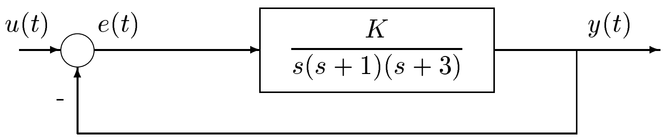
1. Sia dato il seguente sistema:



1.a Si determini in modo qualitativo il luogo delle radici del sistema al variare del parametro K. Si tracci il luogo sia per $K > 0$ sia per $K < 0$, determinando con esattezza il centro della stella di asintoti.

I luoghi delle radici per $K > 0$ e per $K < 0$ sono riportati nella Fig. 4.

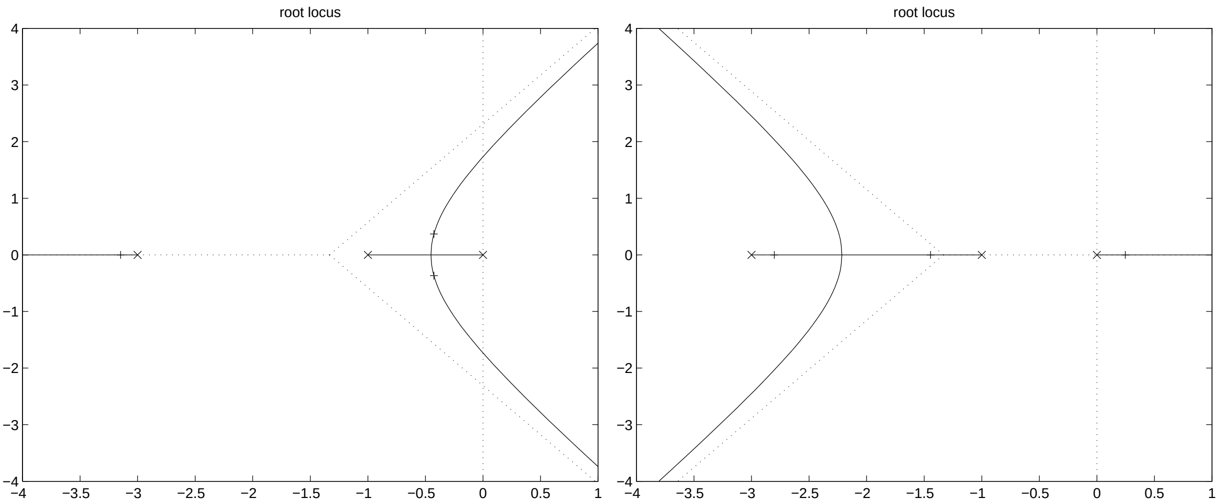


Figura 4: Luogo delle radici per $K > 0$ e per $K < 0$.

La stella di asintoti ha centro in $\sigma_a = -4/3 = -1.333$ (angoli 120^o).

1.b Si determini per quali valori di K il sistema in retroazione è stabile.

La tabella di Routh del sistema è:

$$\begin{array}{c|lll} 3 & 1 & 3 & \\ 2 & 4 & K & \\ 1 & 12-K & 0 & K < 12 \\ 0 & K & & K > 0 \end{array}$$

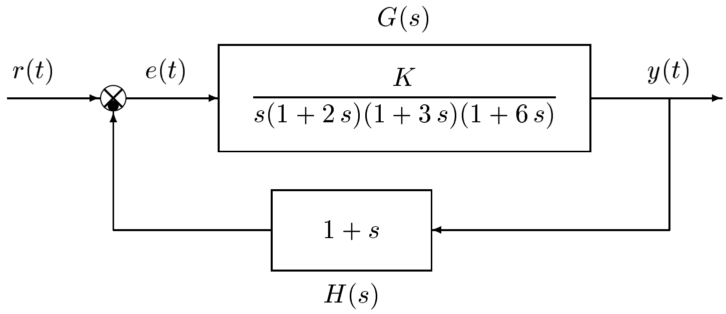
Il sistema risulta stabile per $0 < K < 12$. Per $K = 12$, la seconda riga della tabella fornisce $\omega = \pm\sqrt{3}$.

