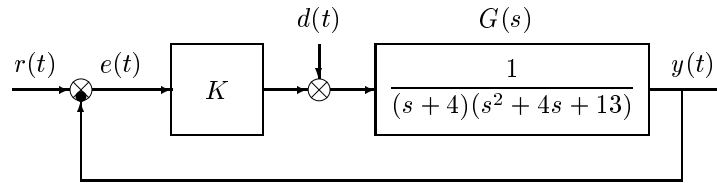


Nome dello studente: \_\_\_\_\_

Numero di matricola: \_\_\_\_\_

Per ognuno degli esercizi proposti, riportare su questo foglio il risultato finale e sul foglio a quadretti che vi è stato fornito gli eventuali calcoli intermedi.

a) Si faccia riferimento al seguente schema a blocchi:



a.1) Determinare per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

$$\dots < K < \dots$$

a.2) Utilizzando la formula di Mason, calcolare le funzioni di trasferimento  $G_1(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$  e  $G_2(s) = \frac{E(s)}{D(s)}$  che legano il segnale di riferimento  $r(t)$  e il segnale di disturbo  $d(t)$  alla variabile errore  $e(t)$ :

$$G_1(s) =$$

$$G_2(s) =$$

a.3) Calcolare, in funzione di  $K$ , il valore a regime  $e_\infty(t)$  della variabile errore  $e(t)$  quando in ingresso sono contemporaneamente presenti i segnali  $r(t) = 2$  e  $d(t) = 3$ .

$$e_\infty(t) =$$

a.4) Calcolare, in funzione di  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  nei 2 casi: 1) in presenza dei segnali  $r(t) = 2$  e  $d(t) = 0$ ; 2) in presenza dei segnali  $r(t) = t$  e  $d(t) = 0$ ;

$$e_p =$$

$$e_v =$$

a.5) Calcolare il modulo  $|G(j0^+)| =$  e la fase  $\arg G(j0^+) =$  della funzione  $G(s)$  per  $\omega = 0^+$ ;

a.6) Calcolare il modulo  $|G(j\infty)| =$  e la fase  $\arg G(j\infty) =$  della funzione  $G(s)$  per  $\omega = \infty$ ;

a.7) Disegnare (sul foglio a quadretti) il diagramma polare “completo” della funzione  $G(s)$ .

a.8) Calcolare il margine d'ampiezza  $M_A =$  della funzione  $G(s)$ .

a.9) Calcolare l'intersezione  $\sigma_0 =$  della funzione  $G(j\omega)$  con il semiasse reale negativo.

b) Disegnare in modo qualitativo il diagramma di Bode dei moduli della funzione:

$$G_2(s) = \frac{10}{1 + 10s}$$

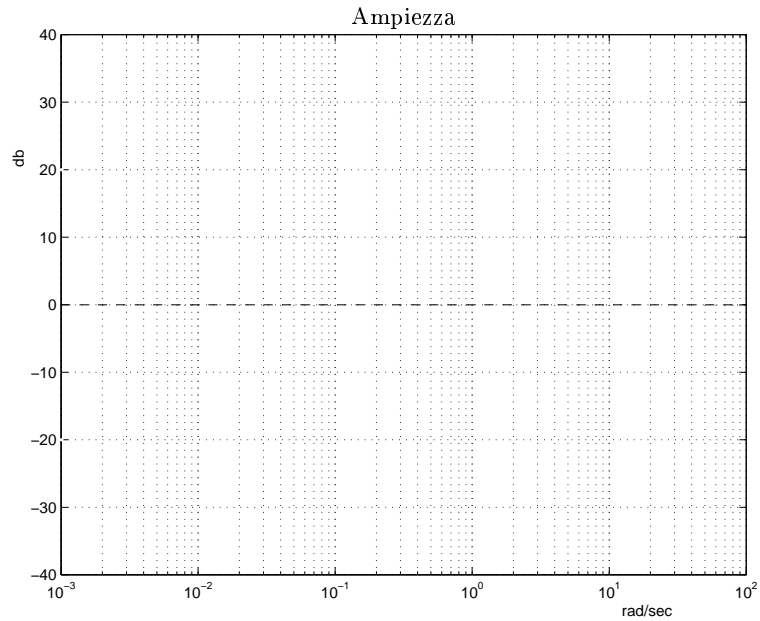
b.1) Calcolare il guadagno statico del sistema:  $G_0 =$  ;

