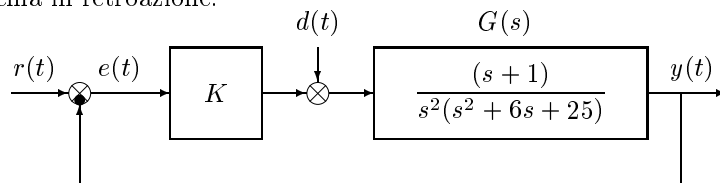


Nome dello studente: \_\_\_\_\_

Numero di matricola: \_\_\_\_\_

Per ognuno degli esercizi proposti, riportare su questo foglio il risultato finale e sul foglio a quadretti che vi è stato fornito gli eventuali calcoli intermedi.

Sia dato il seguente sistema in retroazione:



a) Determinare per quali valori di  $K > 0$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

$$\dots < K < \dots$$

b) Si faccia riferimento al precedente schema a blocchi:

b.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare le funzioni di trasferimento  $G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$  e  $G_2(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$ .

$$G_1(s) =$$

$$G_2(s) =$$

b.2) Calcolare, in funzione di  $K$ , il valore a regime  $y_\infty(t)$  dell'uscita  $y(t)$  quando in ingresso sono contemporaneamente presenti i segnali  $r(t) = 3$  e  $d(t) = 2$ .

$$y_\infty(t) =$$

b.3) Calcolare, in funzione di  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  in presenza dei segnali  $r(t) = t$  e  $d(t) = 0$ .

$$e_\infty(t) =$$

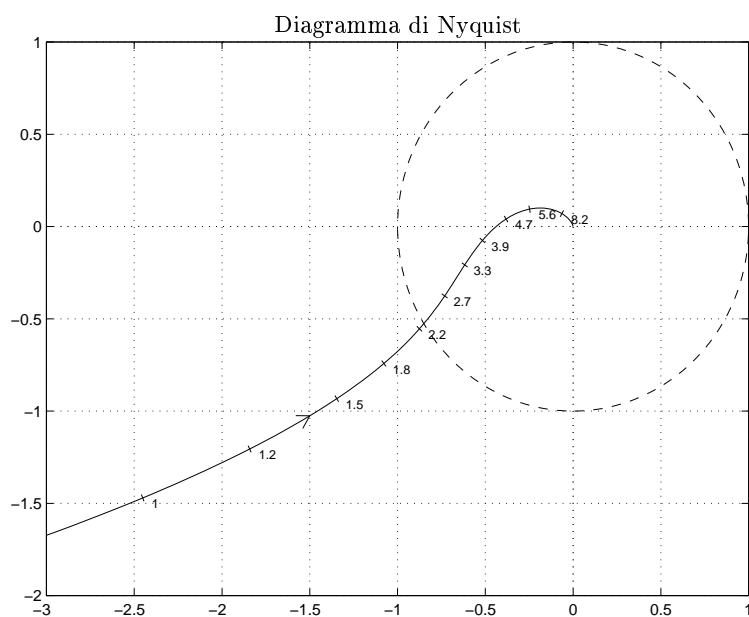
c) Si consideri il diagramma di Nyquist riportato sotto. Calcolare in modo approssimato:

c.1) Il margine di fase  $M_F$  e il margine di ampiezza  $M_A$  del sistema;  $M_A =$                        $M_F =$

c.2) Disegnare (sul foglio a quadretti) il diagramma polare “completo” chiudendo opportunamente il diagramma all'infinito. Dire se, in base al criterio di Nyquist, il sistema retroazionato è stabile.

c.3) Calcolare la risposta a regime del sistema quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale  $x(t) = 2 \cos(t)$ .

$$y(t) =$$



d) Tracciare qualitativamente (sul foglio a quadretti) il luogo delle radici del seguente sistema:

$$\frac{K(s+5)}{s(s+1)(s+2)}$$

d.1) Calcolare il luogo delle radici sia per  $K > 0$  che per  $K < 0$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione solo in modo “qualitativo”.

d.2) Calcolare esattamente la posizione degli asintoti:  $\sigma_a = \dots$

d.3) Dare una stima del più piccolo tempo di assestamento del sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ :  $T_a = \dots$

e) Si considerino i diagrammi di Bode riportati sotto. Calcolare in modo approssimato:

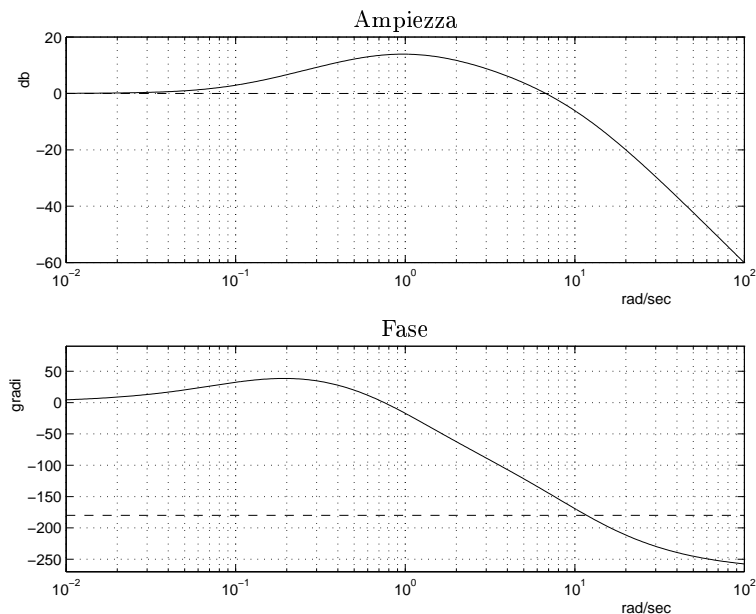
e.1) il margine di fase  $M_F$  e il margine di ampiezza  $M_A$  del sistema:  $M_A = \dots$  e  $M_F = \dots$

e.2) la pulsazione  $\omega_M = \dots$  in corrispondenza della quale il sistema presenta il massimo guadagno:

e.3) la pulsazione  $\omega_F = \dots$  in corrispondenza della quale il sistema presenta la fase massima;

e.4) la risposta a regime  $y_\infty(t)$  del sistema quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale  $x(t) = 2 + \sin(20t)$ .

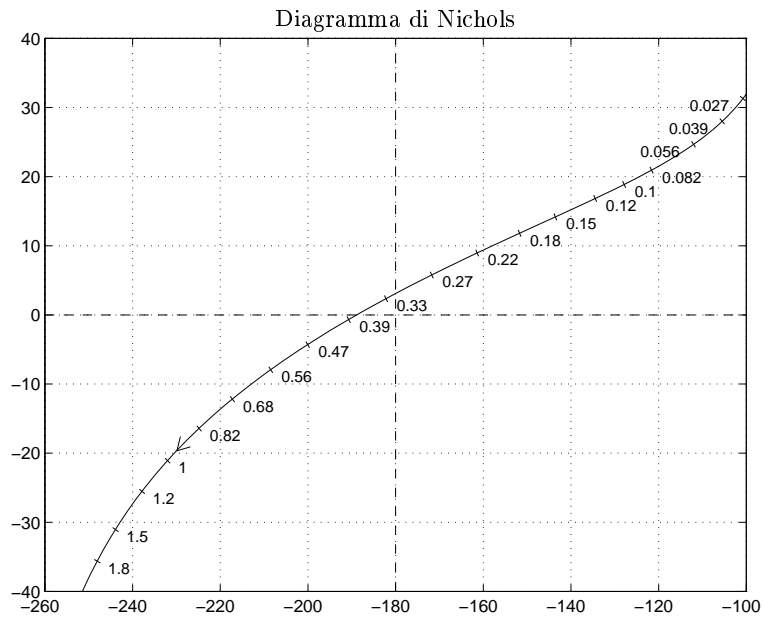
$$y_\infty(t) =$$



f) Si consideri il diagramma di Nichols riportato sotto. Utilizzando le seguenti formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} \quad \rightarrow \quad R(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

calcolare i parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$  della rete ritardatrice  $R(s)$  in modo da imporre al sistema retroazionato il margine di fase  $M_f = 40^\circ$ , in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 0.1$ .



