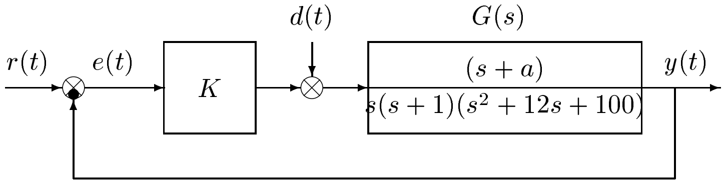
**Esame scritto di "Controlli Automatici"** - Modena - 29 Luglio 2002 - Esercizi

Sia dato il seguente sistema in retroazione:




a) Posto $a = 3$, determinare per quali valori del parametro $K > 0$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

b) Al variare del parametro $a$, si determini il valore di $K$ tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty(t) = 0.01\, d_0$. Calcolare inoltre, in funzione di $K$ e $a$, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 5\,t$.

c) Posto $K = 500$ e $a = 3$, disegnare qualitativamente il diagramma polare di Nyquist del guadagno di anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente l'asintoto verticale $\sigma_a$ e, se esistono, le intersezioni con l'asse reale.

d) Posto $K = 500$ e $a = 3$, tracciare qualitativamente i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$.

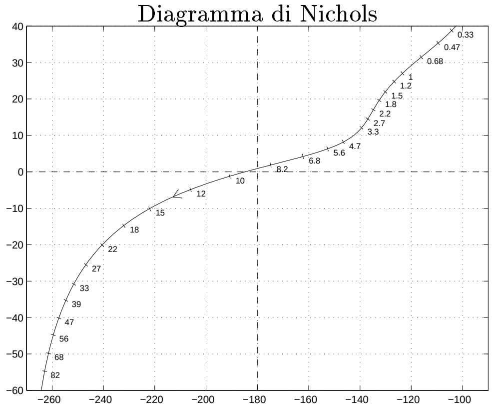
e) Posto $a = 3$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro $K$. Calcolare inoltre le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario. Determinare la posizione dei punti di diramazione solo "qualitativamente".

f) Siano date le seguenti formule di inversione

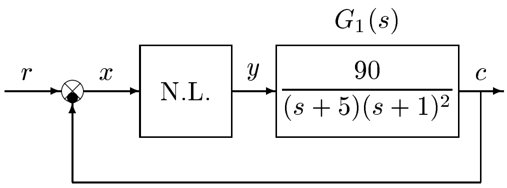
$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

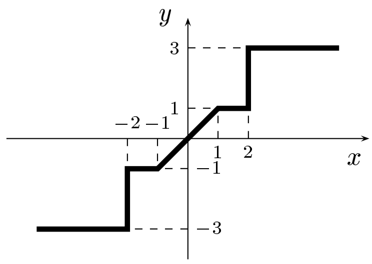
e si consideri il diagramma di Nichols riportato a fianco. Calcolare i parametri $\tau_1$ e $\tau_2$ di una rete correttrice che imponga al sistema retroazionato un margine di ampiezza $M_a = 10$.

Diagramma di Nichols




g) Dato il seguente sistema non lineare retroazionato, tracciare l'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y = y(x)$. Per $r = 0$, determinare se il sistema retroazionato è sede o meno di oscillazioni autosostenute e calcolare le eventuali pulsazioni di tali oscillazioni.




h) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 5\frac{(s+1)}{(s+10)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

**Esame scritto di "Controlli Automatici"** - Modena - 7 Dicembre 2000 - Risposte

a) L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2+12s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 13s^3 + 112s^2 + (100+K)s + 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccccc} 4 & 1 & 112 & 3K & \rightarrow & \\ 3 & 13 & 100+K & & \rightarrow & \\ 2 & 1356-K & 39K & & \rightarrow & K < 1356 \\ 1 & (1356-K)(100+K)-507K & & & \rightarrow & K^2 - 749K + 135600 < 0 \\ 0 & 39K & & & \rightarrow & K > 0 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K > 0, \qquad K < \frac{749 + \sqrt{749^2 + 4 * 135600}}{2} = 899.71, \qquad K < 1356$$

cioè per

$$0 < K < 899.71 = K^*$$

La pulsazione $\omega^*$ corrispondente al valore limite $K^*$ è

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3}} = \sqrt{\frac{100+K^*}{13}} = 8.769$$

b) Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty(t) = \frac{G(0)d_0}{1+KG(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.01\, d_0$$

Infatti il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 100$.

