

## Equazioni differenziali lineari

- Da un punto di vista dinamico, i sistemi lineari stazionari sono descritti da equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x$$

o, con notazione più compatta (operatore derivata  $D \equiv \frac{d}{dt}$ )

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t)$$

dove  $y(t)$  è la funzione *uscita* ed  $x(t)$  è la funzione *ingresso*.

- Condizione di fisica realizzabilità:  $n \geq m$ .

$$\begin{cases} \text{se } n > m \text{ il sistema è } \textit{strettamente proprio} \\ \text{se } n = m \text{ il sistema è } \textit{proprio} \\ \text{se } n < m \text{ il sistema è } \textit{improprio} \end{cases}$$

- Per risolvere l'equazione differenziale occorre conoscere

- *i*) le *condizioni iniziali*:

$$y(0-) , \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0-} , \dots , \left. \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0-}$$

- *ii*) il *segnale di ingresso*

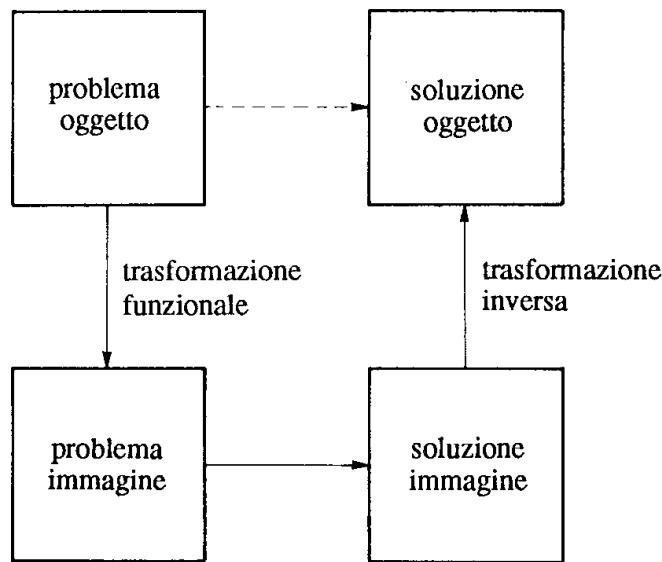
$$x(t) , \quad 0 \leq t \leq T$$

- Si suppone che la funzione  $x(t)$  sia *continua a tratti e limitata per ogni  $t$  finito*;

- La soluzione dell'equazione differenziale è la somma di due funzioni:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

1. l'*evoluzione libera*  $y_0(t)$ , cioè la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata che si ottiene ponendo uguale a zero il segnale di ingresso:  $x(t) \equiv 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ .
  2. l'*evoluzione forzata*  $y_1(t)$ , cioè la soluzione particolare che si ottiene ponendo a zero tutte le condizioni iniziali.
- Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le *trasformazioni funzionali*, in particolare la *trasformazione di Laplace*.
  - Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza *biunivoca* fra *funzioni oggetto*, normalmente funzioni del tempo, e *funzioni immagine*.



- Tipicamente *problema immagine* è di più facile soluzione. Esempio:

$$a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} = e^{(\ln a + \ln b)}$$

- Le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche, per cui la loro soluzione è immediata.
- Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione*.

## Trasformate di Laplace

- La trasformata di Laplace associa *in modo biunivoco* a una generica funzione reale del tempo  $f(t)$  una funzione complessa  $F(s)$  della variabile complessa  $s$ :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

È definita nel modo seguente:

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- La trasformazione inversa viene detta antitrasformata di Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

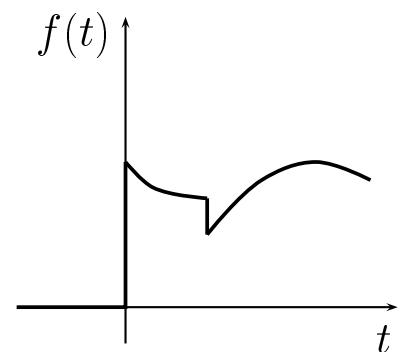
È definita nel modo seguente:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- La funzione  $F(s)$  è definita in un *dominio di convergenza* che consiste in un semipiano del piano  $s$  posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario

- La funzione  $f(t)$  è trasformabile secondo Laplace se:

- $f(t) = 0$  per  $t < 0$ ;
- $f(t)$  è continua a tratti e limitata al finito per  $t \geq 0$ ;
- l'integrale  $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$  esiste per un qualche valore di  $\sigma$ .