g) Calcolare la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{x} + 7x \quad \rightarrow \quad G(s) =$$

h) Data la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ , calcolare la corrispondente equazione differenziale:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 2)} \quad \rightarrow$$

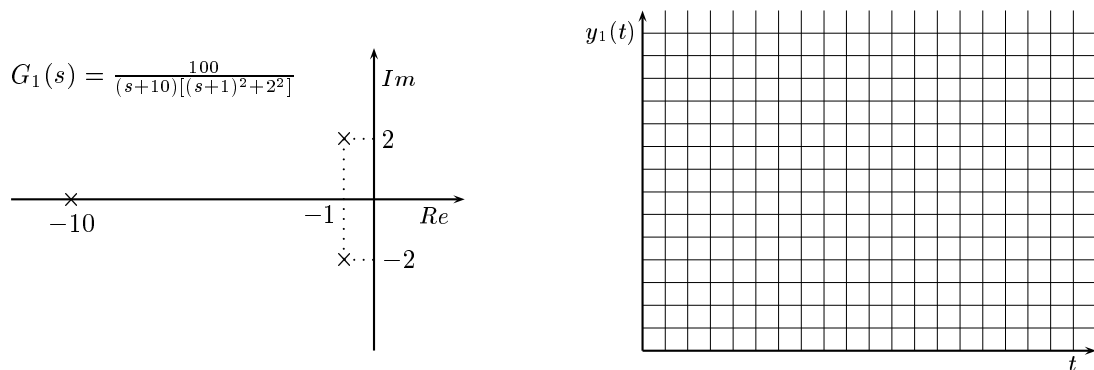
i) Calcolare la scomposizione in fratti semplici della seguente funzione di trasferimento:

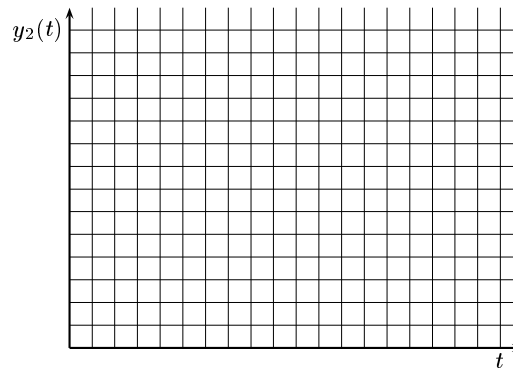
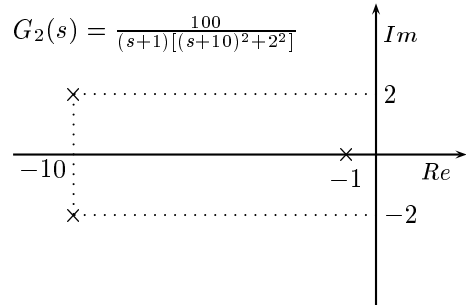
$$G(s) = \frac{6}{s(s + 1)(s + 2)} \quad \rightarrow \quad G(s) =$$

l) Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la funzione temporale  $g_1(t)$  corrispondente alla coppia di poli complessi coniugati  $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ :

$$g_1(t) =$$

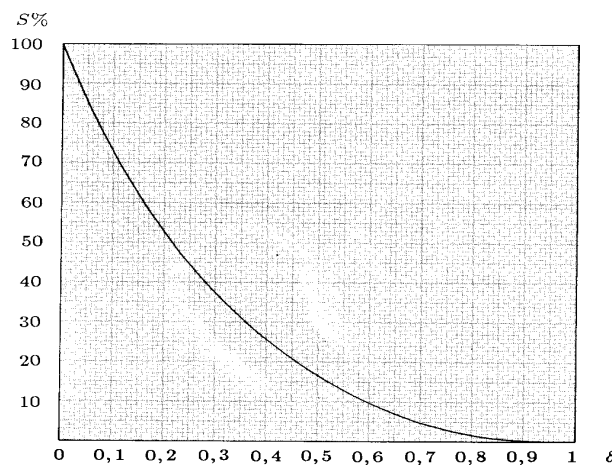
m) Disegnare l'andamento qualitativo  $y(t)$  della risposta al gradino unitario dei seguenti due sistemi  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ :





Per ognuno dei due andamenti riportare:

- il guadagno statico;
- una stima del tempo di assestamento  $T_a$ ;
- il periodo  $T$  dell'oscillazione smorzata (se esiste);
- una stima della massima sovralongazione percentuale  $S$  (utilizzare il grafo riportato a fianco);



a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s^2+6s+25)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 6s^3 + 25s^2 + Ks + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 25 & K & \rightarrow \\ 3 & 6 & K & & \rightarrow \\ 2 & 150 - K & 6K & & \rightarrow \\ 1 & (150 - K)K - 36K & & & \rightarrow \\ 0 & 6K & & & \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} K < 150 \\ 114K - K^2 < 0 \\ K > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$0 < K < 114 = K^*$$

b.1) Le funzioni di trasferimento  $G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$  e  $G_2(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$  sono:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2(s^2+6s+25) + K(s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{(s+1)}{s^2(s^2+6s+25) + K(s+1)}$$

b.2) Il valore a regime  $y_\infty(t)$  dell'uscita  $y(t)$  quando in ingresso sono presenti i segnali  $r(t) = 3$  e  $d(t) = 2$  è:

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s[G_1(s)R(s) + G_2(s)D(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s\left[G_1(s)\frac{3}{s} + G_2(s)\frac{2}{s}\right] \\ &= G_1(0)3 + G_2(0)2 = 3 + \frac{2}{K} \end{aligned}$$

b.3) L'errore a regime  $e_\infty(t)$  corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a gradino  $r(t) = t$  è

$$e_\infty(t) = \frac{1}{K_v}, \quad \text{dove} \quad K_v = \infty$$

Si ottiene quindi che

$$e_\infty(t) = 0$$

c.1) Il margine di fase  $M_F$  e il margine di ampiezza  $M_A$  del sistema si leggono direttamente dal grafico:

$$M_A \simeq 2.3 \quad M_F \simeq 32^\circ$$

c.2) Il diagramma di Nyquist completo per  $\omega \in [-\infty, \infty]$  è mostrato in Fig. 1. In base al criterio di Nyquist, il sistema retroazionato è stabile perchè lascia il punto -1 fuori dal diagramma polare completo.

c.3) La risposta a regime del sistema quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale  $x(t) = 2 \cos(t)$  è la seguente:

$$y(t) = 2|G(j)| \cos(t + \arg G(j)) = 5.716 \cos(t - 149^\circ)$$

Infatti in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1$ , la funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  assume il valore  $G(j) \simeq -2.45 - 1.47j$ . Il modulo e la fase di questo numero complesso sono:

$$|G(j)| = \sqrt{(2.45)^2 + (1.47)^2} = 2.86, \quad \arg G(j) = -180 + \arctan \frac{1.47}{2.45} = -149^\circ$$

d.1) I luoghi delle radici del sistema:

$$G_d(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+1)(s+2)}$$

per  $K > 0$  e per  $K < 0$  sono mostrati, rispettivamente, in Fig. 2 e in Fig. 3.

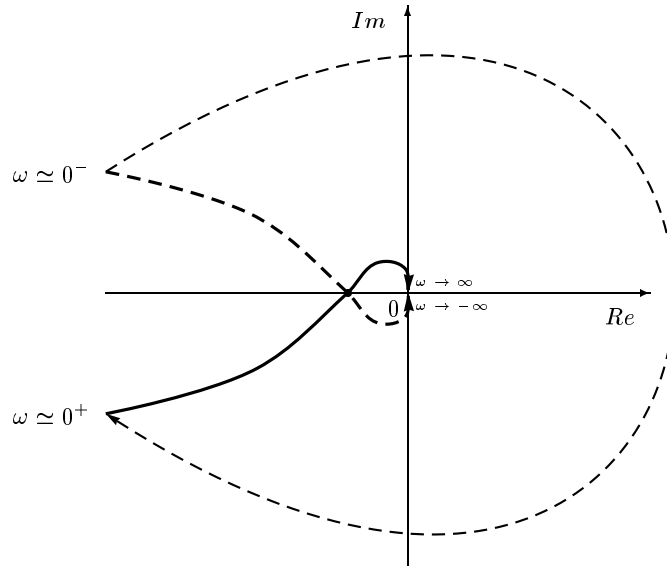


Figura 1: Diagramma di Nyquist “completo”.

d.2) La posizione degli asintoti è mostrata nelle figure. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-1 - 3 + 5) = 1$$

d.3) Il più piccolo tempo di assestamento del sistema retroazionato che si può ottenere al variare del parametro  $K > 0$  si ha in corrispondenza del punto di diramazione  $\sigma_0 \simeq -0.5$ . Il corrispondente tempo di assestamento è  $T_a = 3/0.5 = 6s$ .