L'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 5\,t$ è

$$e_\infty(t) = \frac{5}{K_v}, \qquad \text{dove} \qquad K_v = \frac{a\,K}{100}$$

Si ottiene quindi che

$$e_\infty(t) = \frac{500}{a\,K}$$

c) Posto $K = 500$ e $a = 3$, il guadagno di anello del sistema è

$$T(s)\,G(s) = \frac{500(s+3)}{s(s+1)(s^2+12s+100)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1. L'asintoto verticale $\sigma_a$ del diagramma di Nyquist è

$$\sigma_a = \frac{1500}{100}\left(0.33 - 1 - \frac{12}{100}\right) = -11.8$$

Dall'analisi di stabilità svolta al punto a) si termina facilmente che l'unica intersezione $\sigma_1$ con l'asse reale si ha nel punto

$$\sigma_1 = -\frac{500}{K^*} = -\frac{500}{899.71} = -0.5557$$

in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 8.769$.

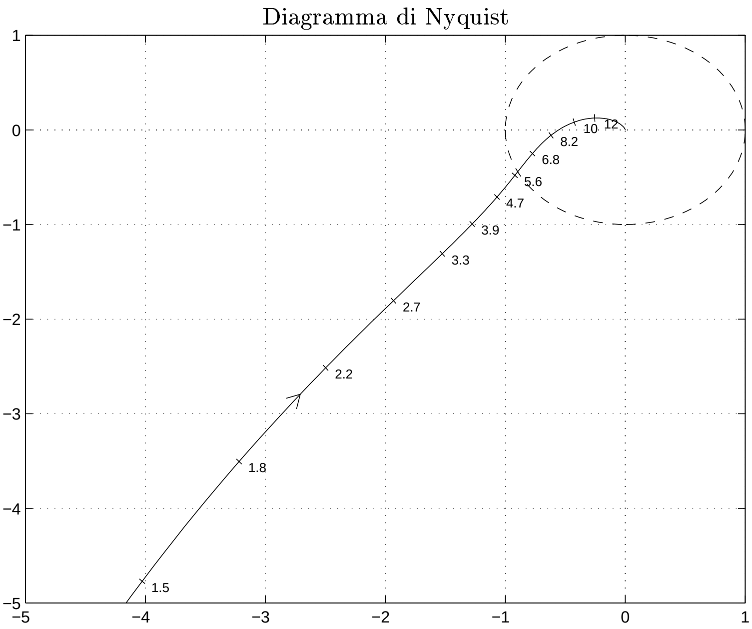



Figura 1: Diagramma di Nyquist del guadagno di anello $K\,G(s)$ per $a = 3$.

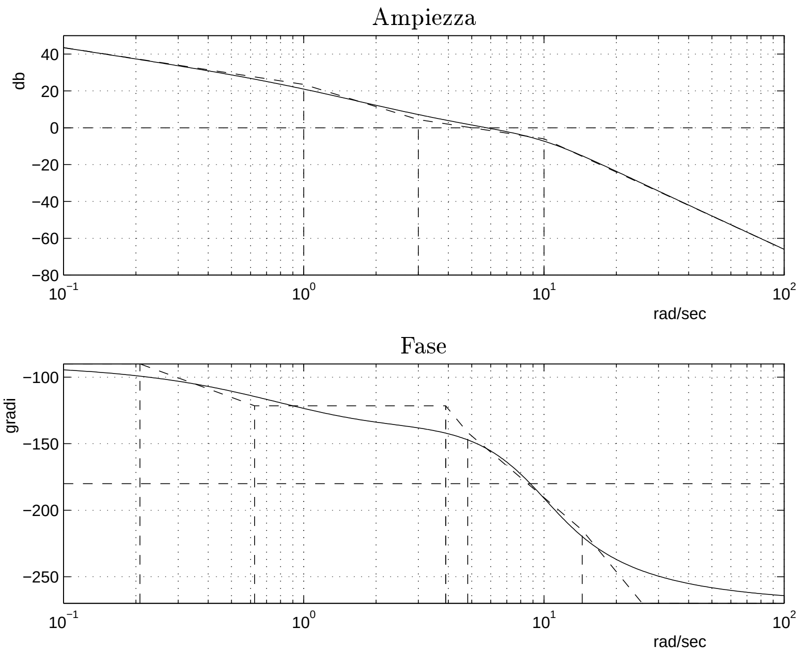



Figura 2: Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$ per $a = 3$.