b.2) Disegnare il diagramma asintotico di Bode dei moduli della funzione  $G_2(s)$ . Utilizzare la carta logaritmica riportata sotto;

b.3) Calcolare la larghezza di banda  $\omega_f =$  del sistema  $G_2(s)$ ;

b.4) Calcolare la pulsazione  $\omega_\varphi =$  in corrispondenza della quale la fase  $\varphi$  del sistema  $G_2(s)$  vale  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ;

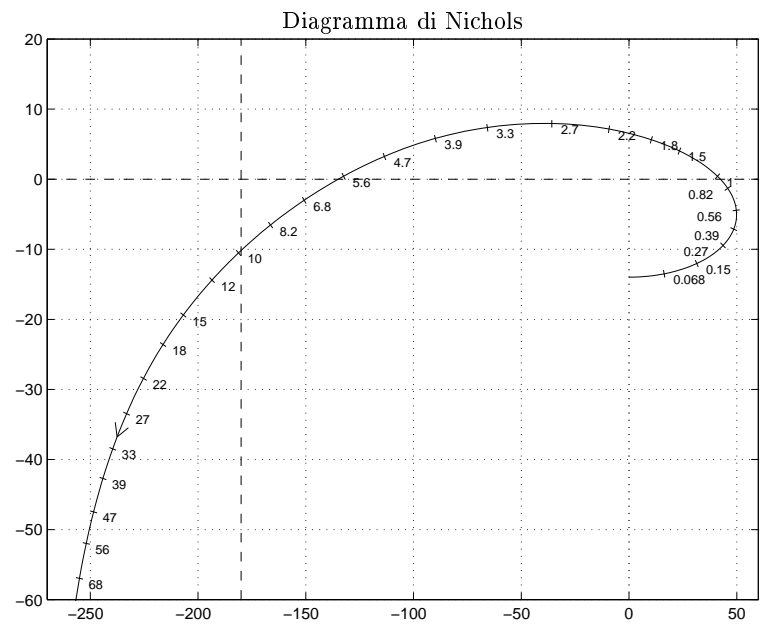
b.5) Calcolare approssimativamente il guadagno  $M =$  del sistema  $G_2(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 10$ ;



c) Si consideri il diagramma di Nichols riportato sotto. Calcolare in modo approssimato:

- c.1) il margine di fase  $M_F$  e il margine di ampiezza  $M_A$  del sistema:  $M_A =$                     e  $M_F =$                     ;
- c.2) la pulsazione  $\omega_M$  in corrispondenza della quale il sistema presenta il massimo guadagno e il valore  $G_M$  del massimo guadagno:  $\omega_M =$                     e  $G_M =$                     ;
- c.3) la pulsazione  $\omega_F$  in corrispondenza della quale il sistema presenta la fase massima e il valore  $F_M$  della fase massima:  $\omega_F =$                     e  $F_M =$                     ;
- c.4) il guadagno statico  $G_0$  del sistema:  $G_0 =$                     ;
- c.5) la risposta a regime  $y_\infty(t)$  del sistema quando in ingresso è presente il segnale  $x(t) = 5 + \sin(15t)$ .

