

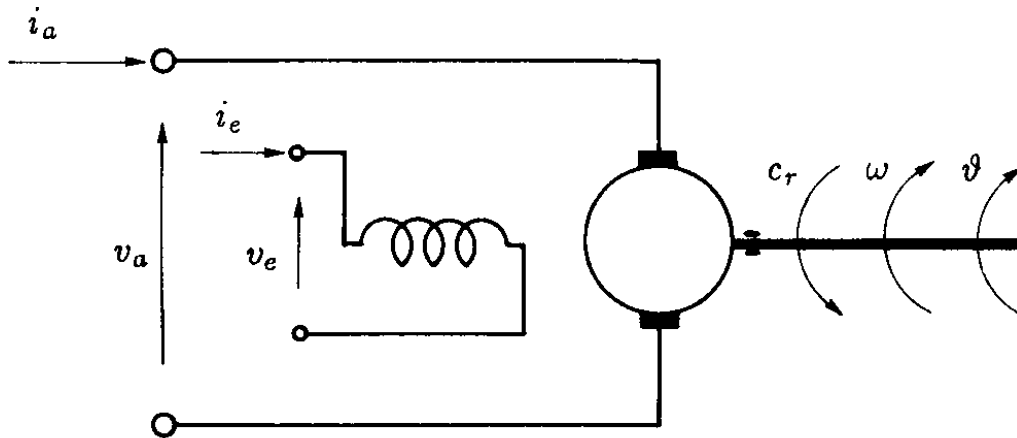
CONCETTI FONDAMENTALI

Sistemi e modelli matematici

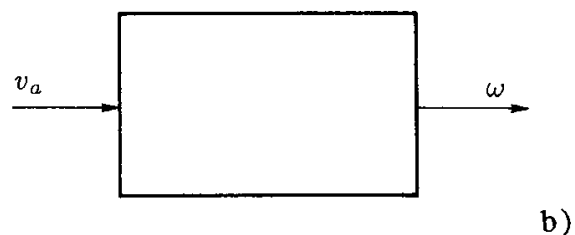
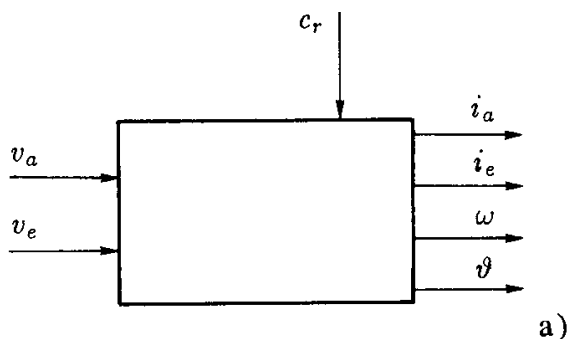
- L'*automazione* è un complesso di tecniche volte a sostituire l'intervento umano, o a migliorarne l'efficienza, nell'esercizio di dispositivi e impianti.
- Un importante capitolo della scienza dell'automazione o *automatica* è costituito dalla disciplina denominata *controlli automatici*.
- Tale disciplina studia i dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*), mediante i quali si fanno variare automaticamente le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*)
- Un *sistema* è un complesso, normalmente costituito di più elementi interconnessi, in cui si possono distinguere grandezze soggette a variare nel tempo (indicate semplicemente con il nome di *variabili*).
- *Segnali*: sono le funzioni che rappresentano l'andamento delle variabili nel tempo.
- *Variabili di ingresso*: sono le *variabili indipendenti* o *cause*.
- *Variabili di uscita*: sono le *variabili dipendenti* o *effetti*.
- *Sistema orientato*: è un sistema in le cui variabili siano state suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita.
- *Variabili manipolabili*: variabili di ingresso il cui andamento nel tempo può essere arbitrariamente imposto.
- *Variabili non manipolabili* o *disturbi*: variabili sul cui andamento nel tempo non si può influire, in quanto casuale o assegnabile ad arbitrio solo da parte di altro operatore.