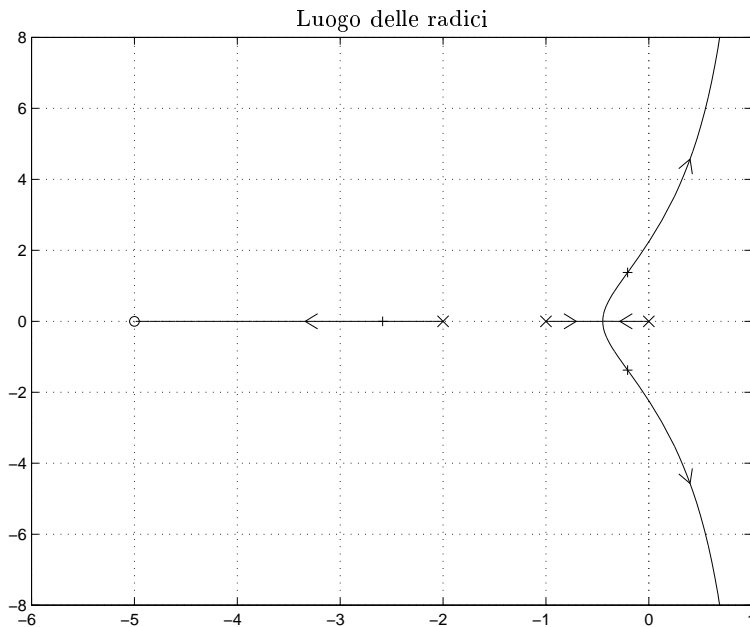


Figura 2: Luogo delle radici della funzione  $G_d(s)$  per  $K > 0$ .

e.1) Il margine di fase  $M_F$  e il margine di ampiezza  $M_A$  del sistema sono i seguenti:

$$M_A \simeq 9 \text{ db} = 2.8, \quad M_F \simeq 34^\circ$$

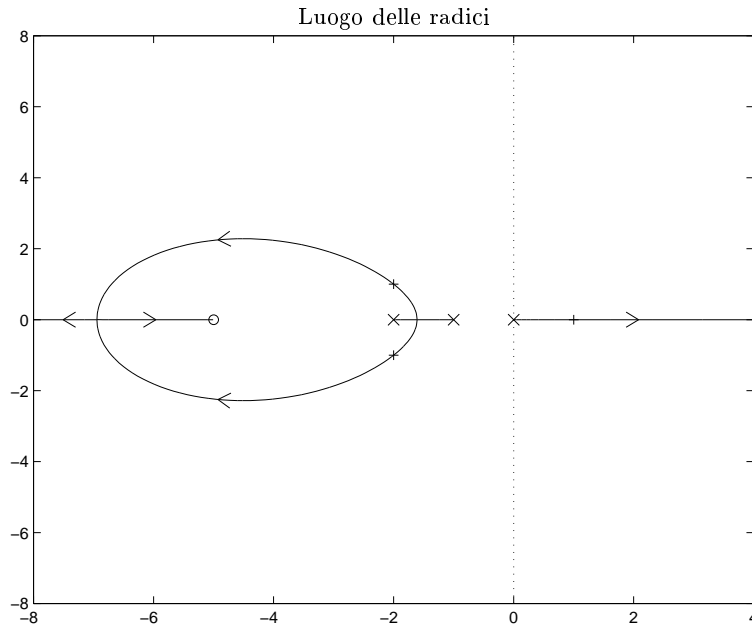


Figura 3: Luogo delle radici della funzione  $G_d(s)$  per  $K < 0$ .