- Si tiene conto della *storia passata* della variabile  $f(t)$  per  $t < 0$  considerando opportune *condizioni iniziali* all'istante  $t = 0$ .

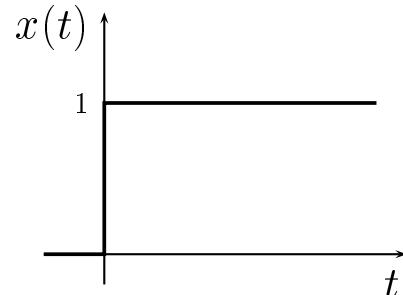
- Trasformate di Laplace dei segnali di uso più comune

$$\mathcal{L} [t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Come casi particolari di questa relazione si ottengono le trasformate di Laplace dei seguenti segnali:

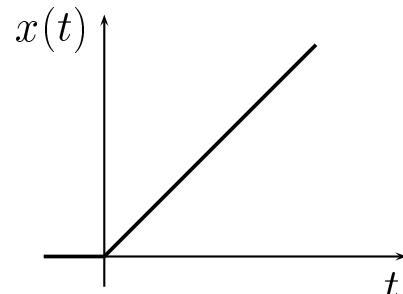
a) **Gradino unitario** ( $n = 0, a = 0$ ):

$$x(t) = u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}$$



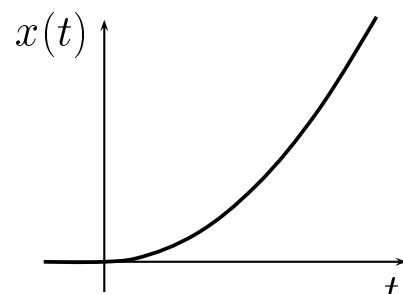
b) **Rampa unitaria** ( $n = 1, a = 0$ ):

$$x(t) = t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$



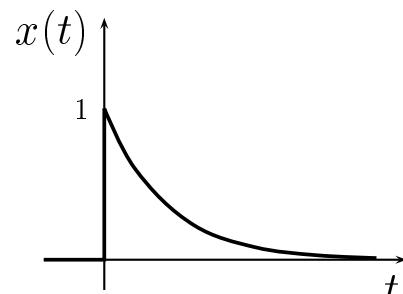
c) **Parabola unitaria** ( $n = 2, a = 0$ ):

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^3}$$



d) **Esponenziale** ( $n = 0, a < 0$ ):

$$x(t) = e^{at} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s-a}$$



e) **Sinusoida:**  $x(t) = \sin \omega t$ . Tale segnale si ricava dalla composizione di due esponenziali:

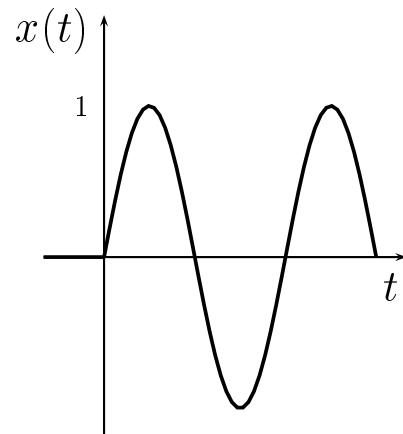
$$x(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Per la linearità della trasformata di Laplace si ha:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{2\omega j}{s^2 + \omega^2} \right]$$

da cui si ricava:

$$x(t) = \sin \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

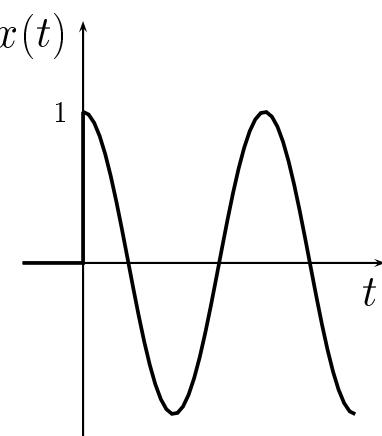


f) **Cosinusoida:**  $x(t) = \cos \omega t$ . Per tale funzione valgono le relazioni:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{2s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

da cui si ottiene:

$$x(t) = \cos \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$



## Proprietà della trasformata di Laplace

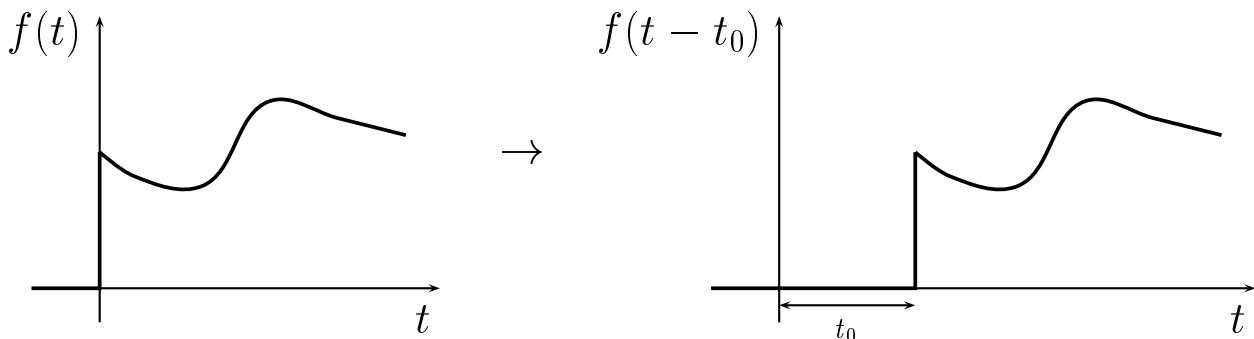
- **Linearità.** Dette  $c_1$  e  $c_2$  due costanti complesse arbitrarie,  $f_1(t)$  ed  $f_2(t)$  due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$ , vale la relazione

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- **Traslazione nel tempo.** Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$ , nulla per  $t < 0$ . Vale la relazione

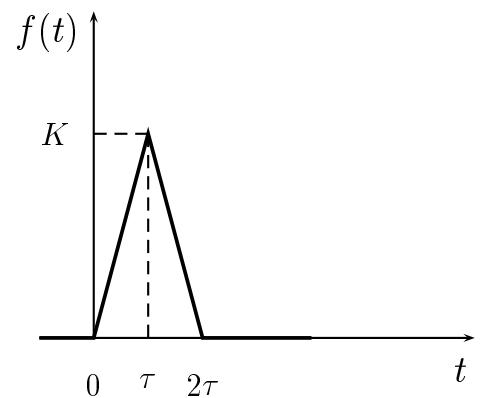
$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

cioè moltiplicare per la funzione  $e^{-t_0 s}$  nello spazio trasformato vuol dire, nel tempo, traslare in ritardo la funzione  $f(t)$  della quantità  $t_0$ .



**Esempio:** Il segnale  $f(t)$  è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze  $K/\tau$ ,  $-2K/\tau$  e  $K/\tau$ , applicate rispettivamente agli istanti  $t = 0$ ,  $t = \tau$  e  $t = 2\tau$  utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}) \\ &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned}$$



- **Trasformata dell'integrale.** Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$ . Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Moltiplicare per  $\frac{1}{s}$  una funzione  $F(s)$  vuol dire calcolare l'integrale del segnale  $f(t)$ .

- **Trasformata della derivata generalizzata.** Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$ . Vale la relazione

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df}{dt} \right] = s F(s) - f(0-)$$

dove  $f(0^-)$  è il valore che la funzione  $f(t)$  assume all'istante  $t = 0^-$ . Nel caso di condizioni iniziali nulle, moltiplicare per  $s$  una funzione  $F(s)$  vuol dire calcolare la derivata del segnale  $f(t)$ .

- **Teorema del valore iniziale.** Sia  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ . Vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$$

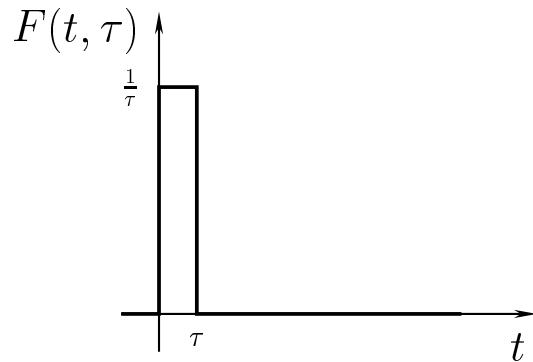
Questo teorema è valido per qualsiasi funzione  $X(s)$ .