Esempio: motore in corrente continua

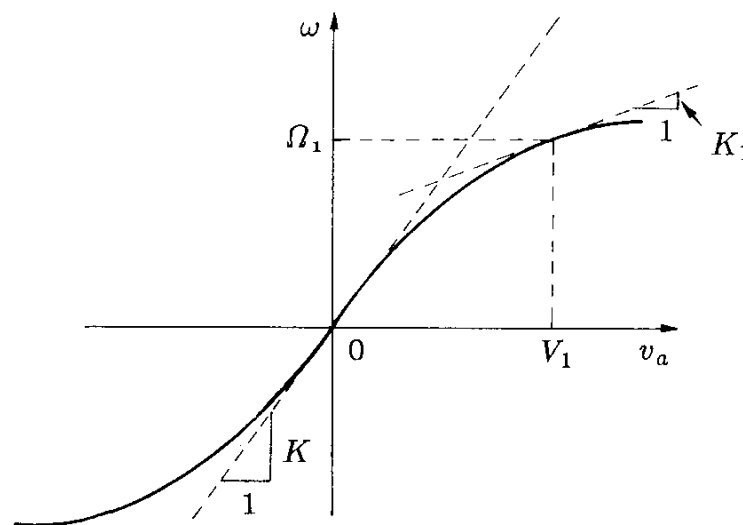
- Il modello semplificato di un motore in corrente continua con eccitazione indipendente è il seguente:



- Variabili di interesse: la tensione e la corrente di armatura v_a e i_a , la tensione e la corrente di campo v_e e i_e , la coppia resistente all'albero c_r , la velocità angolare e la posizione angolare del rotore ω e ϑ .
- Orientamento del sistema:
 - Cause: v_a , v_e e c_r ;
 - Effetti: i_a , i_e , ω e ϑ ;
 - Variabili manipolabili: v_a e v_e ;
 - Variabile non manipolabile: c_r ;
- Rappresentazione mediante schemi a blocchi:



- *Modello matematico* di un sistema: è l'insieme di equazioni e di parametri che permettono di determinare gli andamenti nel tempo delle uscite, noti quelli degli ingressi.
- Il modello matematico è sempre un compromesso fra *precisione* e *semplicità*: è inutile infatti ricorrere a modelli sofisticati quando i valori dei parametri che in essi compaiono si conoscono solo approssimativamente.
- *Modello statico o puramente algebrico*: descrive il legame fra i valori degli ingressi, supposti costanti, e i valori delle uscite una volta che il sistema abbia raggiunto la *condizione di regime stazionario*, cioè la condizione di funzionamento in cui tutti i segnali siano costanti.
- Caratteristica statica del motore elettrico in corrente continua:



- *Caratteristica statica* ingresso-uscita:

$$\omega = f(v_a)$$

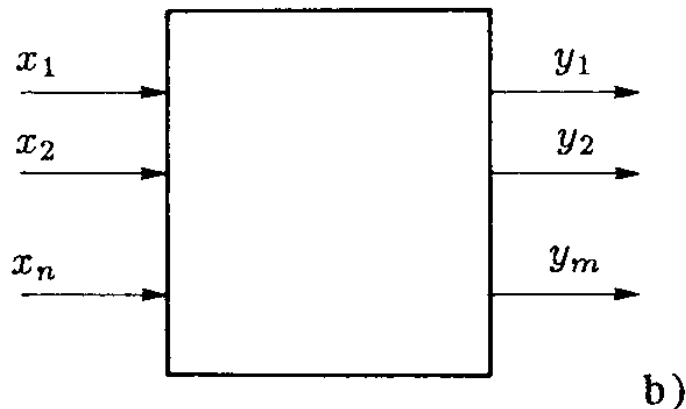
- *Approssimazione lineare* nell'intorno dell'origine: $\omega = K v_a$;
- *Linearizzazione* nell'intorno del *punto di lavoro*:

$$\omega - \Omega_1 = K_1(v_a - V_1)$$

- Modello statico di un sistema MIMO (Multi Input Multi Output): consiste in più funzioni (tante quante sono le uscite) di più variabili (tante quanti sono gli ingressi), cioè

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

- Rappresentazione grafica:



- Punto di lavoro: $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_m)$.
- Linearizzazione nell'intorno del punto di lavoro:

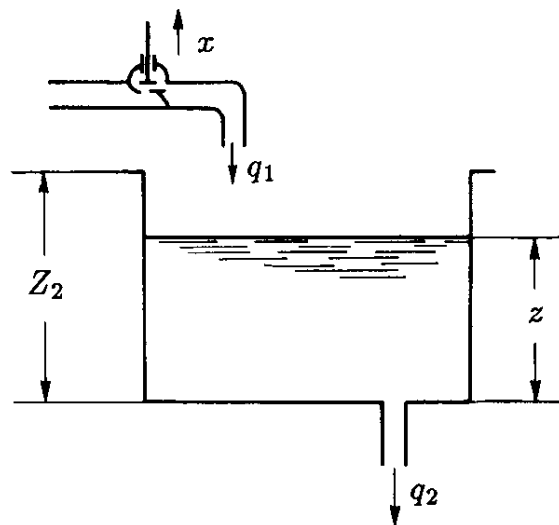
$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= a_{11} \Delta x_1 + \dots + a_{1n} \Delta x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta y_m &= a_{m1} \Delta x_1 + \dots + a_{mn} \Delta x_n \end{aligned}$$

in cui è

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_k = X_k \ (k=1, \dots, n)} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \\ \Delta y_i &:= y_i - Y_i = y_i - f_i(X_1, \dots, X_n) \quad (i = 1, \dots, m) \\ \Delta x_j &:= x_j - X_j \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