- e.2) La pulsazione in corrispondenza della quale il sistema presenta il massimo guadagno è  $\omega_M \simeq 1$ .
- e.3) La pulsazione in corrispondenza della quale il sistema presenta la fase massima è  $\omega_F \simeq 0.2$ .
- e.4) la risposta a regime  $y_\infty(t)$  del sistema quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale  $x(t) = 2 + \sin(20t)$ .

$$y_\infty(t) = 2|G(0)| + |G(20j)| \sin(20t + \arg G(20j)) \simeq 2 + 0.1 \sin(20t - 210^\circ)$$

Infatti  $|G(0)| = 1$ , mentre il modulo e la fase della funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 20$  valgono:

$$|G(j)| = -20 \text{ db} = 0.1, \quad \arg G(j) \simeq -210^\circ$$

- f) L'ampiezza  $A$  e la fase  $\phi$  della funzione di risposta armonica in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1$  sono:

$$A = 18.86 \text{ db} = 8.771 \quad \phi \simeq -128^\circ$$

Per poter imporre al sistema retroazionato un margine di fase  $M_f = 40^\circ$  occorre attenuare e ritardare delle seguenti quantità

$$M = \frac{1}{A} = -18.86 \text{ db} = 0.114 \quad \varphi = -180^\circ + M_f - \psi \simeq -140^\circ + 128^\circ = -12^\circ$$

Sostituendo  $M = 0.114$  e  $\varphi = -12^\circ$  nelle formule di inversione si ottiene

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 41.5 \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 375$$

La rete ritardatrice ha quindi la seguente forma:

$$R(s) = \frac{1 + 41.5 s}{1 + 375 s}$$

I diagrammi di Nichols della funzione assegnata con e senza rete correttiva sono mostrati in Fig. 4.

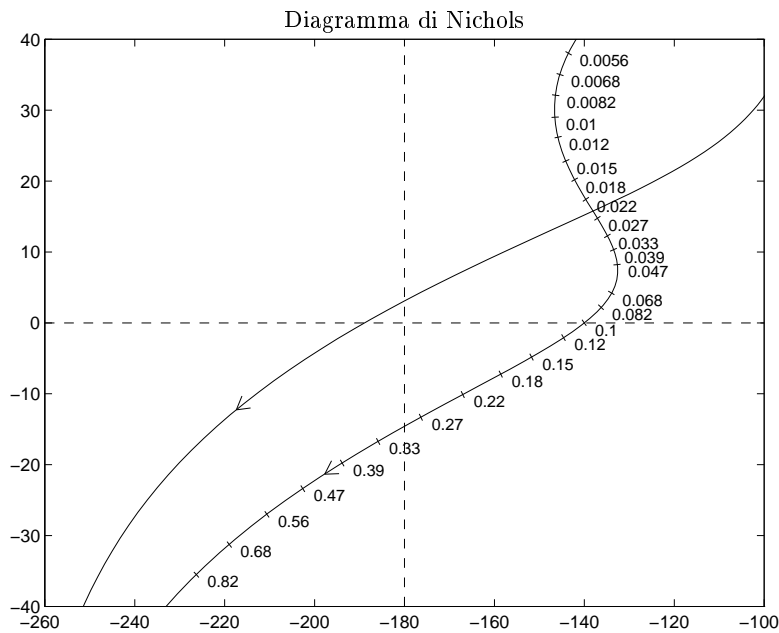


Figura 4: Diagrammi di Nichols della funzione assegnata e del corrispondente sistema con rete ritardatrice.

g) La funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  corrispondente alla seguente equazione differenziale data è:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{x} + 7x \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{s + 7}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5}$$

h) L'equazione differenziale corrispondente alla funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  data è:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{s + 3}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{x} + 3x$$