d) Posto $K = 500$ e $a = 3$, il guadagno di anello del sistema è

$$K\,G(s) = \frac{500(s+3)}{s(s+1)(s^2+12s+100)}$$

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi del guadagno di anello $T(s)\,G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. In corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$, il diagramma asintotico di Bode delle ampiezze assume il valore

$$\beta = \frac{15}{1} = 15 \simeq 23.5\,\text{db}$$

e) Posto $a = 3$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s^2+12s+100)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il

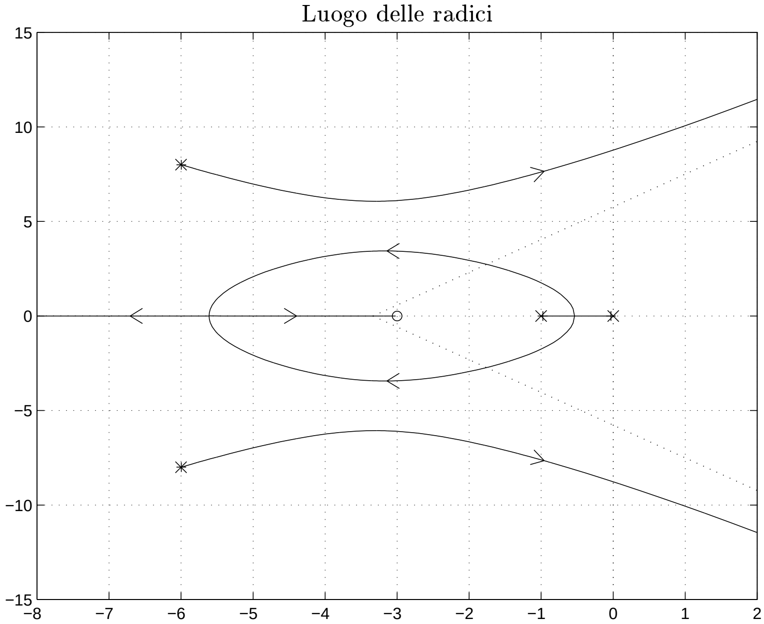



Figura 3: Luogo delle radici del sistema $K\,G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ per $a = 3$.

centro degli asintoti $\sigma_c$ si trova in

$$\sigma_c = \frac{1}{3}\,(-1 - 12 + 3) = -\frac{10}{3} = -3.333$$

Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza del valore limite $K^*$ del guadagno calcolato al punto a):

$$K = K^* = 899.71$$

Il corrispondente valore della pulsazione $\omega^*$ è

$$\omega^* = 8.769$$

f) Per questo tipo di sistema la rete correttrice più adatta è probabilmente una rete ritardatrice. I parametri $\tau_1$ e $\tau_2$ dipendono dalla scelta del punto $A$ sul diagramma di Nichols.

g) La funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y = y(x)$ è la seguente (funzione non'espressamente richiesta)

$$F(X) = \begin{cases} 1 & X < 1 \\ \Phi(X) & 1 \geq X < 2 \\ \Phi(X) + \frac{8}{\pi X}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{X}\right)^2} & X \geq 2 \end{cases}$$

dove

$$\Phi(X) = \frac{2}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{1}{X}\right) + \frac{1}{X}\sqrt{1-\left(\frac{1}{X}\right)^2}\right]$$

Per $X \to \infty$, $F(X) \to 0$. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 4. Per $r = 0$ il punto di lavoro del sistema retroazionato è $(x,\ y) = (0,\ 0)$. È quindi possibile utilizzare il