- **Teorema del valore finale.** Sia  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ . Vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

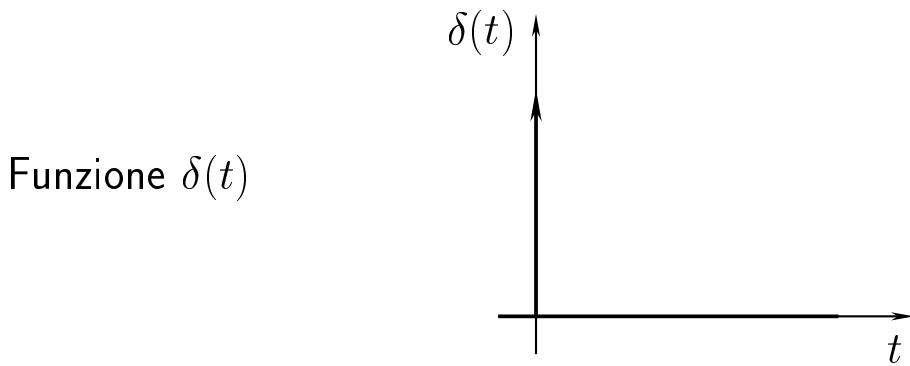
Questo teorema è valido solamente per funzioni  $X(s)$  che abbiamo tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un polo nell'origine.

- **Impulso di Dirac:**  $\delta(t)$ . È un segnale ideale che approssima un impulso di area unitaria.



$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(t, \tau)$$

- L'impulso di Dirac viene rappresentato nel modo seguente:



- La trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac è:

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Valgono infatti le seguenti relazioni:

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\lim_{\tau \rightarrow 0} F(t, \tau)\right] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}[F(t, \tau)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau)$$

Essendo

$$F(s, \tau) = \frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau s} e^{-\tau s} = \frac{1}{\tau s} (1 - e^{-\tau s})$$

si ha che

$$F(s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(s, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(1 - e^{-\tau s})}{\frac{d}{d\tau}(\tau s)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s e^{-\tau s}}{s} = 1$$

- La risposta di un sistema all'impulso di Dirac coincide con l'antitrasformata della funzione di trasferimento:

$$Y(s) = G(s) \underbrace{X(s)}_1 = G(s) \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

- **Teorema della traslazione in  $s$ .** Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$ . Vale la relazione:

$$\boxed{\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(s+a)}$$

- **Derivate di ordine superiore al primo.** Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$  e siano  $f(0_-)$ ,  $\dot{f}(0_-)$ ,  $\ddot{f}(0_-)$ , ... le condizioni iniziali della funzione  $f(t)$  all'istante  $0_-$ . Valgono le relazioni (si utilizza l'operatore derivata  $D$ ):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[ \frac{df}{dt} \right] &= \mathcal{L}[D f(t)] = s F(s) - f(0-) \\ \mathcal{L} \left[ \frac{d^2 f}{dt^2} \right] &= \mathcal{L}[D^2 f(t)] = s^2 F(s) - s f(0-) - D f(t)|_{t=0-} \\ &\dots \quad \dots \\ \mathcal{L} \left[ \frac{d^i f}{dt^i} \right] &= \mathcal{L}[D^i f(t)] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} f(t) \Big|_{t=0-}\end{aligned}$$

- **Teorema della trasformata del prodotto integrale.** Siano  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$  le trasformate di Laplace delle funzioni  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ . Vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L} \left[ \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s)}$$

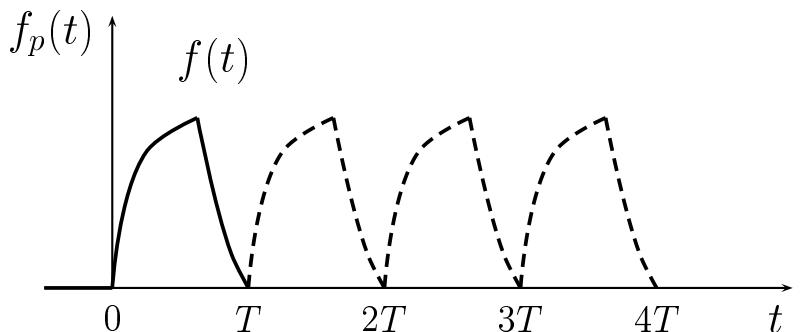
L'integrale di convoluzione delle funzioni  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  gode della proprietà commutativa:

$$\int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

- Trasformata di una funzione periodica.** Sia  $f(t)$  una funzione non nulla solo per  $0 \leq t \leq T$  e sia  $f_p(t)$  la funzione che si ottiene ripetendo in modo periodico la funzione  $f(t)$ .