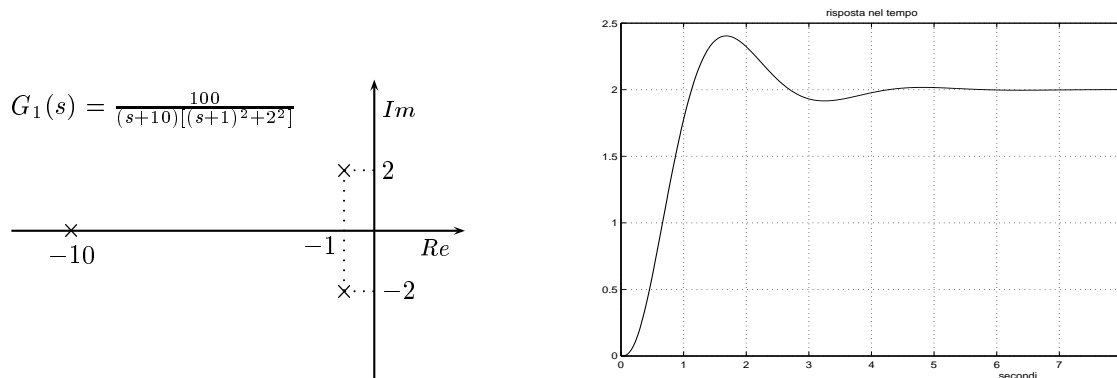
i) La scomposizione in fratti semplici della funzione di trasferimento  $G(s)$  è la seguente:

$$G(s) = \frac{6}{s(s + 1)(s + 2)} \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{3}{s} - \frac{6}{s + 1} + \frac{3}{s + 2}$$

l) Nella scomposizione in fratti semplici, la funzione temporale  $g_1(t)$  corrispondente alla coppia di poli complessi coniugati  $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  è la seguente:

$$g_1(t) = M e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

m) L'andamento qualitativo  $y_1(t)$  della risposta al gradino unitario del sistema  $G_1(s)$  è il seguente:

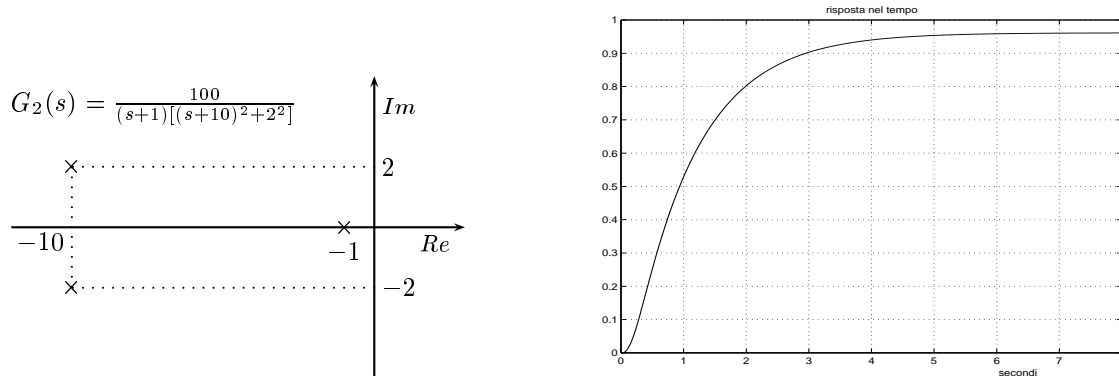


Infatti, il sistema presenta una coppia di poli dominanti  $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega = -1 \pm j2$ . Il guadagno statico  $G(0)$ , il tempo di assestamento  $T_a$ , il periodo  $T$  dell'oscillazione, il coefficiente di smorzamento  $\delta$  e la massima sovraelongazione percentuale  $S$  del sistema si ricavano nel modo seguente:

$$G(0) = 2, \quad T_a = \frac{3}{\sigma} = 3, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.14$$

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447, \quad S \% = 100 e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 20.788$$

L'andamento qualitativo  $y_2(t)$  della risposta al gradino unitario del sistema  $G_2(s)$  è il seguente:



Infatti, il sistema presenta un polo dominante  $p_1 = -\sigma = -1$ . Il guadagno statico  $G(0)$  e il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema si ricavano nel modo seguente:

$$G(0) = \frac{100}{104} = 0.9615, \quad T_a = \frac{3}{\sigma} = 3$$

Il periodo  $T$  dell'oscillazione smorzata, il coefficiente di smorzamento  $\delta$  e la massima sovraelongazione percentuale  $S$  non sono ricavabili in quanto il sistema è dominato da un polo semplice.