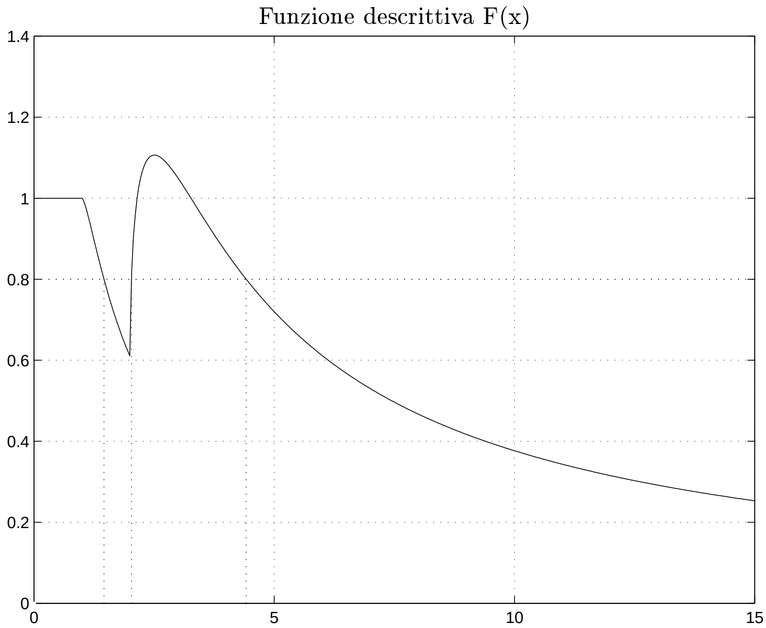



Figura 4: Funzione descrittiva della non linarità $y = y(x)$.

metodo della funzione descrittiva per determinare se il sistema è sede o meno di oscillazioni autosostenute. Nella parte lineare del sistema posta a valle della non linearità è caratterizzata da un margine di ampiezza $M_A = 0.8$. Infatti, applicando Routh all'equazione caratteristica

$$1 + \frac{90K}{(s+5)(s+1)^2} = 0 \qquad \to \qquad s^3 + 7s^2 + 11s + 5 + 90K = 0$$

si ottiene la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 7 & 5+90K \\ 1 & 72-90K & \\ 0 & 5+90K & \end{array}$$

da cui si ricava

$$-0.0556 = -\frac{1}{18} < K < \frac{72}{90} = 0.8$$

Intersecando la funzione descrittiva $F(X)$ con il margine di ampiezza $M_A = 0.8$ si ottengono tre valori di $X$ corrispondenti a possibili oscillazioni autosostenute

$$X_1 = 1.456, \qquad X_2 = 2.027, \qquad X_3 = 4.416$$

Solo i valori $X_1$ e $X_3$ corrispondono a cicli limite stabili. La pulsazione $\omega_0$ di questi cicli limite si ricava dall'equazione ausiliaria che si ottiene dalla tabella di Routh per $K = 0.8$:

$$7s^2 + 77 = 0 \qquad \to \qquad \omega_0 = \sqrt{11}$$

h) La funzione di trasferimento da discretizzare è la seguente:

$$D(s) = 5\frac{(s+1)}{(s+10)}$$

Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene ($T = 0.1$)

$$D(z) = 5\frac{(s+1)}{(s+10)}\bigg|_{s\,=\,\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 5\frac{2.1 - 1.9z^{-1}}{3 - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$(3 - z^{-1})M(z) = 5(2.1 - 1.9z^{-1})E(z)$$

da cui si ottiene

$$m(k) = \frac{1}{3}(m(k-1) + 10.5e(k) - 9.5e(k-1))$$

**Esame scritto di "Controlli Automatici"** - Modena - 29 Luglio 2002 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando queste vengono contrassegnate tutte.