- I modelli matematici statici non danno alcuna informazione sul *regime transitorio*, cioè sull'andamento nel tempo delle uscite durante il passaggio da uno stato di regime stazionario ad un altro.

- *Modello dinamico*: è costituito da una o più equazioni differenziali esprimenti legami statici fra le variabili di ingresso, di uscita e le loro derivate rispetto al tempo.
- Il modello dinamico di un sistema permette di determinare l'andamento del segnale di uscita corrispondente a un dato segnale di ingresso, cioè permette di determinare la *risposta* del sistema a una data *eccitazione*.
- Un modello matematico (o un sistema) si dice *lineare* quando soddisfa la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*.
- In caso contrario il sistema si dice *non lineare*.
- Molti sistemi ammettono modelli matematici lineari purché i valori delle variabili non escano da determinati campi. Esempio:



- Modello matematico in forma integrale:

$$z(t) = Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau)) d\tau = Z_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (K x(\tau) - q_2(\tau)) d\tau$$

- Modello matematico in forma differenziale:

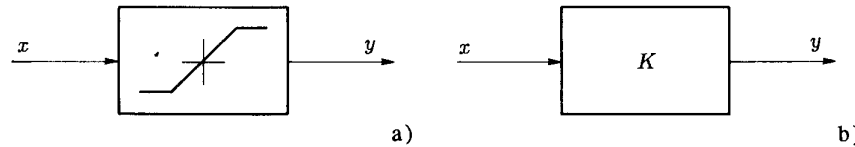
$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A} (q_1(t) - q_2(t)) , \quad z(0) = Z_0$$

- Tale modello è valido entro i limiti:

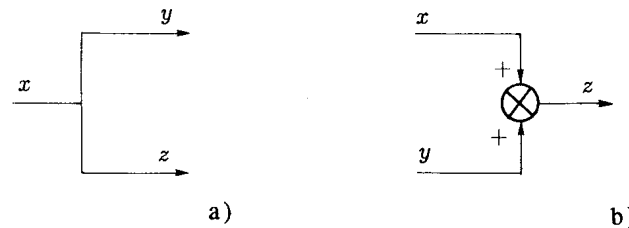
$$X_1 \leq x(t) \leq X_2 , \quad Z_1 \leq z(t) \leq Z_2$$

Riduzione degli schemi a blocchi

- Spesso i sistemi complessi vengono rappresentati con *schemi a blocchi*, i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.
- I blocchi elementari per la rappresentazione di sistemi puramente algebrici sono:



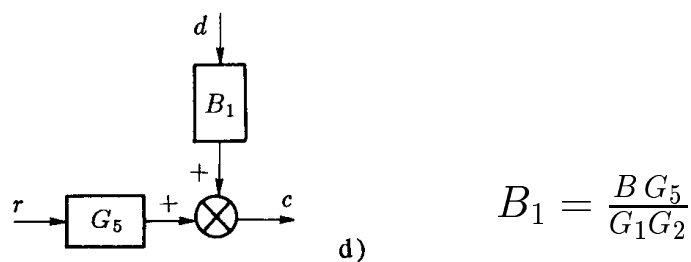
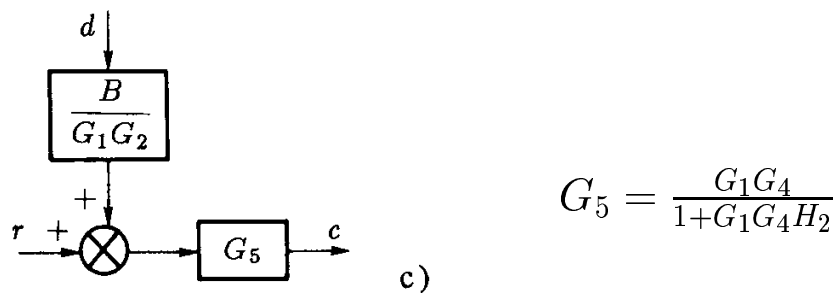
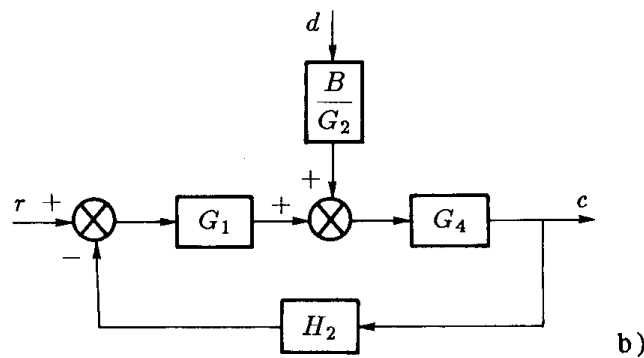
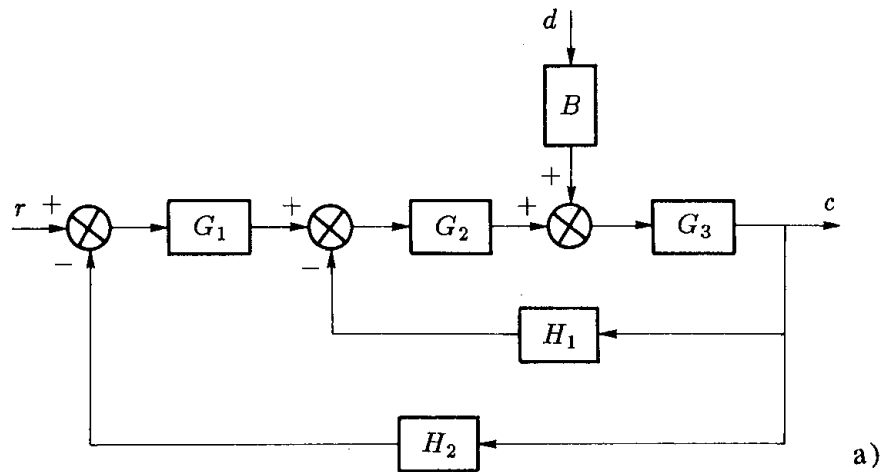
- Negli schemi a blocchi i diversi elementi sono collegati fra loro mediante i *punti di diramazione* e le *giunzioni sommanti*:



- Principali regole per la riduzione degli schemi a blocchi:

	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1		
2		
3		
4		
5		

Esempio di riduzione di schema a blocchi

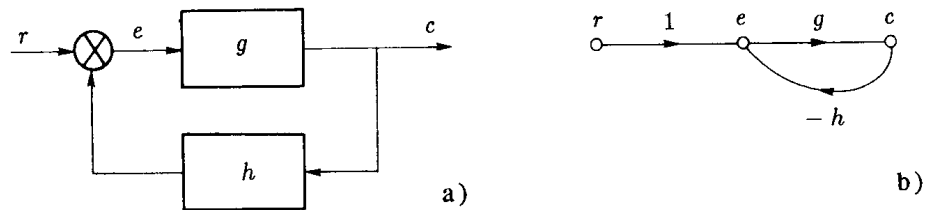


- Forma minima:

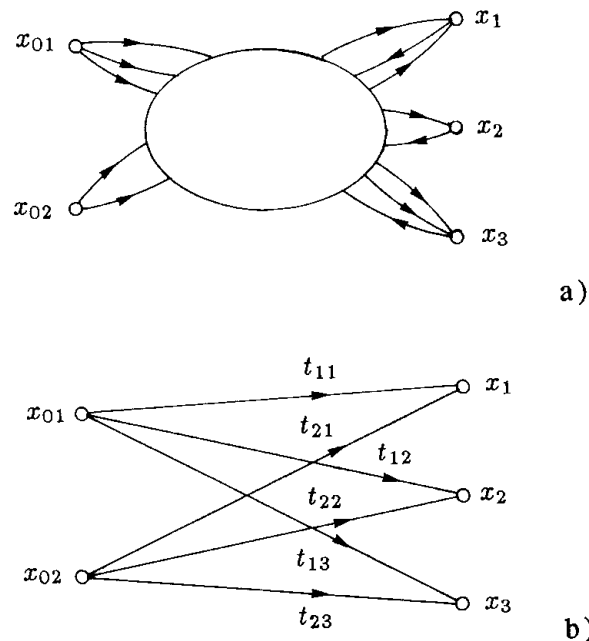
$$c = \frac{G_1 G_2 G_3 r + B G_3 d}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

I grafi di flusso di segnale

- I *grafi di flusso di segnale* sono un mezzo, alternativo agli schemi a blocchi, per la rappresentazione grafica dei sistemi complessi. Esempio:



- Rispetto agli schemi a blocchi, essi forniscono una più semplice rappresentazione grafica del sistema.
- Un grafo di flusso di segnale è una rete composta di *nodi* e di *rami orientati*. I *nodi indipendenti* (o *nodi sorgente*) sono nodi a cui non giunge nessun ramo. I *nodi dipendenti* sono nodi ai quali giunge almeno un ramo. Ogni ramo è caratterizzato da un *coefficiente* o *trasmissione*.
- Per i grafi di flusso di segnale esistono regole di riduzione che sono simili a quelle degli schemi a blocchi. Mediante riduzione, ogni grafo di flusso di segnale può essere portato in *forma minima*:



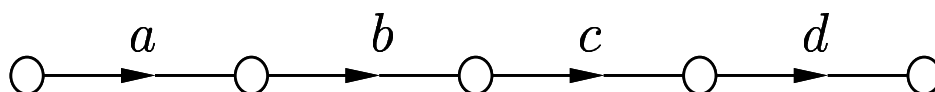
- Per calcolare la forma minima si utilizza la *Formula di Mason*

Formula di Mason - Determinante di un grafo

La formula di Mason permette di calcolare la trasmittanza T di ogni singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) di un grafo in forma minima. Essa utilizza il concetto di determinante Δ di un grafo.

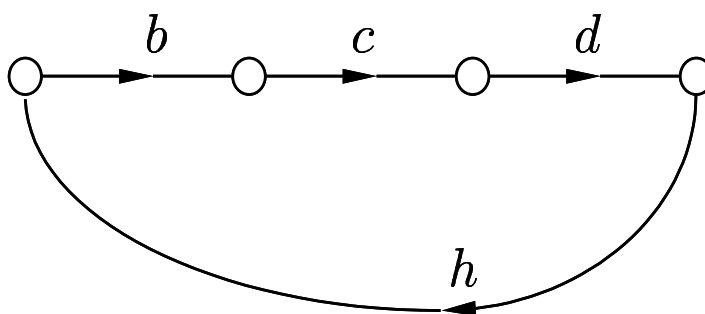
Alcune definizioni:

- Percorso: successione di rami e nodi adiacenti senza anelli, ogni nodo viene attraversato una sola volta. Il coefficiente P del percorso è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:



$$P = abcd$$

- Anello: percorso chiuso. Il coefficiente A dell'anello è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:

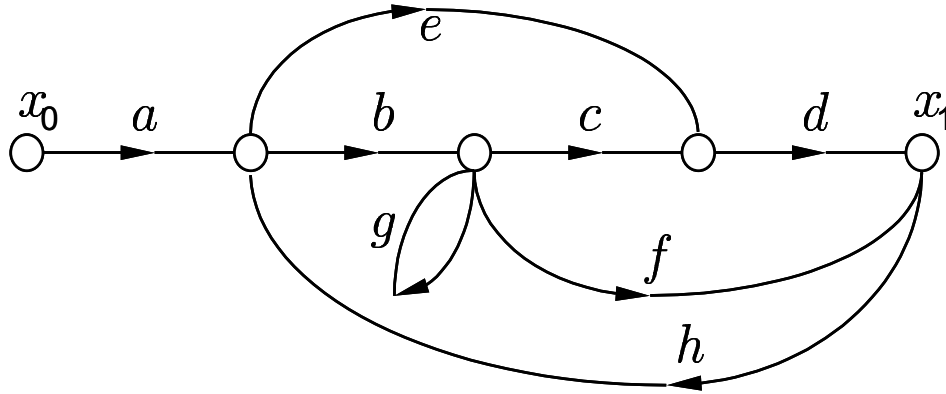


$$A = bcdh$$

- Due percorsi o due anelli non si toccano quando non hanno nessun nodo in comune.

Formula di Mason - Determinante di un grafo

Per calcolare il determinante D di un grafo è necessario individuare alcuni insiemi di indici. Consideriamo come esempio il seguente grafo:



\mathcal{P}) Insieme degli indici di tutti i percorsi del grafo dal nodo sorgente x_0 a quello dipendente (uscita) x_1 . Ad ogni indice si associa il coefficiente P_i del corrispondente percorso. Esempio ($\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$):

$$i = 1 \text{ percorso: } a \ b \ c \ d \quad P_1 = abcd$$

$$i = 2 \text{ percorso: } a \ e \ d \quad P_2 = aed$$

$$i = 3 \text{ percorso: } a \ b \ f \quad P_3 = abf$$

\mathcal{I}_1) Insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo. Ad ogni indice si associa il coefficiente A_i del corrispondente anello. Esempio ($\mathcal{I}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$):

$$i = 1 \text{ anello: } e \ d \ h \quad A_1 = edh$$

$$i = 2 \text{ anello: } b \ c \ d \ h \quad A_2 = bcdh$$

$$i = 3 \text{ anello: } b \ f \ h \quad A_3 = bfh$$

$$i = 4 \text{ anello: } g \quad A_4 = g$$

\mathcal{I}_2) Insieme delle COPPIE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a due a due. Esempio:

$$\text{anelli 1 e 4} \rightarrow \mathcal{I}_2 = \{(1, 4)\}$$

\mathcal{I}_n) Insieme delle N-PLE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a N a N. Esempio:

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_4 = \dots = \mathcal{I}_n = \{ \}$$

Formula di Mason - Determinante di un grafo

Dati gli insiemi di indici $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n$ e noti i coefficienti A_i di tutti gli anelli, per determinante Δ dell'intero grafo si intende la quantità:

$$\Delta \stackrel{def}{=} 1 - \sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_3} A_i A_j A_k + \dots$$

Esempio:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i &= edh + bcdh + bfh + g \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j &= edhg \\ \Delta &= 1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg \end{aligned}$$

Noto il determinante Δ di un grafo, la formula di Mason permette di calcolare la trasmittanza T di un singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) del grafo in forma minima come:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$$

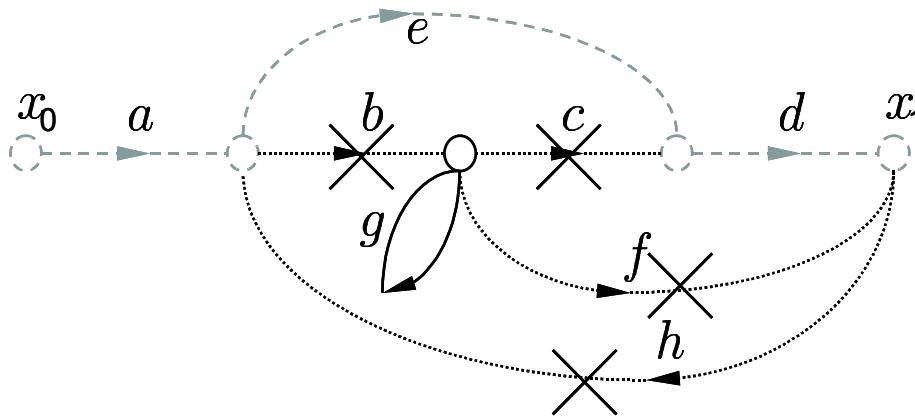
dove: \mathcal{P} è l'insieme degli indici di tutti i percorsi fra i due nodi considerati, P_i è il coefficiente del percorso i -esimo, Δ_i è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e tutti i rami appartenenti al percorso i -esimo.

Osservazioni:

- Il determinante di un grafo dipende SOLO dalla struttura degli anelli, non dal particolare percorso tra due nodi. Esso è dunque una proprietà del grafo.
- Per quanto detto, tutti i rami del grafo in forma minima sono caratterizzati dallo stesso determinante Δ .

Formula di Mason - Determinante di un grafo

Esempio, calcolo del determinante Δ_2 relativo al percorso 2 (a, e, d). I rami e i nodi appartenenti al percorso 2 devono essere eliminati dal grafo. Successivamente si cancellano tutti i rami che partono o arrivano in un nodo precedentemente eliminato (rami b, c, f, h). $\Delta_2 = 1 - g$ è il determinante del grafo rimanente (anello g).



$$\begin{aligned}
 i = 1 \quad P_1 &= abcd \quad \Delta_1 = 1 \\
 i = 2 \quad P_2 &= aed \quad \Delta_2 = 1 - g \\
 i = 3 \quad P_3 &= abf \quad \Delta_3 = 1
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i = abcd(1) + aed(1 - g) + abf(1)$$

La trasmittanza T del ramo $x_0 - x_1$ nel grafo in forma minima risulta quindi:

$$T = \frac{abcd + aed(1 - g) + abf}{1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg}$$