$y_\infty(t) =$



d) Si consideri del seguente sistema:

$$G_d(s) = \frac{K(s+1)}{s(1+2s)(1+3s)(1+6s)}$$

d.1) Tracciare qualitativamente (sul foglio a quadretti) il luogo delle radici del sistema  $G_d(s)$  per  $K > 0$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione solo in modo "qualitativo".

d.2) Calcolare esattamente la posizione del centro degli asintoti:  $\sigma_a = \dots$

d.3) Dare una stima del più piccolo tempo di assestamento del sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ :  $T_a = \dots$

e) Si consideri il diagramma di Nyquist riportato a fianco.

e.1) Il margine di fase  $M_F =$  del sistema;

e.2) Calcolare la risposta a regime del sistema quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale  $x(t) = 2 \cos(8.2t)$ .

$$y(t) =$$

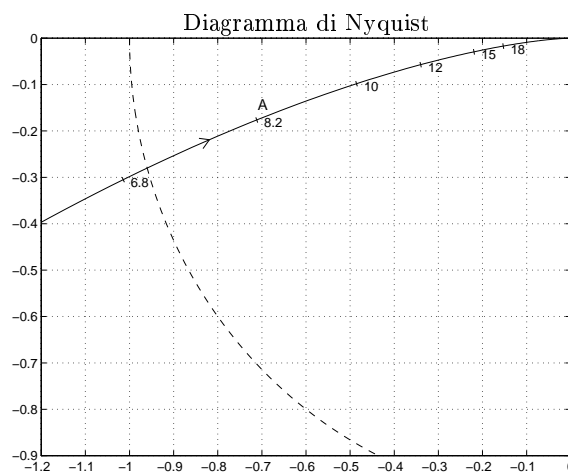
e.3) Date le seguenti formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

Calcolare i parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di una rete anticipatrice:

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da imporre al sistema retroazionato un margine di fase  $M_\varphi = 45^\circ$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 8.2$ .



f) Si consideri la risposta al gradino unitario del sistema a poli dominanti  $G(s)$  (ignoto) riportata sotto. Calcolare in modo approssimato:

f.1) il guadagno statico  $G_0 =$  del sistema;

f.2) la massima sovraelongazione percentuale  $S\% =$  ;

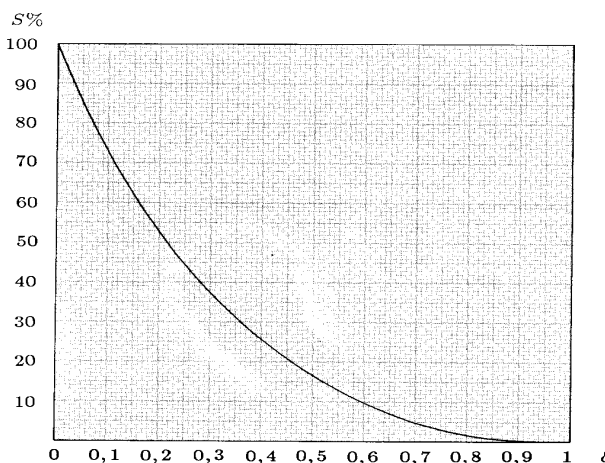
f.3) il coefficiente di smorzamento  $\delta =$  (si utilizzi il grafico riportato a fianco);

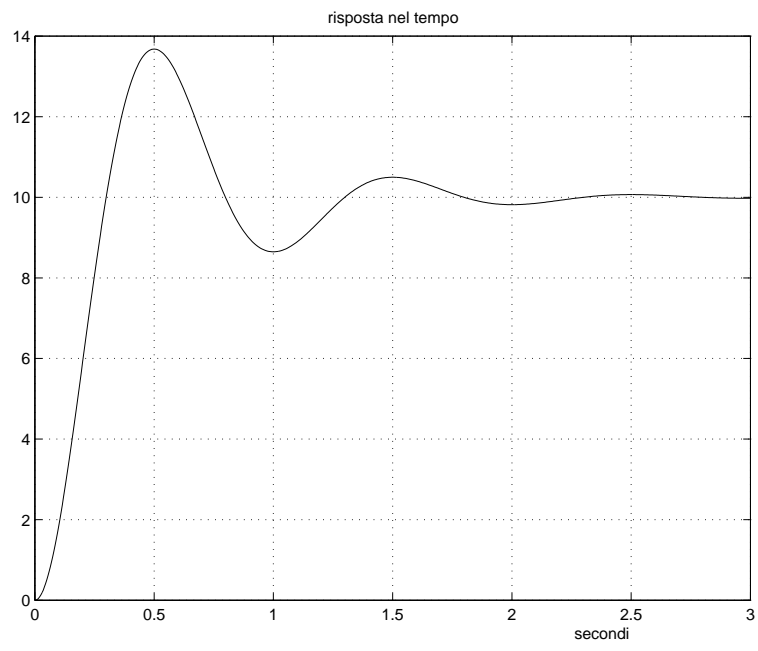
f.4) la pulsazione  $\omega =$  dell'oscillazione smorzata;