1.c Determinare il valore di K per cui il sistema in retroazione ha un errore a regime $e_r = 0.3$ per ingresso a rampa $u(t) = 0.5t$.

L'errore a regime per ingresso a rampa $U(s) = 0.5/s^2$ è $E_r = 0.5/K_v$, dove

$$K_v = \frac{K}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad K = 5$$

2. Sia dato il seguente sistema in retroazione:



2.a) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è stabile.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(1+2\,s)(1+3\,s)(1+6\,s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 36\,s^4 + 36\,s^3 + 11\,s^2 + (1+K)s + K = 0$$

a cui corrisponde la seguente tabella di Routh

4	36	11	K
3	36	$(1+K)$	
2	$(10-K)$	K	
1	$(10-K)(1+K)-36K$		
0	K		

Il sistema retroazionato risulta stabile se tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono positivi: $10 - K \geq 0$, $-K^2 - 27\,K + 10 \geq 0$ e $K \geq 0$. Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono:

$$K_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-27 \pm \sqrt{27^2 + 40}\right) = \frac{1}{2}\left(-27 \pm \sqrt{769}\right) = \begin{cases} 0.3654 \\ -27.36 \end{cases}$$

Il sistema risulta stabile per $0 \leq K \leq 0.3654$.

2.b) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del guadagno di anello $G(s)H(s)$ al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Si calcoli esattamente il centro stella degli asintoti. Non è necessario calcolare esattamente la posizione dei punti di diramazione: determinare la loro posizione solo in modo qualitativo.

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del guadagno di anello $G(s)H(s)$ per $K > 0$ e per $K < 0$ è riportato in Fig. 5.

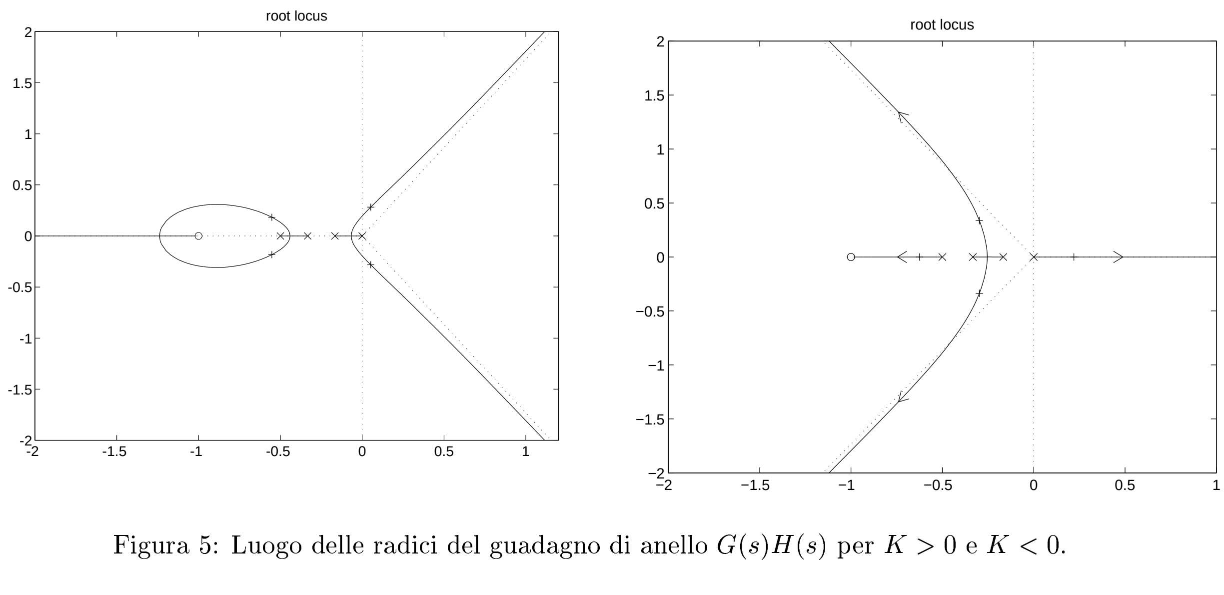
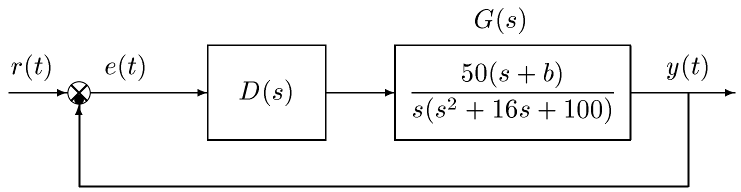


Figura 5: Luogo delle radici del guadagno di anello $G(s)H(s)$ per $K > 0$ e $K < 0$.

