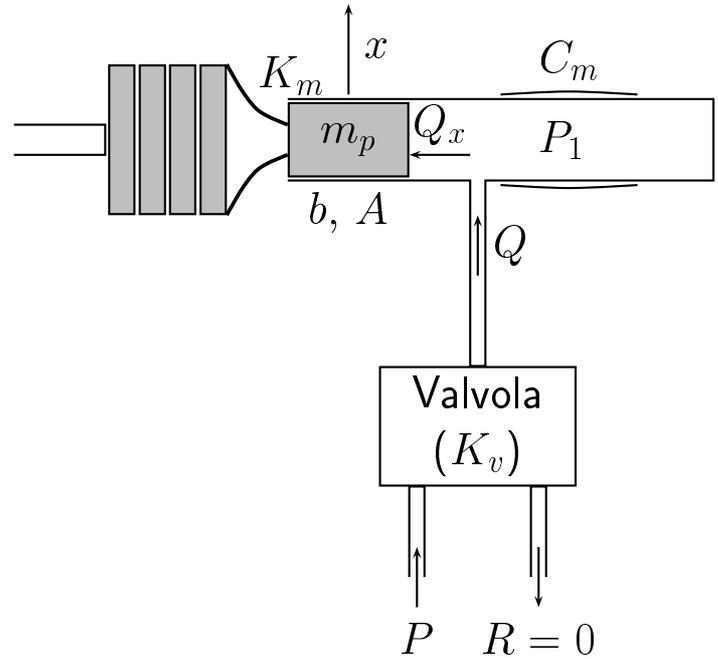
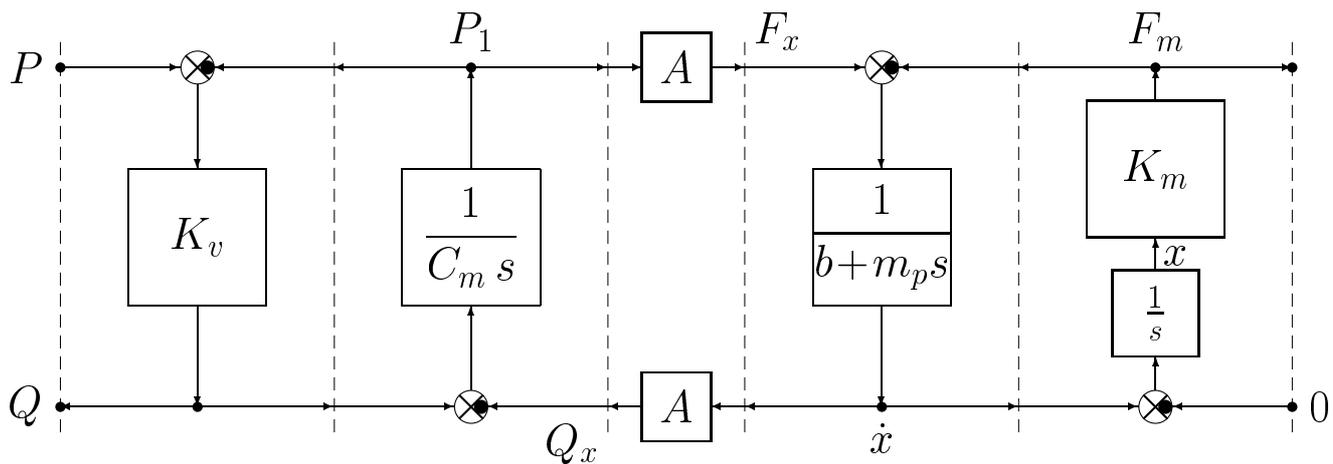


Si consideri il seguente modello idraulico semplificato di una frizione:

- P Pressione di alimentazione
- Q Portata volumetrica nella valvola
- K_v Costante di prop. della valvola
- C_m Capacità idraulica del cilindro
- P_1 Pressione all'interno del cilindro
- A Sezione del pistone
- x Posizione del pistone
- \dot{x} Velocità del pistone
- m_p Massa del pistone
- b Attrito lineare del pistone
- K_m Rigidezza della molla
- F_m Forza della molla sul pistone