f.5) la pulsazione naturale  $\omega_n =$  ;

f.6) il tempo di assestamento  $T_a =$  ;

f.7) stimare la posizione dei poli dominanti  $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = \pm j$  del sistema  $G(s)$ ;





a) Nel caso in cui sia  $T(s) = K$ , l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{(s+4)(s^2+4s+13)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 8s^2 + 29s + 52 + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh ha la seguente struttura

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 29 \\ 2 & 8 & 52 + K \\ 1 & 180 - K & \\ 0 & 52 + K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile per i seguenti valori di  $K$

$$-52 < K < 180 = K^*$$

(Facoltativo) La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^* = 180$  vale

$$\omega^* = \sqrt{29} \simeq 5.385$$

a.2) Le funzioni di trasferimento  $G_1(s) = \frac{E(s)}{R(s)}$  e  $G_2(s) = \frac{E(s)}{D(s)}$  sono:

$$G_1(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + K G(s)}, \quad G_2(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{G(s)}{1 + K G(s)}$$

a.3) Il valore a regime  $e_\infty(t)$  della variabile errore  $e(t)$  quando in ingresso sono presenti i segnali  $r(t) = 2$  e  $d(t) = 3$  è:

$$\begin{aligned} e_\infty(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s [G_1(s) R(s) + G_2(s) D(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ G_1(s) \frac{2}{s} + G_2(s) \frac{3}{s} \right] \\ &= G_1(0) 2 + G_2(0) 3 = \frac{2}{1 + \frac{K}{52}} - \frac{\frac{3}{52}}{1 + \frac{K}{52}} = \frac{101}{52 + K} \end{aligned}$$

a.4) L'errore di posizione per ingresso a gradino  $r(t) = 2$  è

$$e_p = \frac{2}{1 + K_p}, \quad \text{dove} \quad K_p = \frac{K}{52}$$

Si ottiene quindi che

$$e_v = \frac{2}{1 + \frac{K}{52}} = \frac{104}{52 + K}$$

L'errore di velocità per ingresso a rampa  $r(t) = t$  vale

$$e_v = \frac{1}{K_v}, \quad \text{dove} \quad K_v = 0$$

Si ottiene quindi che:

$$e_v = \infty$$

a.5) Per  $\omega = 0^+$ , il modulo e la fase della funzione  $G(j\omega)$  sono:  $|G(j0^+)| = \frac{1}{52}$  e  $\arg G(j0^+) = 0$  ;

a.6) Per  $\omega \rightarrow \infty$ , il modulo e la fase della funzione  $G(j\omega)$  sono:  $|G(j\infty)| = 0$  e  $\arg G(j\infty) = -\frac{3}{2}\pi$ ;

a.7) Il diagramma polare “completo” della funzione  $G(s)$  è mostrato in Fig. 1.

a.8) Il margine d'ampiezza della funzione  $G(s)$  è  $M_A = 180$  .