1. La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema asintoticamente stabile e a fase minima è completamente determinata

   ⊗ dalla risposta impulsiva $g(t)$ del sistema

   ⊗ dalla risposta $h(t)$ del sistema al gradino unitario

   ⊗ dal diagramma di Bode delle ampiezze

2. La risposta impulsiva $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2}{s(s^2+0.8s+1)}$

   ○ tende a 0 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$

   ○ tende a 1 per $t$ tendente all'infinito: $\lim_{t\to\infty} g(t) = 1$

   ⊗ presenta una sovraelongazione rispetto al valore finale

   ⊗ è nulla per $t$ tendente a 0: $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$

3. Per un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati la massima sovraelongazione $S$ rimane costante al variare della posizione dei poli

   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine

   ⊗ su di una retta uscente dall'origine

   ○ su di una retta parallela all'asse immaginario

4. Si ponga la funzione $2\sin 2t$ in ingresso al sistema $G(s) = \frac{2}{s+2}$. A regime, l'ampiezza $A$ e la fase $\varphi$ della sinusoide $A\sin(2t+\varphi)$ in uscita valgono

   ○ $A = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

   ⊗ $A = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

   ○ $A = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

   ○ $A = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

5. Per studiare la stabilità di un sistema lineare $G(s)$ posto in retroazione unitaria, è possibile utilizzare il criterio di Routh

   ○ solo se $G(s)$ è a fase non minima

   ○ solo se $G(s)$ non ha poli sull'asse immaginario

   ⊗ solo se $G(s)$ è una funzione razionale fratta

   ○ anche se $G(s)$ è una funzione trascendente

6. Se la pendenza del diagramma di Bode delle ampiezze di un sistema $G(s)$ è negativa per ogni valore della pulsazione, la corrispondente fase

   ○ è sempre negativa

   ⊗ è negativa se il sistema è a fase minima

   ⊗ può essere positiva

7. Il diagramma di Nichols di un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$

   ⊗ è una semiretta orizzontale

   ○ è una semiretta verticale

   ○ è un punto

8. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa

   ○ ha un guadagno statico minore di 1

◯ ha un guadagno statico maggiore di 1

⊗ ha un guadagno statico unitario

9. Un sistema di tipo 2

   ⊗ ha due poli nell'origine

   ◯ ha due zeri nell'origine

   ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino

   ⊗ ha un errore a regime non nullo nella risposta alla parabola

10. Il criterio di Nyquist nella sua forma più generale

    ⊗ è un criterio necessario e sufficiente

    ⊗ si applica anche a sistemi con ritardo finito

    ⊗ si applica anche a sistemi a fase non minima

    ◯ si applica anche a sistemi non lineari

11. In corrispondenza di un polo multiplo di ordine $h$ del luogo delle radici della funzione $G(s) = N(s)/D(s)$, le tangenti agli $h$ rami entranti

    ◯ sono simmetriche rispetto all'asse immaginario

    ◯ sono simmetriche rispetto all'asse reale

    ⊗ dividono il piano in parti uguali

12. L'utilizzo di un regolatore standard di tipo PD è utile

    ⊗ per migliorare la prontezza del sistema retroazionato

    ⊗ per aumentare la larghezza di banda del sistema retroazionato

    ⊗ per migliorare il margine di fase del sistema

13. Una rete ritardatrice $D(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$:

    ⊗ sfasa in ritardo a tutte le pulsazioni $\omega \in ]0, \infty[$

    ◯ amplifica alle basse frequenze

    ⊗ è utile per stabilizzare sistemi fortemente instabili

    ⊗ si ottiene con $\alpha < 1$

14. Sia $G(s)$ un sistema asintoticamente stabile chiuso in retroazione su di una non linarità di tipo a settore. Se il corrispondente cerchio critico "interseca" il diagramma polare $G(j\omega)$, allora il sistema retroazionato

    ◯ è sicuramente instabile

    ⊗ può essere instabile

    ⊗ può essere stabile

15. La trasformata $Z$ della funzione $x(n) = (-1)^n$ per $n \geq 0$ è:

    ⊗ $X(z) = \frac{z}{z+1}$

    ◯ $X(z) = \frac{1}{z-1}$

    ◯ $X(z) = \frac{1}{z+1}$

    ◯ $X(z) = \frac{z}{z-1}$

16. Il sistema dinamico discreto $G(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$

    ◯ è asintoticamente stabile

    ⊗ è semplicemente stabile

    ◯ è instabile