Il centro della stella di asintoti è l'origine.

3. Sia dato il seguente sistema in retroazione:



3.a) Posto $D(s) = K$ e $b > 0$, determinare in funzione di b per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{50K(s+b)}{s(s^2+16s+100)} = 0 \qquad \to \qquad s^3 + 16s^2 + (100+50\,K)s + 50\,K\,b = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc ll}
3 & 1 & (100+50\,K) & \to & 1>0 \\
2 & 16 & 50\,K\,b & \to & 16>0 \\
1 & 16(100+50\,K)-50\,K\,b & & \to & 16(2+K)-K\,b>0 \\
0 & 50\,K\,b & & \to & K\,b>0
\end{array}$$

I valori di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile sono quelli che rendono positivi tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh:

$$K\,b > 0, \qquad\qquad 32 + (16-b)K > 0$$

Si distinguono due casi:

$$\begin{array}{llcl}
1) & 0 < b < 16 & \to & K > 0 \\
2) & b > 16 & \to & 0 < K < \dfrac{32}{b-16} = K^*
\end{array} \tag{1}$$

3.b) Posto $D(s) = 3.2$ e $b = 10$, determinare il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita $y(t)$ in risposta al seguente segnale di riferimento: $r(t) = 2 + 3\sin 10t$.

Posto $D(s) = 3.2$ e $b = 10$, la funzione di trasferimento $G_0(s)$ che lega l'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$ è la seguente

$$G_0(s) = \frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} = \frac{160(s+10)}{s(s^2+16s+100)+160(s+10)}$$

Il guadagno statico del sistema è certamente unitario perchè in $G(s)$ è presente un integratore: $G_0(0) = 1$. Per $\omega = 10$ la funzione di risposta armonica del sistema vale

$$G_0(10j) = \frac{160(10j+10)}{10j(-100+16*10j+100)+160(10j+10)} = 1 - j = \sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

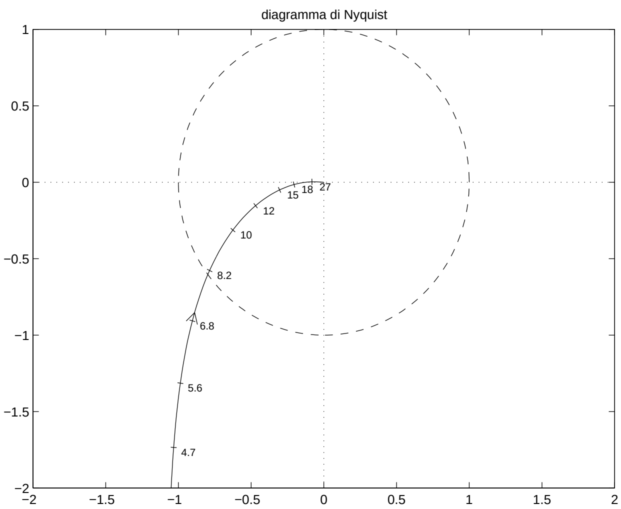
Utilizzando i concetti di "sovrapposizione degli effetti" e di "funzione di risposta armonica" (concetti validi per sistemi lineari stabili), possiamo direttamente scrivere che il valore a regime $y_\infty(t)$ dell'uscita in risposta al segnale di riferimento $r(t) = 2 + 3\sin 10t$ è

$$y_\infty(t) = 2 + 3\sqrt{2}\sin(10t + \frac{\pi}{4})$$

3.c) Posto $b = 20$, la funzione di trasferimento $G(s)$ vale

$$G(s) = \frac{50(s+20)}{s(s^2+16s+100)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist è il seguente.



Utilizzando il criterio di Routh, determinare l'intersezione con il semiasse reale negativo.