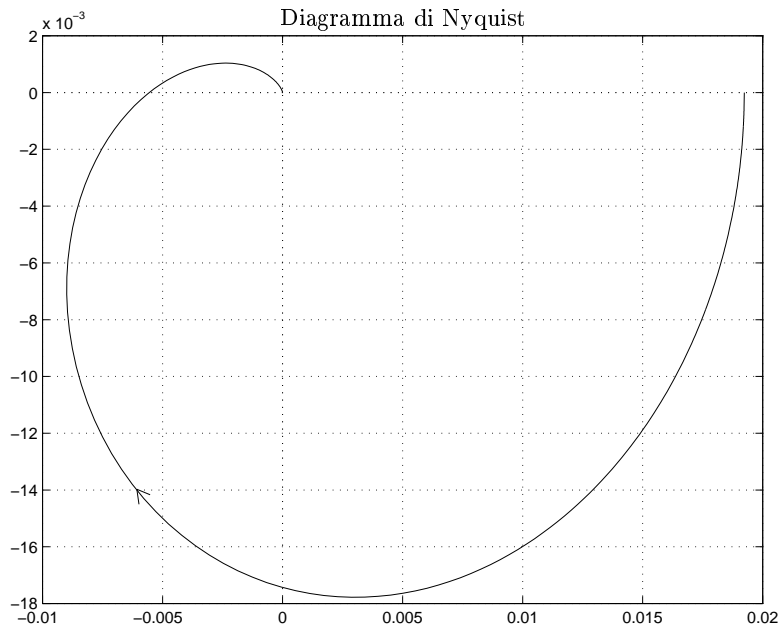


Figura 1: Diagramma polare “completo” della funzione  $G(s)$ .

- a.9) L'intersezione della funzione  $G(j\omega)$  con il semiasse reale negativo è  $\sigma_0 = -\frac{1}{180}$ .
- b.1) Il guadagno statico del sistema è:  $G_0 = 10$ ;
- b.2) Il diagramma asintotico di Bode dei moduli della funzione  $G_2(s)$  è mostrato in Fig. 2;
- b.3) La larghezza di banda del sistema  $G_2(s)$  è:  $\omega_f = 0.1$ ;
- b.4) La pulsazione in corrispondenza della quale la fase  $\varphi$  del sistema  $G_2(s)$  vale  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  è:  $\omega_\varphi = 0.1$ ;
- b.5) Il guadagno del sistema  $G_2(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 10$  vale:  $M = 0.1$  ;
- c.1) Il margine di fase  $M_F$  e il margine di ampiezza  $M_A$  del sistema sono:  $M_A \simeq 10 \text{ db} = 3.16$  e  $M_F = 45^\circ$ ;
- c.2) La pulsazione  $\omega_M$  in corrispondenza della quale il sistema presenta il massimo guadagno e il valore  $G_M$  del massimo guadagno sono:  $\omega_M = 2.7$  e  $G_M = 8 \text{ db} \simeq 2.5$ ;
- c.3) La pulsazione  $\omega_F$  in corrispondenza della quale il sistema presenta la fase massima e il valore  $F_M$  della fase massima valgono:  $\omega_F = 0.56$  e  $F_M = 50^\circ$ ;
- c.4) Il guadagno statico  $G_0$  del sistema è:  $G_0 = -14 \text{ db}$ ;
- c.5) La risposta a regime  $y_\infty(t)$  del sistema quando in ingresso è presente il segnale  $x(t) = 5 + \sin(15t)$  vale:

$$y_\infty(t) \simeq 1 + 0.1 \sin(15t - 210^\circ)$$

- d.1) Il luogo delle radici del sistema:

$$G_d(s) = \frac{K(s+1)}{s(1+2s)(1+3s)(1+6s)}$$

per  $K > 0$  è mostrato in Fig. 3.

