1}$$

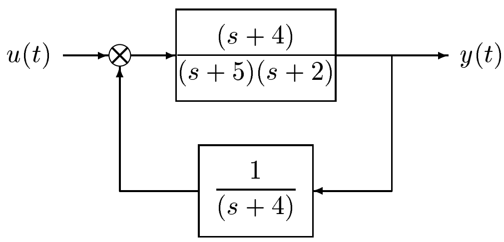
58. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

○ Il sistema è completamente raggiungibile;

⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;

○ Il sistema è completamente osservabile;

⊗ Il sistema non è completamente osservabile,



59. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$

⊗ le corrispondenti successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\tau)$ e $\mathbf{y}_2(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;

⊗ le corrispondenti evoluzioni libere $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$ e $\mathbf{y}_{l,2}(\tau)$ coincidono per $\tau \geq 0$;

○ se i vettori $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$ appartengono al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

⊗ se il vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

60. Sia $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C})$ un sistema lineare caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ e sia $\mathcal{S}_c = (\mathbf{A}_c,\, \mathbf{B}_c,\, \mathbf{C}_c)$ il corrispondente sistema in forma canonica (di raggiungibilità o di osservabilità). Scrivere, in funzione delle matrici di raggiungibilità e di osservabilità dei due sistemi, le matrici $\mathbf{T}$ e $\mathbf{P}$ che portano il sistema $\mathcal{S}$ nella corrispondente forma canonica

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}, \qquad\qquad \mathbf{P} = \left[(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-\right]^{-1}$$

61. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema continuo $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

⊗ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
○ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è ricostruibile;

62. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, quando si utilizza un periodo di campionamento $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

⊗ è un sistema non raggiungibile;
⊗ è un sistema non osservabile;

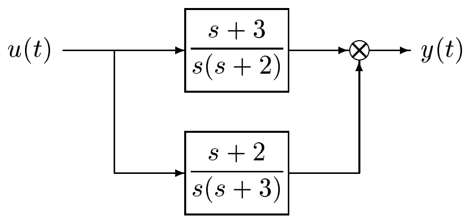
63. Enunciare la *Proprietà di separazione*:

La sintesi del blocco di retroazione $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$ *e del blocco di stima* $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$ *può essere fatta in modo indipendente*

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]\,\det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

64. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

⊗ Il sistema non è completamente raggiungibile;
○ Il sistema è completamente raggiungibile;
⊗ Il sistema non è completamente osservabile;
○ Il sistema è completamente osservabile.



65. Siano $\mathcal{E}^-$ e $\mathcal{E}^-_{\mathbf{L}}$ i sottospazi di non osservabilità associati alle coppie di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{LC}, \mathbf{C})$. Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

○ $\mathcal{E}^- \subset \mathcal{E}^-_{\mathbf{L}}$
○ $\mathcal{E}^-_{\mathbf{L}} \subset \mathcal{E}^-$
⊗ $\mathcal{E}^- = \mathcal{E}^-_{\mathbf{L}}$
○ nessuna delle precedenti

66. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo (raggiungibile e osservabile) caratterizzato dalle seguenti matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, quando si utilizza un periodo di campionamento $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

○ è un sistema raggiungibile;
⊗ è un sistema non raggiungibile;
○ è un sistema osservabile;

⊗ è un sistema non osservabile;

67. Relativamente ad un sistema lineare stazionario discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ che ha almeno un autovalore nell'origine, è possibile affermare che:

   ○ se il sistema è completamente controllabile allora è anche completamente raggiungibile;

   ⊗ se il sistema è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile;

   ⊗ se il sistema è completamente osservabile allora è anche completamente ricostruibile;

   ○ se il sistema è completamente ricostruibile allora è anche completamente osservabile;

68. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

   ○ Il sistema non è completamente raggiungibile;

   ⊗ Il sistema non è completamente osservabile;

   ⊗ Il sistema può essere raggiungibile;

69. Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nella forma più generale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 & \mathbf{A}_{1,3} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{2,4} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{4,3} & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{C}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

70. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti, i sottospazi $\mathcal{X}^+(k)$ raggiungibili in k passi soddisfano le seguenti relazioni:

   ○ $\mathcal{X}^+(1) \subset \mathcal{X}^+(2) \subset \ldots \subset \mathcal{X}^+(k) \subset \ldots$