Il corrispondente modello dinamico POG è il seguente:



Utilizzando la formula di Mason e le seguenti variabili ausiliarie

$$G_1 = K_v, \quad G_2 = \frac{1}{C_m s}, \quad G_3 = \frac{1}{b + m_p s}, \quad G_4 = \frac{K_m}{s}$$

si ottiene la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema:

$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{A G_1 G_1 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 + A^2 G_2 G_3 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

che sostituendo diventa:

$$G(s) = \frac{A K_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m b + K_v m_p) s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v b) s + K_m K_v}$$

Le equazioni che caratterizzano il sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} Q = K_v(P - P_1) \\ C_m \dot{P}_1 = Q - Q_x \\ m_p \ddot{x} = F_x - b \dot{x} - F_m \end{cases} \quad \begin{cases} F_m = K_m x \\ F_x = A P_1 \\ Q_x = A \dot{x} \end{cases}$$

Quando le equazioni vengono scritte in modo “non organizzato” non è facile capire qual è l’ordine dinamico del sistema e se sono state scritte tutte le equazioni necessarie per la completa definizione del sistema. Se si introduce il seguente “vettore di stato”

$$\mathbf{x} = [P_1 \quad \dot{x} \quad x]^T$$

le equazioni del sistema possono essere strutturate nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} C_m \dot{P}_1 \\ m_p \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_v & -A & 0 \\ A & -b & -K_m \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P$$

$$\mathbf{y} = F_m$$

dove P è la pressione di controllo in ingresso e $\mathbf{y} = F_m$ è la forza misurata in uscita. Tale sistema di equazioni può essere riscritto nella forma seguente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{K_v}{C_m} & -\frac{A}{C_m} & 0 \\ \frac{A}{m_p} & -\frac{b}{m_p} & -\frac{K_m}{m_p} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_v}{C_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{P}_{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

che in forma compatta diventa (descrizione nello spazio degli stati):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} \text{ è la matrice di sistema} \\ \mathbf{B} \text{ è la matrice degli ingressi} \\ \mathbf{C} \text{ è la matrice delle uscite} \end{array}$$

Il sistema è lineare, perciò ammette un unico punto di lavoro \mathbf{x}_0 ogni qual volta l’ingresso è costante $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Tale punto di lavoro \mathbf{x}_0 si determina imponendo

$\dot{\mathbf{x}} = 0$ e $\mathbf{u}_0 = P$:

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0$$

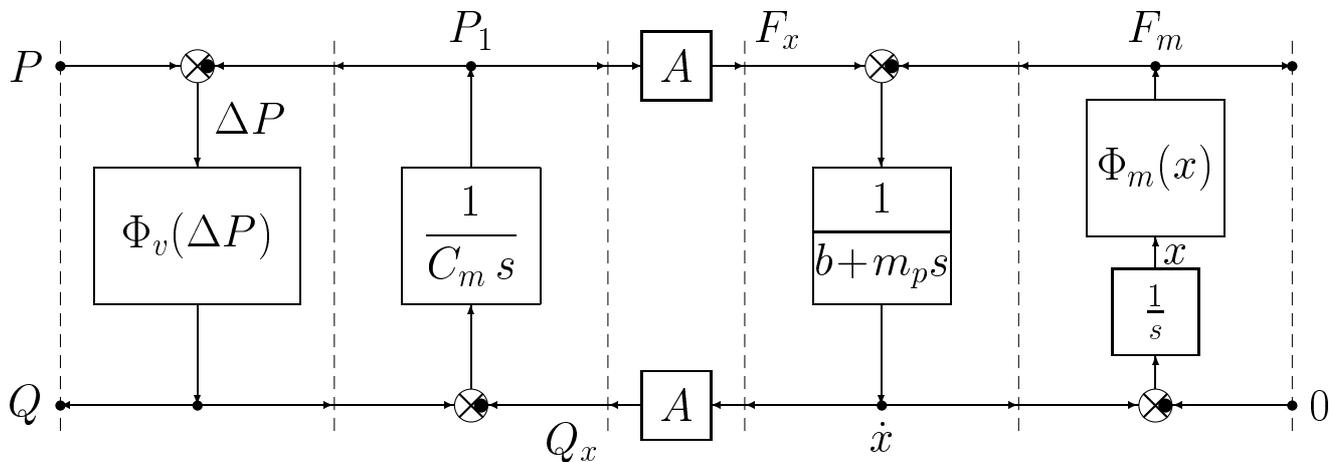
Nel caso in oggetto si ottiene:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ \frac{AP}{K_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = [F_m]_0 = AP$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare descritto nello spazio degli stati si ottiene anche utilizzando la seguente relazione:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Il risultato che si ottiene è identico a quello ottenuto con la formula di Mason. Se il sistema è non lineare si deve procedere in modo diverso. Supponiamo, per esempio, che nel caso in esame sia la valvola che la molla siano elementi non lineari: $\Phi_v(\Delta P)$ e $\Phi_m(x)$.