- d.2) La posizione degli asintoti è mostrata in Fig. 3. Il centro degli asintoti è l'origine:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + 1 \right) = 0$$

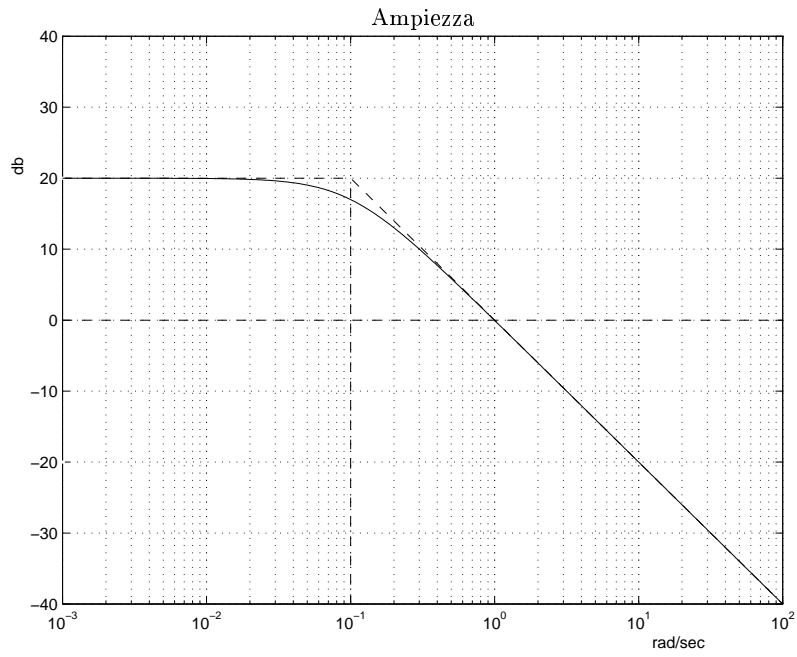


Figura 2: Diagramma asintotico di Bode dei moduli della funzione  $G_2(s)$ .

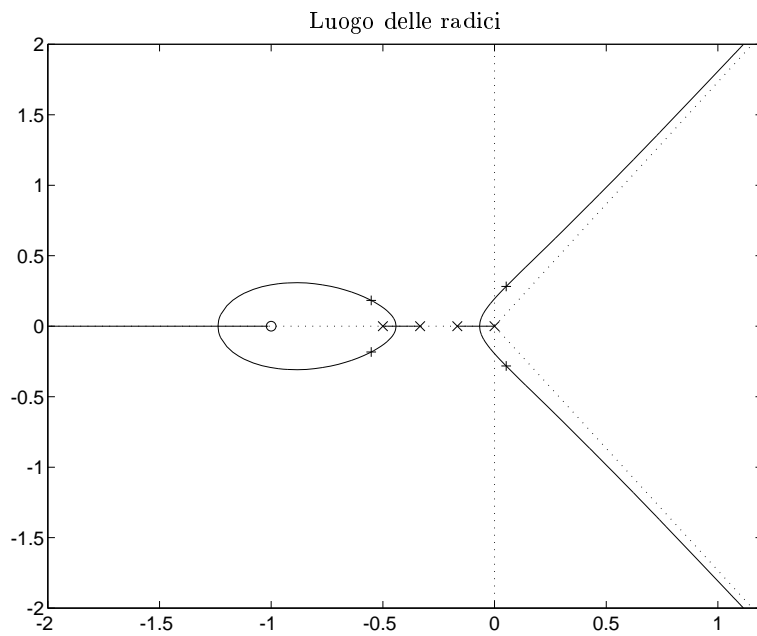


Figura 3: Luogo delle radici della funzione  $G_d(s)$  per  $K > 0$ .

- d.3) Il più piccolo tempo di assestamento del sistema retroazionato lo si ottiene al variare del parametro  $K > 0$  in corrispondenza del punto di diramazione  $\sigma_0 \simeq -\frac{1}{12}$ . Il corrispondente tempo di assestamento è  $T_a \simeq 36$  s.
- e.1) Il margine di fase del sistema è  $M_F \simeq 16.2^\circ$ ;
- e.2) L'ampiezza  $M_A$  e la fase  $\varphi_A$  del punto A si ottengono dal diagramma polare della funzione di risposta armonica  $G(j\omega) = M_A e^{j\varphi_A}$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 8.2$ :

$$M_A \simeq \sqrt{0.71^2 + 0.176^2} = 0.73, \quad \varphi_A \simeq \arctan \frac{0.176}{0.71} - 180 = 14 - 180 = -166^\circ = 194^\circ$$