   ⊗ $\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}^+(k) \subseteq \ldots$

   ○ $\mathcal{X}^+(1) \supset \mathcal{X}^+(2) \supset \ldots \supset \mathcal{X}^+(k) \supset \ldots$

   ○ $\mathcal{X}^+(1) \supseteq \mathcal{X}^+(2) \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{X}^+(k) \supseteq \ldots$

71. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di raggiungibilità $\mathcal{R}_1^+$ ed $\mathcal{R}_2^+$ esiste il legame:

   ⊗ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}\mathcal{R}_2^+$

   ○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}_2^+$

   ○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}$

   ○ $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}^{-1}$

72. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di osservabilità $\mathcal{O}_1^-$ ed $\mathcal{O}_2^-$ esiste il legame:

   ○ $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}\mathcal{O}_2^-$

   ○ $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_2^-$

   ○ $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}$

   ⊗ $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}^{-1}$

73. Nel caso di sistemi lineari invarianti $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$, la controllabilità implica la raggiungibilità:

   ○ sempre;

   ⊗ se il sistema è tempo continuo;

○ se il sistema è tempo discreto;

⊗ se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare;

74. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,u(k)$, la successione di ingresso $\mathbf{u}(0),\ldots,\mathbf{u}(\bar{k}-1)$ che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(\bar{k})$:

⊗ esiste se il sistema è raggiungibile;

○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;

○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) - e^{\mathbf{A}\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;

⊗ esiste se $\mathbf{x}(\bar{k}) - \mathbf{A}^{\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$;

○ se esiste è unica;

75. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, la funzione di ingresso $\mathbf{u}(t)$, per $t \in [0,\, \bar{t}]$, che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(\bar{t})$:

⊗ esiste se il sistema è raggiungibile;

○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) \in \mathcal{X}^+$;

⊗ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) - e^{\mathbf{A}\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;

○ esiste se $\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{A}^{\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;

○ se esiste è unica;

76. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, l'insieme $\mathcal{X}^+(t)$ degli stati raggiungibili dall'origine nell'intervallo di tempo $[0,\, t]$:

⊗ è un sottospazio;

⊗ è indipendente dal tempo t;

⊗ è uno spazio invariante di $\mathbf{A}$;

77. La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di un sistema discreto:

⊗ è funzione della sola parte raggiungibile del sistema;

⊗ è funzione della sola parte osservabile del sistema;

○ è funzione delle condizioni iniziali del sistema;

78. Il seguente sistema lineare continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ posto in forma canonica di Jordan:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

○ è raggiungibile;

⊗ non è raggiungibile;

○ è controllabile;

⊗ non è controllabile;

79. Mediante retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ è possibile posizionare a piacere:

○ tutti gli autovalori del sistema;

⊗ tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;

○ tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

80. Mediante retroazione statica dell'uscita $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{K}}\mathbf{y}$, è possibile :

○ posizionare a piacere tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;

○ posizionare a piacere tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

⊗ modificare la posizione di alcuni autovalori della parte raggiungibile del sistema;

◯ modificare la posizione di alcuni autovalori della parte osservabile del sistema;

81. Il "PBH test" afferma che "il sistema ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$) è raggiungibile se e solo se"

⊗ la matrice $\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array}\right]$ ha rango pieno per ogni $s \in \mathcal{C}$.

◯ la matrice $\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}-\mathbf{A}^k & \mathbf{B} \end{array}\right]$ ha rango pieno per ogni $k \in \mathcal{Z}$.

◯ la matrice $\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}-e^{\mathbf{A}t} & \mathbf{B} \end{array}\right]$ ha rango pieno per ogni $t \in \mathcal{R}$.

82. Un sistema ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$) può essere portato in forma canonica di controllo

◯ sempre;

⊗ se e solo se è raggiungibile;

◯ se e solo se è controllabile;

◯ solo se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare;

83. La formula di Ackerman per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

◯ per qualunque sistema;

⊗ solo se il sistema è raggiungibile;

⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;

84. Una retroazione algebrica dello stato

⊗ modifica i poli del sistema di partenza;

◯ modifica gli zeri del sistema di partenza;

◯ modifica il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ del sistema di partenza;

85. Un sistema ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$) è "stabilizzabile" mediante retroazione statica dello stato

⊗ se il sistema è stabile;

⊗ se il sistema è raggiungibile;