La descrizione nello spazio degli stati è ora la seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Phi_v(P_1 - P)}{C_m} & -\frac{A\dot{x}}{C_m} \\ \frac{AP_1}{m_p} & \frac{b\dot{x}}{m_p} & \frac{\Phi_m(x)}{m_p} \\ & \dot{x} & \end{bmatrix}, \quad F_m = \Phi_m(x)$$

Posto $x_1 = P_1$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = x$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\mathbf{u} = u = P$ e $\mathbf{y} = F_m$, la descrizione nello spazio degli stati è ora la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\Phi_v(u-x_1)}{C_m} - \frac{A x_2}{C_m} \\ \frac{A x_1}{m_p} - \frac{b x_2}{m_p} - \frac{\Phi_m(x_3)}{m_p} \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \\ \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_m(x_3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(\mathbf{x})} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

In questo caso $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ è funzione del solo vettore di stato \mathbf{x} . Nel caso più generale la funzione $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ dipende anche dal vettore degli ingressi \mathbf{u} . Anche in questo caso il punto di lavoro $\bar{\mathbf{x}}$ associato all'ingresso $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ si determina imponendo $\dot{\mathbf{x}} = 0$:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\Phi_v(\bar{u}-\bar{x}_1)}{C_m} = 0 \\ \frac{A\bar{x}_1}{m_p} - \frac{\Phi_m(\bar{x}_3)}{m_p} = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{u} - \Phi_v^{-1}(0) \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = \Phi_m^{-1}(A\bar{x}_1) \end{cases}$$

Nel caso di sistemi non lineari possono esistere più punti di lavoro associati allo stesso valore del vettore di ingresso \mathbf{u} .

La linearizzazione del sistema nell'intorno del punto di lavoro si opera nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{y} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}})} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

Posto $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, si ottiene il sistema linearizzato

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}} \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\bar{\mathbf{x}})}$$

Nel vaso in esame si ha:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{K_v}{C_m} & -\frac{A}{C_m} & 0 \\ \frac{A}{m_p} & -\frac{b}{m_p} & -\frac{K_m}{m_p} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{K_v}{C_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ K_m]$$

dove

$$K_v = -\left. \frac{\partial \Phi_v(u - x_1)}{\partial x_1} \right|_{(\bar{x}_1, \bar{u})} = \left. \frac{\partial \Phi_v(u - x_1)}{\partial u} \right|_{(\bar{x}_1, \bar{u})} = \left. \frac{\partial \Phi_v(w)}{\partial w} \right|_{w=\Phi_v^{-1}(0)}$$

$$K_m = \left. \frac{\partial \Phi_m(x_3)}{\partial x_3} \right|_{x_3=\bar{x}_3} \quad \text{dove} \quad \bar{x}_3 = \Phi_m^{-1}(A(\bar{u} - \Phi_v^{-1}(0)))$$

In questo modo si ottiene formalmente lo stesso modello dinamico lineare considerato inizialmente.