La risposta a regime del sistema quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale  $x(t) = 2 \cos(8.2t)$  vale:

$$y(t) = 1.46 \cos(8.2t + 194^\circ)$$

- e.3) Il guadagno  $M$  e l'anticipo  $\varphi$  che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione  $\omega = 8.2$  per portare il punto A in  $B = (M_B, \varphi_B) = (1, 225^\circ)$  sono

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.73} = 1.37 \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 225^\circ - 194^\circ = 31^\circ$$

Sostituendo questi valori nelle formule di inversione si ricava

$$\tau_1 = \frac{1.37 - \cos 31^\circ}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.1214, \quad \tau_2 = \frac{\cos 31^\circ - \frac{1}{1.37}}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.0301$$

per cui la rete anticipatrice cercata è

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 0.1214 s}{1 + 0.0301 s}$$

L'andamento del diagramma di Nyquist del sistema originario  $G(s)$  e del sistema compensato  $T(s)G(s)$  sono mostrati in Fig. 4.

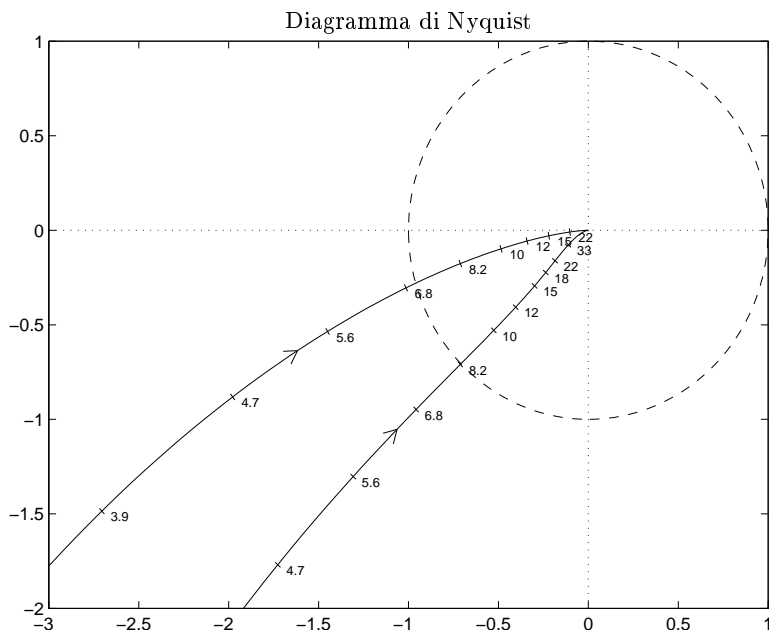


Figura 4: L'andamenti dei diagrammi di Nyquist del sistema originario  $G(s)$  e del sistema compensato  $T(s)G(s)$ .

- f.1) Il guadagno statico del sistema è:  $G_0 = 10$ ;

- f.2) La massima sovraelongazione percentuale vale  $S\% = 38\%$ ;
- f.3) Il coefficiente di smorzamento è:  $\delta = 0.3$ ;
- f.4) La pulsazione  $\omega$  dell'oscillazione smorzata vale:  $\omega = 2\pi$ ;
- f.5) La pulsazione naturale vale:  $\omega_n = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = 6.59$ ;
- f.6) Il tempo di assestamento è  $T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3\sqrt{1-\delta^2}}{2\delta\pi} = 1.5$ ;
- f.7) Una stima della posizione dei poli dominanti del sistema  $G(s)$  è:  $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = 2 \pm 2\pi j$ ;

**“Controlli Automatici A” - Ingegneria Meccanica - 9 Aprile 2002 - Domande Teoriche**

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. Calcolare la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y + 4x = \ddot{x} + 3x \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{s^2 + 3}{s^3 + 2s^2 + 5s + 4}$$

2. Data la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ , calcolare la corrispondente equazione differenziale:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 6s^2 + 2s + 5} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + 6\dot{y} + 2y + 5x = \dot{x} + 3x$$