⊗ se la parte instabile del sistema è raggiungibile;

⊗ se la parte non raggiungibile del sistema è stabile;

86. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena aperta" di ordine pieno può essere utilizzato

⊗ solo se il sistema è stabile;

◯ solo se il sistema è osservabile;

◯ solo se la parte non osservabile del sistema è stabile;

◯ solo se la parte instabile del sistema è osservabile;

87. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" di ordine pieno può essere utilizzato

◯ solo se il sistema è stabile;

◯ solo se il sistema è osservabile;

⊗ solo se la parte non osservabile del sistema è stabile;

⊗ solo se la parte instabile del sistema è osservabile;

88. Per poter utilizzare uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" e di ordine "ridotto"

◯ il sistema deve essere stabile;

◯ il sistema deve essere osservabile;

⊗ la parte non osservabile del sistema deve essere stabile;

89. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione K) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

○ è un sistema raggiungibile ed osservabile;

⊗ è un sistema non raggiungibile;

○ è un sistema non osservabile;

90. Due realizzazioni diverse della stessa matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$

○ hanno sempre la stessa dimensione;

⊗ possono avere dimensioni diverse;

○ hanno lo stesso sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$;

91. Una qualunque realizzazione "minima" di una matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$

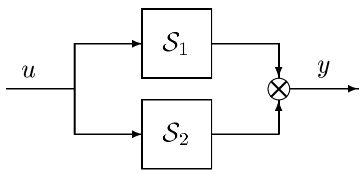
⊗ è raggiungibile;

⊗ è osservabile;

○ è stabile;

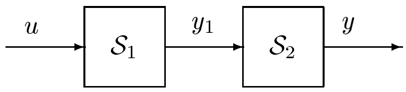
⊗ è algebricamente equivalente a qualunque altra realizzazione minima;

92. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *parallelo* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$:



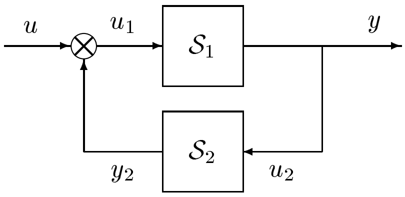
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

93. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *serie* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

94. Scrivere le equazioni di stato del sistema $\mathcal{S}$ che si ottiene ponendo in *retroazione* i due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

95. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ di un sistema lineare $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$

○ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;

○ è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;

○ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente il $\ker \mathbf{C}$;

⊗ è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$;

96. Scrivere, in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$, la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e dal sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

97. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, uno stato $\mathbf{x}_1$ è indistinguibile nel futuro dallo stato nullo $\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$

○ la corrispondente successione di uscita $\mathbf{y}_1(\tau)$ è identicamente nulla: $\mathbf{y}_1(\tau) = 0$ per $\tau \geq 0$;

⊗ la corrispondente evoluzione libera $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$ è identicamente nulla: $\mathbf{y}_{l,1}(\tau) = 0$ per $\tau \geq 0$;

⊗ se il vettore $\mathbf{x}_1$ appartiene al sottospazio $\mathcal{E}^-$;

98. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

○ Il sistema è raggiungibile;

⊗ Il sistema non è raggiungibile;

○ Il sistema è osservabile;

○ Il sistema non è osservabile;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

99. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due sistemi algebricamente equivalenti tali che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$. Tra le corrispondenti matrici di osservabilità $\mathcal{O}_1^-$ ed $\mathcal{O}_2^-$ esiste il legame:

○ $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}\mathcal{O}_1^-$

○ $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_1^-$

⊗ $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^-\mathbf{T}$

○ $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^-\mathbf{T}^{-1}$

100. Un sistema lineare $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ può essere scomposto nella forma canonica di Kalman

⊗ sempre;

○ solo se il sistema è raggiungibile;

○ solo se il sistema è controllabile;

○ solo se la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare;

101. Il seguente sistema lineare continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ posto in forma canonica di Jordan:

⊗ è raggiungibile;

○ non è raggiungibile;

⊗ è controllabile;

○ non è controllabile;

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]$$

102. La formula $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \mathbf{k}_c^{\mathrm{T}}[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$ per il calcolo del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

○ per qualunque sistema;

⊗ solo se il sistema è raggiungibile;

○ solo se il sistema è osservabile;

⊗ solo per sistemi ad un solo ingresso;