**“Controlli Automatici A”** - Ingegneria Meccanica - 25 Marzo 2002 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. La risposta impulsiva  $g(t)$  del sistema  $G(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$ 
  - è limitata ma non tende a zero per  $t \rightarrow \infty$
  - è limitata e tende a zero per  $t \rightarrow \infty$
  - non è limitata
2. Per  $s = j\omega$ , la fase  $\varphi$  del sistema  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$  è
  - $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{2}{\omega}$
  - $\varphi = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{2}{\omega}$
  - $\varphi = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{2}$
3. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, il coefficiente di smorzamento  $\delta$  rimane costante al variare della posizione dei poli su
  - una circonferenza con centro nell'origine
  - una retta uscente dall'origine
  - una retta parallela all'asse immaginario
4. Si ponga la funzione  $\sin 2t$  in ingresso al sistema  $G(s) = \frac{2}{s+2}$ . A regime, l'ampiezza  $A$  e la fase  $\varphi$  della sinusoide  $A \sin(2t + \varphi)$  in uscita valgono
  - $A = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$
  - $A = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$
  - $A = 1/\sqrt{2}$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$
  - $A = 1/\sqrt{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$
5. Partendo da condizioni iniziali nulle e per  $t \geq 0$ , la risposta del sistema  $G(s) = \frac{s}{s^2+1}$  al gradino unitario è
  - $g(t) = 1$
  - $g(t) = \cos t$
  - $g(t) = \sin t$
  - nessuna delle precedenti
6. L'uso di una rete anticipatrice è consigliato
  - per stabilizzare sistemi con margini di fase fortemente negativi
  - se si desidera aumentare il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti
7. La funzione complessa  $X(s) = \frac{1}{(s-2)^3}$  è la trasformata di Laplace
  - di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow \infty$
  - di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow 0$
  - del segnale  $x(t) = 0.5 t^2 e^{2t}$
8. Un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento nullo ( $\delta = 0$ ):
  - ha un picco di risonanza infinito  $M_R \rightarrow \infty$
  - ha un picco di risonanza unitario  $M_R = 1$
  - ha un guadagno statico finito

9. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento  $T_a$  rimane costante al variare della posizione dei poli
- su di una retta parallela all'asse immaginario
  - su di una circonferenza con centro nell'origine
  - su di una retta uscente dall'origine
  - su di un'ellisse con fuoco nell'origine
10. La massima sovraelongazione in % del sistema  $G(s) = \frac{1}{1+s^2}$  in risposta ad un ingresso a gradino è
- $S = 0\%$
  - $S = 1\%$
  - $S = 10\%$
  - $S = 100\%$
11. In una rete ritardatrice, all'aumentare di  $\omega$  da zero all'infinito
- agisce prima il polo e poi lo zero
  - agisce prima lo zero e poi il polo
12. Per  $K_1 > 0$ , un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra
- un numero totale dispari di poli
  - un numero totale pari di poli
  - un numero totale dispari di poli e zeri
  - un numero totale pari di poli e zeri
13. Un sistema di tipo 2
- ha due poli nell'origine
  - ha due zeri nell'origine
  - ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino
  - ha un errore a regime non nullo nella risposta alla parabola
14. Un sistema in retroazione negativa avente  $G(s)$  sul ramo diretto,  $H(s)$  sul ramo di retroazione ed avente un elevato guadagno di anello risulta poco sensibile
- ai disturbi additivi agenti sul sistema
  - alle variazioni parametriche di  $G(s)$
  - alle variazioni parametriche di  $H(s)$
15. Dato il sistema lineare  $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$ , il valore finale ( $t \rightarrow \infty$ ) della risposta  $h(t)$  ad un gradino di ampiezza 2 vale:
- $h(\infty) = 0$
  - $h(\infty) = 1$
  - $h(\infty) = \frac{2}{3}$
  - $h(\infty) = \infty$
16. L'effetto stabilizzante di una rete anticipatrice deriva
- dall'anticipo di fase introdotto dalla rete
  - dall'amplificazione introdotta dalla rete alle alte frequenze
  - dall'attenuazione introdotta dalla rete alle basse frequenze
17. Il diagramma polare di una funzione razionale strettamente propria tende all'origine per  $\omega \rightarrow \infty$
- sempre
  - solo se il sistema è di tipo 0