$$f_p(t + nT) = f(t)$$

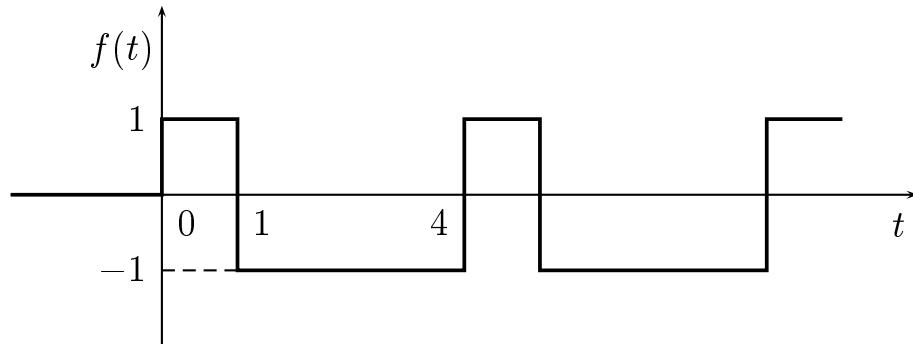
$$\forall n, \quad 0 \leq t \leq T$$



Vale la seguente relazione:

$$\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

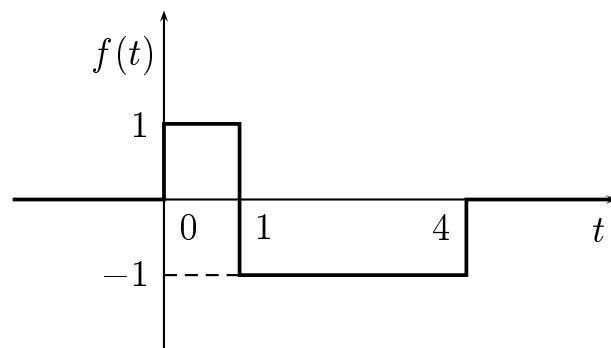
- Esempio. Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:



La funzione  $f(t)$  è periodica di periodo  $T = 4$ . La sua trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{4s}} \mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{4s})}$$

Con  $f_1(t)$  si è indicata la funzione seguente:



### Funzione di trasferimento

- Si consideri l'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^m b_i D^i x(t)$$

Sostituendo alle funzioni e alle loro derivate le rispettive trasformate, si ottiene la relazione

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i X(s) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \Big|_{t=0-}$$

in cui con  $X(s)$  e  $Y(s)$  si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita  $x(t)$  e  $y(t)$ .

- La trasformata di Laplace  $Y(s)$  è data quindi dalla somma di due funzioni:

$$Y_0(s) = \left. \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-j-1} y(t) \right|_{t=0-} \Bigg/ \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

$$Y_1(s) = \left( \sum_{i=0}^m b_i s^i \Bigg/ \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) X(s)$$

che sono, rispettivamente, le trasformate dell'*evoluzione libera*  $y_0(t)$  e dell'*evoluzione forzata*  $y_1(t)$ .

- La seguente funzione di trasferimento del sistema

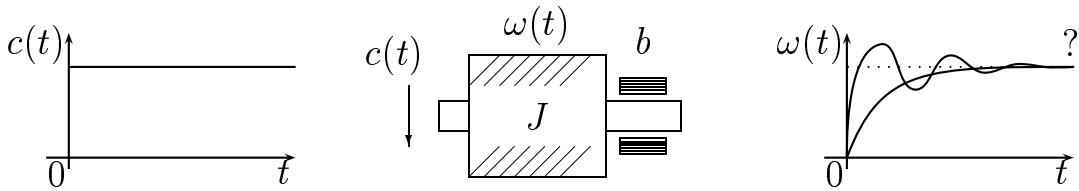
$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

```

graph LR
    X((X(s))) --> G[G(s)]
    G --> Y1((Y1(s)))
  
```

è definita a partire da *condizioni iniziali identicamente nulle*.