Esiste un'intersezione σ_1 con il semiasse negativo che può essere facilmente individuata utilizzando i risultati dall'analisi di stabilità svolta al punto a). Sostituendo $b = 20$ in (1) si determina il margine di ampiezza M_a del sistema e da questo si ricava poi l'intersezione σ_1 con il semiasse negativo

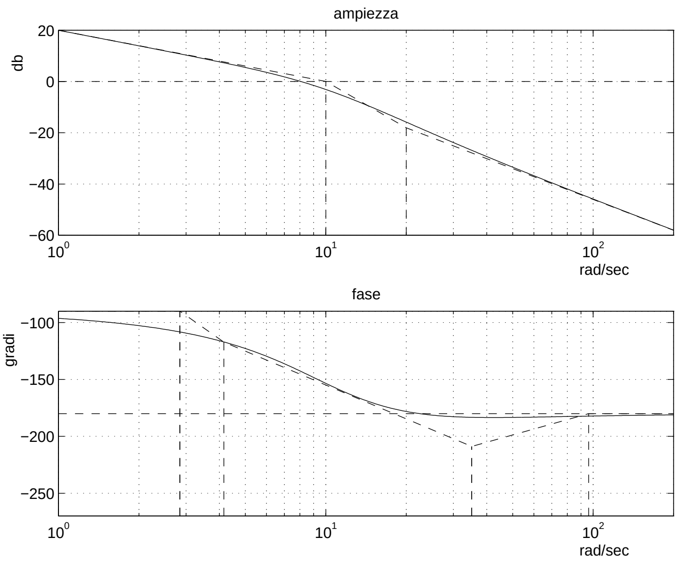
$$M_a = \frac{32}{20 - 16} = 8 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_1 = -\frac{1}{M_a} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

L'intersezione con il semiasse negativo avviene alla pulsazione $\omega_1 = \sqrt{500}$.

Fornire una stima approssimativa del margine di fase e del margine di ampiezza del sistema:

$$M_f \simeq 40^o, \qquad\qquad M_A = 8$$

3.d) Siano dati i seguenti diagrammi asintotici di Bode:



Calcolare i margini di fase e di ampiezza del sistema.

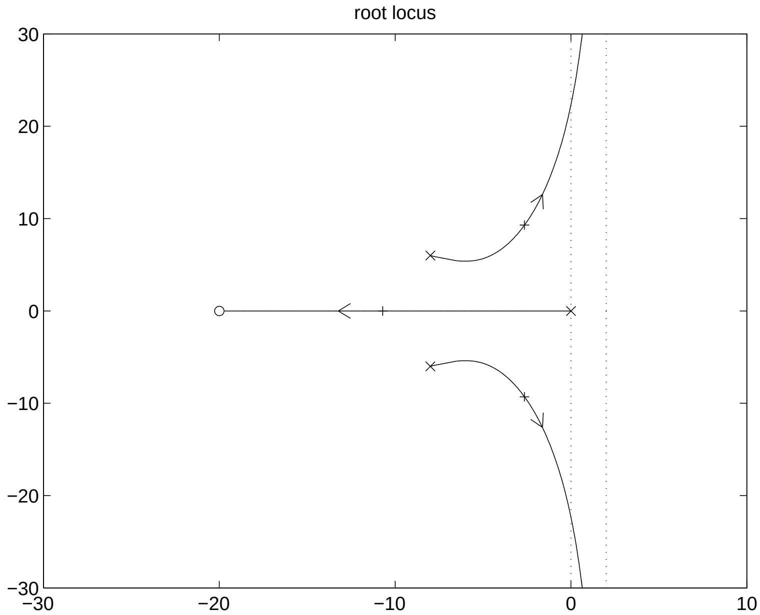
Calcolare il guadagno e la fase del sistema alle pulsazioni: $\omega = 1$, $\omega = 10$, $\omega = 100$.

3.e) Posto $D(s) = K$ e $b = 20$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{50K(s + 20)}{s(s^2 + 16s + 100)} = 0$$

L'andamento del luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$ è il seguente



I poli di partenza del luogo delle radici sono $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -8 \pm j6$. Il luogo delle radici presenta due asintoti verticali. Il centro stella σ_a degli asintoti in funzione di b è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{(20 - 16)}{2} = 2$$