La formula di Mason

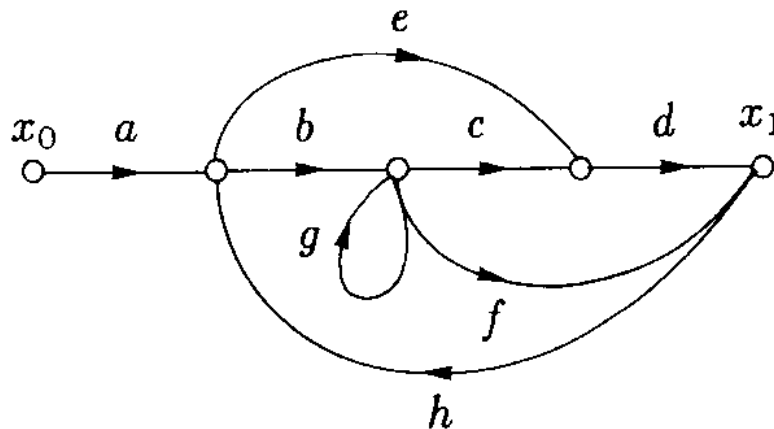
- Fornisce il *coefficiente di trasmittanza* T di ogni singolo ramo del grafo in forma minima:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$$

- \mathcal{P} è l'insieme degli indici di tutti i percorsi esistenti tra i due nodi considerati; P_i è il coefficiente dell' i -esimo percorso, cioè il prodotto dei coefficienti di tutti i rami che compongono il percorso; Δ è il determinante dell'intero grafo:

$$\Delta := 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{J}_3} A_i A_j A_k + \dots$$

- Δ_i è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e i rami appartenenti al percorso i -esimo; A_i è il coefficiente dell' i -esimo anello; \mathcal{J}_1 è l'insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo; \mathcal{J}_n è l'insieme delle n -ple di indici di tutti gli anelli del grafo che non si toccano n ad n ;



- Coefficienti di tutti i percorsi e di tutti gli anelli:

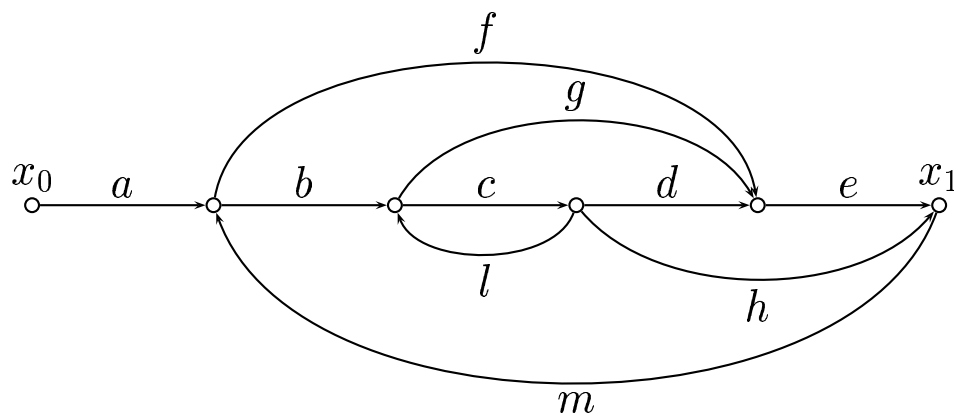
$$P_1 = a b c d, \quad P_2 = a e d, \quad P_3 = a b f$$

$$A_1 = e d h, \quad A_2 = b c d h, \quad A_3 = b f h, \quad A_4 = g$$

- Trasmittanza:

$$T = \frac{a b c d + a e d (1 - g) + a b f}{1 - e d h - b c d h - b f h - g + e d h g}$$

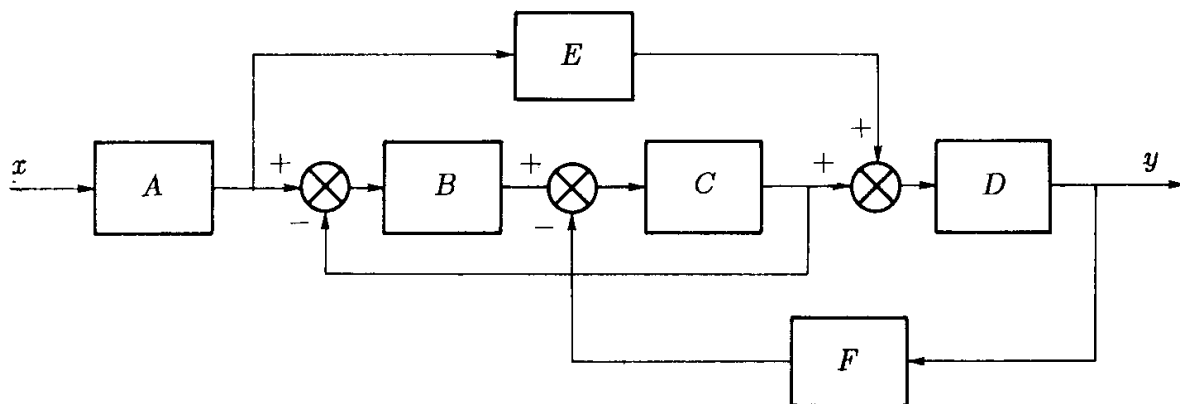
- Esempio 1:



- Nel grafo sono presenti quattro percorsi di segnale $P_1 = a f e$, $P_2 = a b g e$, $P_3 = a b c h$, $P_4 = a b c d e$ e i cinque anelli $A_1 = f e m$, $A_2 = b g e m$, $A_3 = b c h m$, $A_4 = b c d e m$, $A_5 = c l$
- Trasmittanza:

$$T = \frac{a f e (1 - c l) + a b g e + a b c h + a b c d e}{1 - f e m - b g e m - b c h m - b c d e m - c l + f e m c l}$$

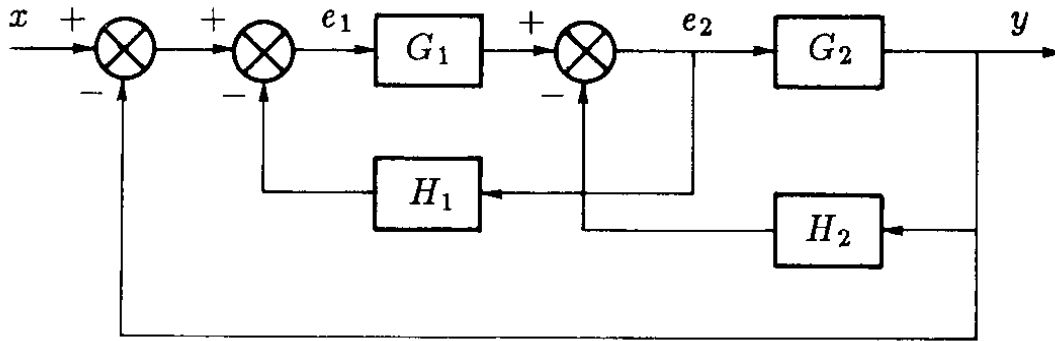
- Esempio 2:



- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = A D \frac{B C + E (1 + B C)}{1 + B C + C D F}$$

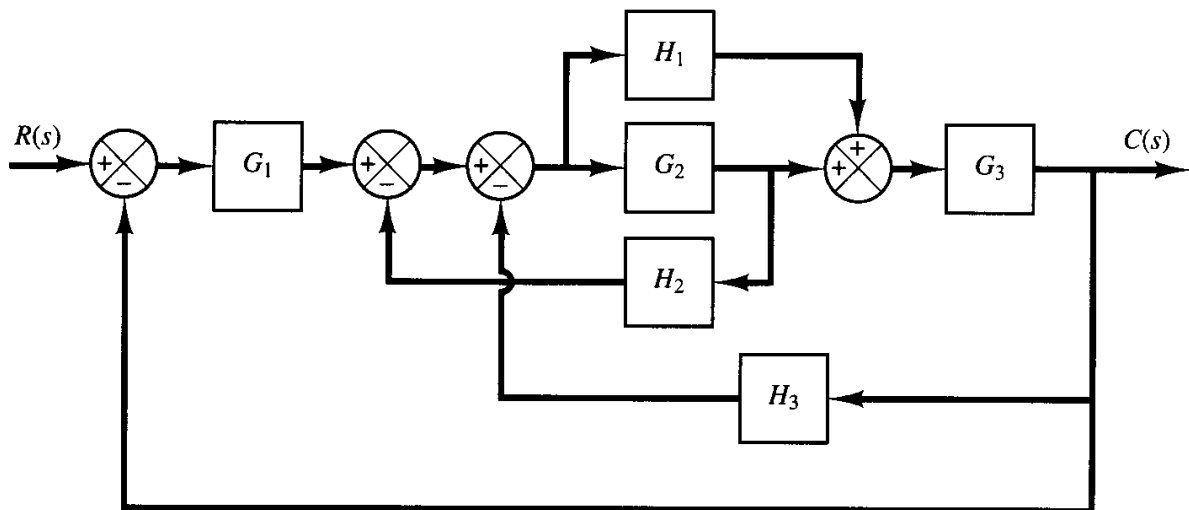
- Esempio 3:



- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2}$$

- Esempio 4:



- Trasmittanza:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 H_1 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 H_1 G_3 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + H_1 G_3 H_3}$$