3. Calcolare la scomposizione in fratti semplici della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4}{(s + 1)(s + 2)} \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{4}{s + 1} - \frac{4}{s + 2}$$

4. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione della coppia di poli complessi coniugati  $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  corrispondente all'andamento temporale  $g_1(t) = 8e^{-2t} \sin(7t + 0.6)$ :

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -2 \pm j7$$

5. Calcolare la risposta impulsiva  $g(t)$  del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)^3} \quad \rightarrow \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{t^2}{2} e^{-2t}$$

6. Calcolare la trasformata di Laplace  $G(s)$  del seguente segnale  $g(t)$ :

$$g(t) = 2 \sin(3t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{6}{s^2 + 9}$$

7. Calcolare la trasformata di Laplace  $G(s)$  di un gradino unitario  $u(t)$  ritardato di tempo  $t_0$ :

$$g(t) = u(t - t_0) \quad \rightarrow \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{e^{-t_0 s}}{s}$$

8. Calcolare il valore iniziale  $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+}$  e il valore finale  $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty}$  del segnale  $y(t)$  corrispondente alla seguente trasformata di Laplace  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{7s^3 + 4s + 1}{s(s^3 + 5s + 6)} \quad \rightarrow \quad y_0 = 7; \quad y_\infty = \frac{1}{6}$$

9. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, il tempo di assestamento  $T_a$  rimane costante al variare della posizione dei poli su

- una circonferenza con centro nell'origine
- una retta uscente dall'origine
- una retta parallela all'asse immaginario
- in nessuno dei precedenti casi

10. La funzione complessa  $G(s) = \frac{1}{s^2}$  è la trasformata di Laplace
- di un segnale a gradino;
  - di un segnale a rampa;
  - della risposta impulsiva di un doppio integratore;
  - della risposta al gradino di un integratore;
11. L'uso di una rete ritardatrice è consigliato
- per stabilizzare sistemi con margini di fase fortemente negativi;
  - se si desidera aumentare la larghezza di banda  $\omega_f$  del sistema;
12. In un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati il picco di risonanza  $M_R$  aumenta:
- se il coefficiente di smorzamento  $\delta$  aumenta;
  - se il coefficiente di smorzamento  $\delta$  diminuisce;
  - se la pulsazione naturale  $\omega_n$  aumenta;
  - se la pulsazione naturale  $\omega_n$  diminuisce;
13. La rete correttiva  $R(s) = \frac{1+3s}{1+5s}$ :
- è una rete anticipatrice;
  - è una rete ritardatrice;
14. Un sistema di tipo 1
- ha un polo nell'origine
  - ha uno zero nell'origine
  - ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino
  - ha un errore a regime non nullo nella risposta alla rampa
15. Un sistema in retroazione negativa avente  $G(s)$  sul ramo diretto e  $H(s)$  sul ramo di retroazione, è poco sensibile alle variazioni parametriche di  $G(s)$
- a tutte le frequenze;
  - alle frequenze a cui corrisponde un elevato guadagno di anello;
  - alle frequenze a cui corrisponde un basso guadagno di anello;
16. Il diagramma di Nyquist completo di un sistema  $G(s)$  di tipo 1 va chiuso all'infinito
- con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
  - con una semicirconferenza che parte da  $\omega = 0^-$ ;
  - con una circonferenza percorsa in senso orario;
  - con una circonferenza che parte da  $\omega = 0^-$ ;
17. Per  $\omega > 0$ , il diagramma "reale" di Bode delle ampiezze della funzione  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$  coincide con il diagramma "asintotico"
- per nessun valore di  $\omega$  al finito
  - in un solo punto al finito  $\omega = 1/\tau$
  - per tutti i valori di  $\omega$
18. Per  $K_1 < 0$ , un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra
- un numero totale dispari di poli
  - un numero totale pari di poli
  - un numero totale dispari di poli e zeri
  - un numero totale pari di poli e zeri