**Esempio.** Si consideri un elemento meccanico con inerzia  $J$ , coefficiente di attrito lineare  $b$  che ruota alla velocità angolare  $\omega$  al quale venga applicata una coppia esterna  $c(t)$ .



Si richiede di determinare la risposta del sistema al gradino unitario.

Per rispondere esattamente a questa domanda occorre determinare il modello dinamico del sistema. L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è la seguente:

$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\omega(t) \quad \leftrightarrow \quad J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace si ottiene:

$$J s \omega(s) + b \omega(s) = C(s) \quad \leftrightarrow \quad \omega(s) = \frac{1}{b + J s} C(s)$$

La funzione di trasferimento  $G(s)$  che caratterizza il sistema è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{b + J s}$$

$$\begin{array}{c} G(s) \\ \xrightarrow{C(s)} \boxed{\frac{1}{b + J s}} \xrightarrow{\omega(s)} \omega(t) \\ \xrightarrow{c(t)} \end{array}$$

I coefficienti di questa funzione sono in corrispondenza biunivoca con i coefficienti dell'equazione differenziale. Posto  $C(s) = \frac{1}{s}$ , la risposta al gradino del sistema in ambito trasformato è la seguente:

$$\omega(s) = G(s) C(s) \quad \rightarrow \quad \omega(s) = \frac{1}{(b + J s)s}$$

Alcune informazioni sull'andamento di  $\omega(t)$  si possono ricavare direttamente da  $\omega(s)$  anche senza antitrasformare. Applicando il teorema del valore iniziale, per esempio, si ricava il valore di  $\omega(t)$  per  $t = 0^+$ :

$$\omega(0^+) = \omega(t)|_{t \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \omega(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(b + J s)s} = 0$$

Applicando invece il teorema del valore finale si ricava il valore di  $\omega(t)$  per  $t \rightarrow \infty$ :

$$\omega(\infty) = \omega(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \omega(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(b + J s)s} = \frac{1}{b}$$

Applicando il teorema del valore iniziale è anche possibile calcolare il valore dell'accelerazione  $\dot{\omega}(t)$  per  $t = 0^+$ :

$$\dot{\omega}(0^+) = \dot{\omega}(t)|_{t \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underbrace{[\omega(s)]}_{\dot{\omega}(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{(b + J s)s} = \frac{1}{J}$$

Infatti, in ambito trasformato, l'accelerazione  $\dot{\omega}(s)$  si ottiene semplicemente moltiplicando la velocità  $\omega(s)$  per la variabile  $s$  (che rappresenta l'operatore "derivata" di Laplace).

Per ottenere esattamente l'andamento temporale  $\omega(t)$  occorre antitrasformare la funzione  $\omega(s)$ . Il modo più semplice per farlo è utilizzare la scomposizione in fratti semplici. Nel caso in esame, esistono sempre due coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  che permettono di scomporre la funzione  $\omega(s)$  nel modo seguente:

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + Js)s} \quad \leftrightarrow \quad \omega(s) = \frac{\alpha}{b + Js} + \frac{\beta}{s}$$

I coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  si determinano (per esempio) imponendo uguaglianza fra le due espressioni:

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{b + Js} + \frac{\beta}{s} = \frac{\alpha s + \beta(b + Js)}{(b + Js)s} = \frac{(\alpha + \beta J)s + \beta b}{(b + Js)s} = \frac{1}{(b + Js)s}$$

Risolvendo si ricava:

$$\begin{cases} \alpha + \beta J = 0 \\ \beta b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{J}{b} \\ \beta = \frac{1}{b} \end{cases}$$

per cui si ha

$$\omega(s) = \frac{1}{(b + Js)s} = \frac{1}{b} \left[ \frac{1}{s} - \frac{J}{b + Js} \right] = \frac{1}{b} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{b}{J}} \right]$$

Antitrasformando i singoli elementi si ricava la funzione  $\omega(t)$ :

$$\omega(t) = \frac{1}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{J}t} \right)$$

L'andamento temporale è di tipo esponenziale:

