

Capitolo 1

Modello fisico del trattore

1.1 Rappresentazione a parametri concentrati

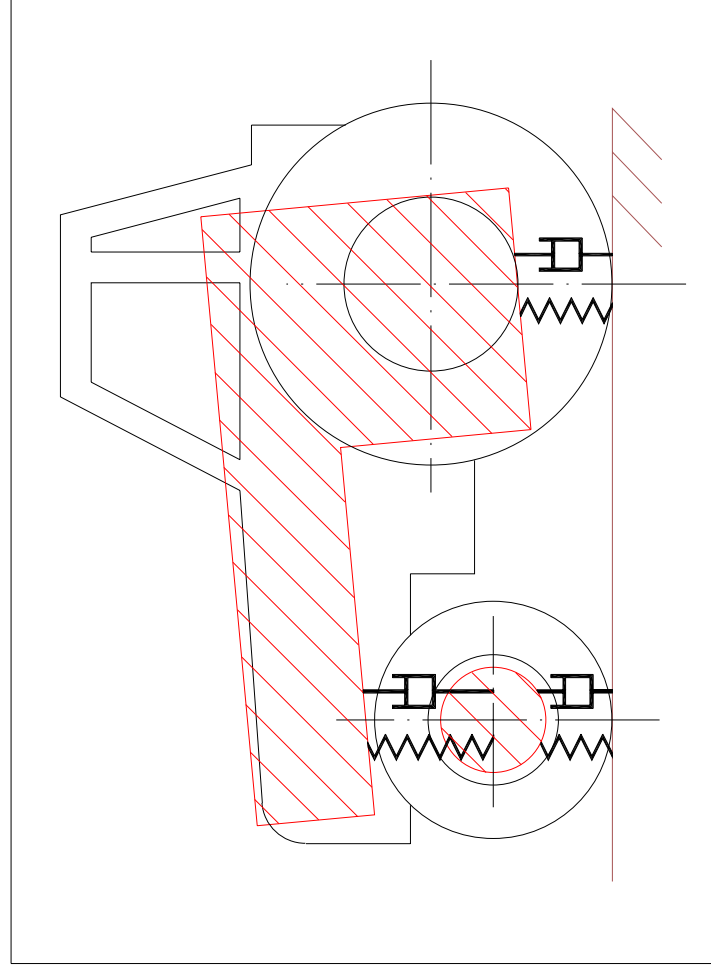


Figura 1.1: Passaggio dal disegno del trattore reale ad un suo schema fisico a parametri concentrati

Per la nostra analisi abbiamo necessità d'uno schema semplificato della realtà; la Fig. 1.1 illustra il modello bidimensionale a parametri concentrati adottato che considera 2 masse, 3 elasticità e 3 smorzamenti viscosi.

Verranno impiegate 3 configurazioni dello stesso modello:

- *riposo*¹;

¹Ogni configurazione possiede alcuni parametri caratterizzati da un pedice che indica che ci stiamo riferendo ad una determinata configurazione. Il pedice specifico della configurazione *riposo* é *rp*

- *accensione*²;
- *movimento*³.

1.1.1 Generica configurazione

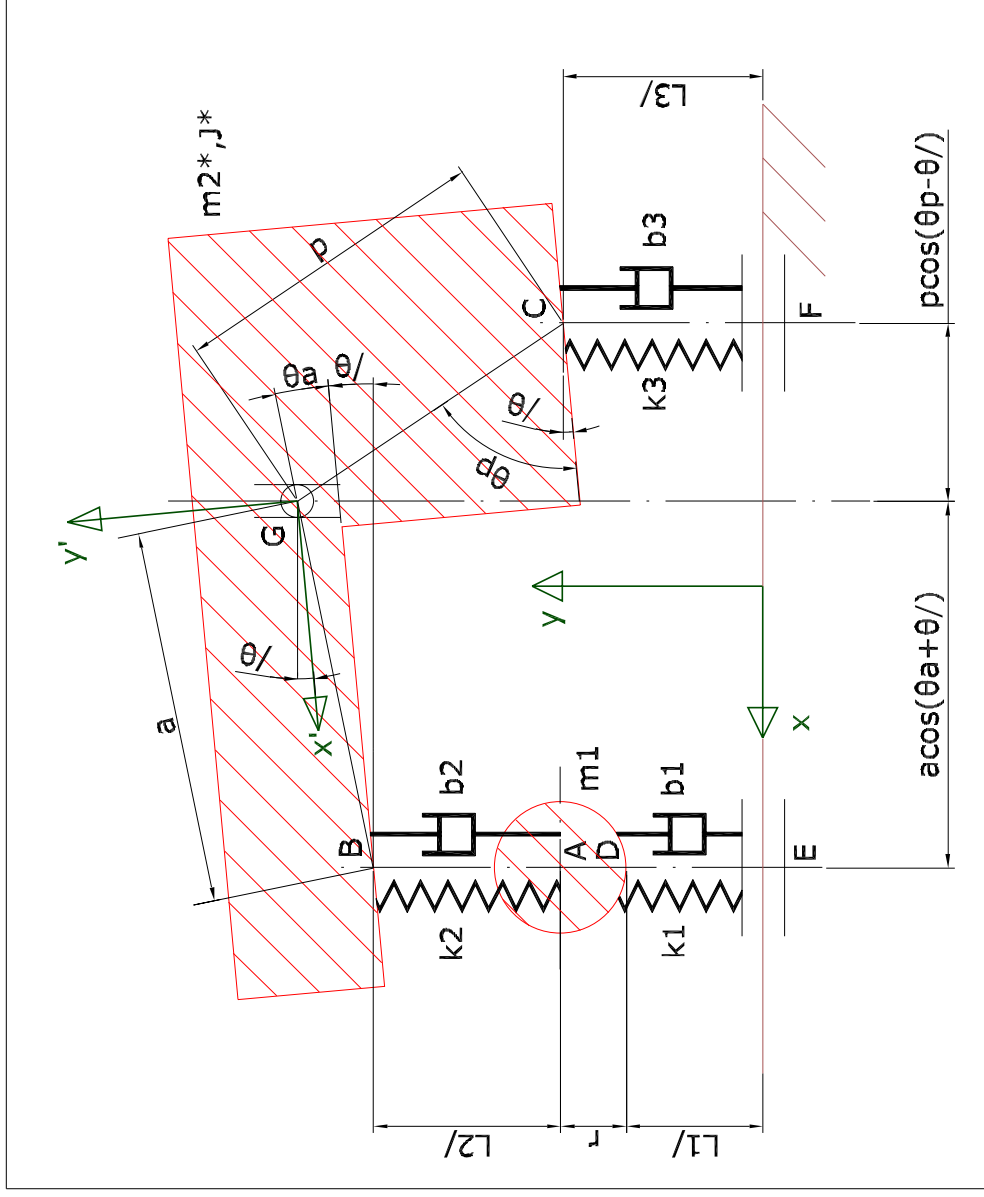


Figura 1.2: Modello a parametri concentrati del trattore in una configurazione non specificata

²pedice specifico 0

³pedice specifico: assenza di pedice

Parametri fisici	
m_1	massa dell'asse anteriore del mezzo piú quella delle ruote anteriori
m_2^*	massa del corpo del trattore: motore, cabina, ruote posteriori...
J^*	momento d'inerzia del corpo trattore rispetto il baricentro
k_1, b_1	costante d'elasticitá e coefficiente d'attrito viscoso rispettivamente della molla e dello smorzatore che rappresentano il pneumatico anteriore equivalente
k_2, b_2	costante d'elasticitá e coefficiente d'attrito viscoso rispettivamente della molla e dello smorzatore che rappresentano la sospensione
k_3, b_3	costante d'elasticitá e coefficiente d'attrito viscoso rispettivamente della molla e dello smorzatore che rappresentano il pneumatico posteriore equivalente
Parametri geometrici	
$L_1/$	spessore radiale del pneumatico anteriore
$L_2/$	lunghezza della sospensione
$L_3/$	spessore radiale del pneumatico posteriore
r	raggio del cerchione anteriore
G'	baricentro di m_2
A	attacco della sospensione all'asse anteriore e centro delle ruote anteriori
B	attacco della sospensione al corpo trattore
C	attacco del pneumatico posteriore al cerchione posteriore, incluso nel corpo trattore
D	attacco del pneumatico anteriore al cerchione anteriore
E	punto di contatto del pneumatico anteriore col suolo
F	punto di contatto del pneumatico posteriore col suolo
a	lunghezza segmento BG
p	lunghezza segmento GC
θ_l	angolo d'inclinazione del corpo trattore rispetto l'orizzontale
θ_a	angolo che BG forma con l'asse x in un sistema di coordinate solidale col corpo trattore
θ_p	angolo che GC forma con l'asse x in un sistema di coordinate solidale col corpo trattore
$a \cos(\theta_a + \theta_l)$	proiezione di BG sull'orizzontale
$p \cos(\theta_p - \theta_l)$	proiezione di GC sull'orizzontale

Tabella 1.1: Parametri utilizzati nel modello in una configurazione generica

L_{iltb}	spessore radiale dell' i -esimo pneumatico libero, cioè quando nessuna forza lo schiaccia (si può immaginare ad esempio di appendere il trattore).
$sc_i/$	schiacciamento (< 0) o allungamento (> 0) dell' i -esima molla. Il segno é incluso nel simbolo.
$F_{mi}, C_{Gmi}/$	forza di reazione dell' i -esima molla e momento della forza stessa rispetto il baricentro G.
F_{si}, C_{Gsi}	forza di reazione dell' i -esimo smorzatore e momento della forza stessa rispetto il baricentro G.
$F_i, C_{Gi}/$	forza di reazione complessiva dell' i -esimo gruppo molla-smorzatore e momento della forza stessa rispetto il baricentro G.
v_A, v_B, v_C, v_D v_E, v_F, v_G	componenti verticali della velocità assoluta dei punti indicati
v_1, a_1	componenti verticali della velocità e dell'accelerazione della massa m_1
v_2, a_2	componenti verticali della velocità e dell'accelerazione del baricentro della massa m_2
Δv_i	velocità di schiacciamento dell' i -esimo smorzatore. E' la velocità relativa delle sue due estremità.

Tabella 1.2: Altri parametri utilizzati nella trattazione

La Fig. 1.2 illustra una configurazione generica perché é possibile adattarla ad una qualunque delle 3 elencate sostituendo alla barra / presente in alcuni parametri il pedice specifico⁴. Nella Tab. 1.1 si elencano i simboli di Fig. 1.2. Altri simboli che non sono presenti in Fig. 1.2 ma che verranno impiegati sono quelli di Tab. 1.2⁵

Sono presenti due sistemi di riferimento: xyz fisso e assoluto, con l'asse x sempre orizzontale (asse z entrante nel foglio) e $x'y'z'$ solidale con la cassa del trattore (asse z' entrante nel foglio). Un parametro molto importante é l'angolo θ_j , definito come l'angolo di cui é ruotato istantaneamente il sistema di riferimento $x'y'z'$ rispetto all'orizzontale definita dall'asse x del riferimento xyz . Le rotazioni avvengono ovviamente attorno agli assi z e z' (tali assi sono sempre coincidenti). θ_j é detto *angolo di beccheggio*. Nella Fig. 1.2 é indicato piú volte semplicemente per il fatto che nel disegno i lati della figura costituita da due rettangoli rossi si considerano paralleli o all'asse x' o a y' .

Tutti i momenti d'inerzia che si adopereranno sono valutati rispetto all'asse z (o indifferentemente z') entrante nel foglio.

Per un osservatore solidale con il corpo del trattore, il punto B rispetto il baricentro G é descritto attraverso l'angolo θ_a e la lunghezza a . C lo é attraverso θ_p e p .

Mentre m_2^* ha un'inerzia J^* , m_1 é considerata una massa puntiforme. Geometricamente anch'essa però ha delle dimensioni: é un cerchio di raggio r . Le molle e gli

⁴Se per esempio volessimo attualizzare alla configurazione *accensione* il parametro L_{11} , scriveremmo L_{10} .

⁵Alcuni di questi ultimi parametri cioè tutte le velocità, le accelerazioni e le forze dovute agli smorzatori saranno impiegati solo nella configurazione *movimento* giacché implicano che il trattore si stia spostando, quindi non sono segnati con la barra /

smorzatori sono considerati elementi lineari, cioè valgono

$$F_{m\dot{s}_i} = k_i s c_i, \quad F_{s\dot{i}} = b_i \Delta v_i$$

Esistono i seguenti vincoli nel modello:

- il baricentro G di m_2^* é supposto vincolato a scorrere sulla verticale passante per esso. Non si può spostare orizzontalmente;
- la base di ogni pneumatico può scorrere sulla linea del terreno supposta liscia, cioè senza attrito, avvicinandosi o allontanandosi rispetto alla verticale passante per il baricentro;
- le molle e gli smorzatori si suppone che rimangano verticali, quindi anche le forze trasmesse da essi lo saranno.

Per le velocità vale che:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_A = v_D \\ v_2 &= v_G \\ \Delta v_1 &= v_D - v_E \\ \Delta v_2 &= v_B - v_A \\ \Delta v_3 &= v_C - v_F \end{aligned} \quad (1.1)$$

Valgono anche le seguenti relazioni:

$$L_{1/} = L_{1l}b + s c_1; \quad L_{3/} = L_{3l}b + s c_3; \quad (1.2)$$

che indicano che lo spessore attuale dei pneumatici é quello dei pneumatici liberi meno lo schiacciamento attuale degli stessi.

Tutte le forze sono verticali.

Quanto riportato nei paragrafi *Pneumatici in parallelo* e *Caricamento del trattore* si applicherá a qualunque tipo di configurazione.

1.1.2 Pneumatici in parallelo

k_1 e b_1 (si veda la Tab. 1.1) sono le costanti del pneumatico equivalente con cui é stato sostituito il parallelo dei 2 pneumatici anteriori.

Per individuarne i valori nota l'elasticitá e lo smorzamento d'ogni singolo pneumatico, supponiamo che durante un qualunque transitorio dinamico il pneumatico anteriore destro presenti sempre lo stesso schiacciamento $s c_{pa}$ ⁶ e la stessa velocità di schiacciamento Δv_{pa} di quello sinistro⁷. Questa ipotesi é coerente col fatto che non interessa analizzare l'angolo di *rollio* del trattore, limitandosi lo studio all'angolo di *beccheggio*. Se chiamiamo:

- k_{pa} e b_{pa} rispettivamente la costante d'elasticitá e il coefficiente d'attrito viscoso della molla e dello smorzatore che rappresentano il singolo pneumatico anteriore, indifferentemente destro o sinistro;
- $F_{da} = k_{pa} s c_{pa} + b_{pa} \Delta v_{pa}$ la forza trasmessa dal pneumatico anteriore destro all'assale;

⁶Nel paragrafo non si segue l'indicizzazione generale precedentemente illustrata, ma una dedicata appositamente all'argomento qui trattato

⁷Il pedice pa sta per pneumatico anteriore

- $F_{sa} = k_{pa} s_{c_{pa}} + b_{pa} \Delta v_{pa}$ la forza trasmessa dal pneumatico anteriore sinistro all'assale;
- $F_{ta} = F_{sa} + F_{da}$ la forza totale trasmessa dai pneumatici anteriori all'assale;
- k_{eqa} e b_{eqa} le costanti del pneumatico equivalente anteriore,

otteniamo che:

$$F_{ta} = 2k_{pa} s_{c_{pa}} + 2b_{pa} \Delta v_{pa} = k_{eqa} s_{c_{pa}} + b_{eqa} \Delta v_{pa}$$

e quindi, attribuendo al pneumatico equivalente lo stesso schiacciamento $s_{c_{pa}}$ e la stessa velocità di schiacciamento Δv_{pa} d'ogni singolo pneumatico:

$$k_1 = k_{eqa} = 2k_{pa}$$

$$b_1 = b_{eqa} = 2b_{pa}$$

La Fig. 1.3 e la Fig. 1.4 illustrano quanto detto.

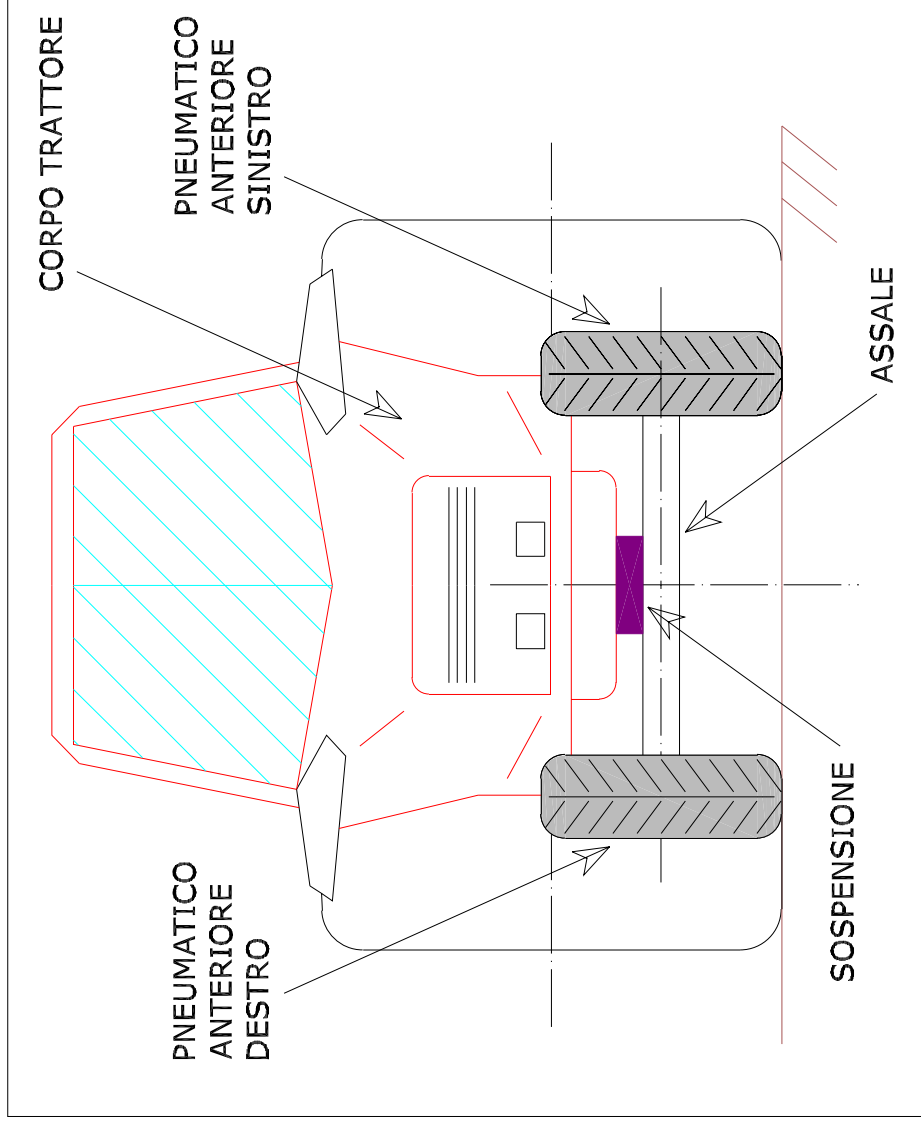


Figura 1.3: Vista anteriore del trattore

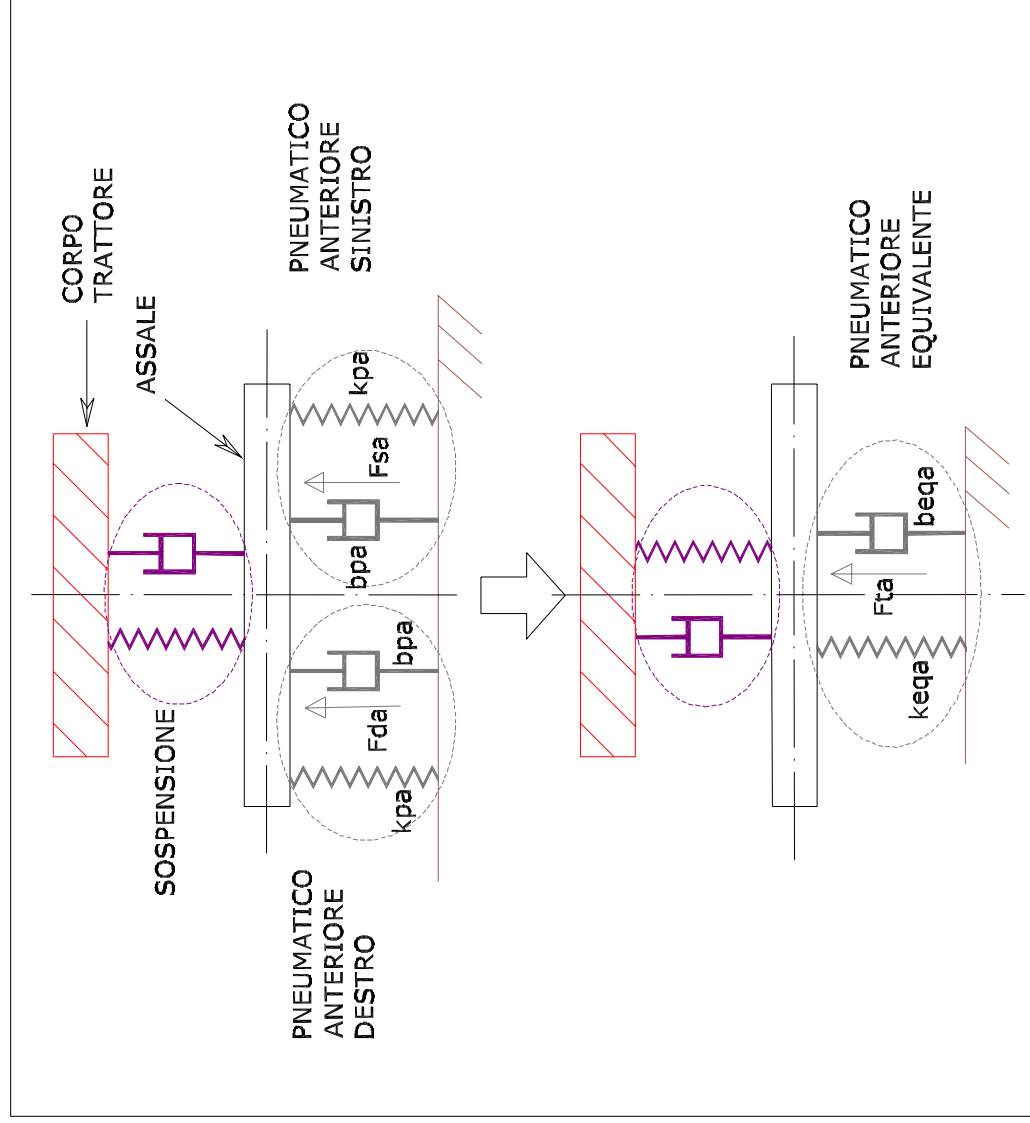


Figura 1.4: Passaggio al pneumatico equivalente anteriore

Si ripeta lo stesso ragionamento per la vista posteriore utilizzando le costanti k_{pp} e b_{pp} . Si otterrà

$$\begin{aligned} k_3 &= 2k_{pp} \\ b_3 &= 2b_{pp} \end{aligned}$$

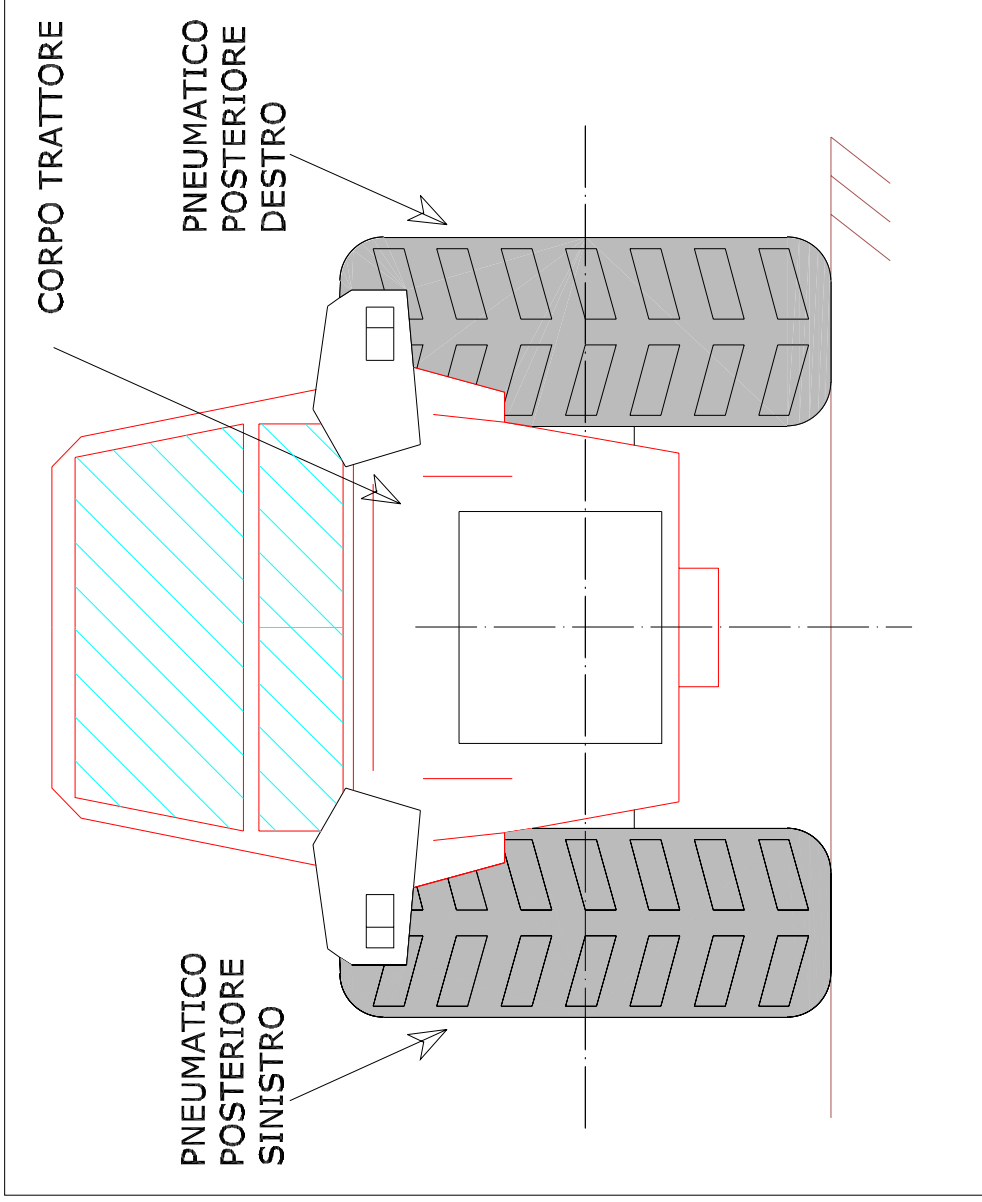


Figura 1.5: Vista posteriore del trattore

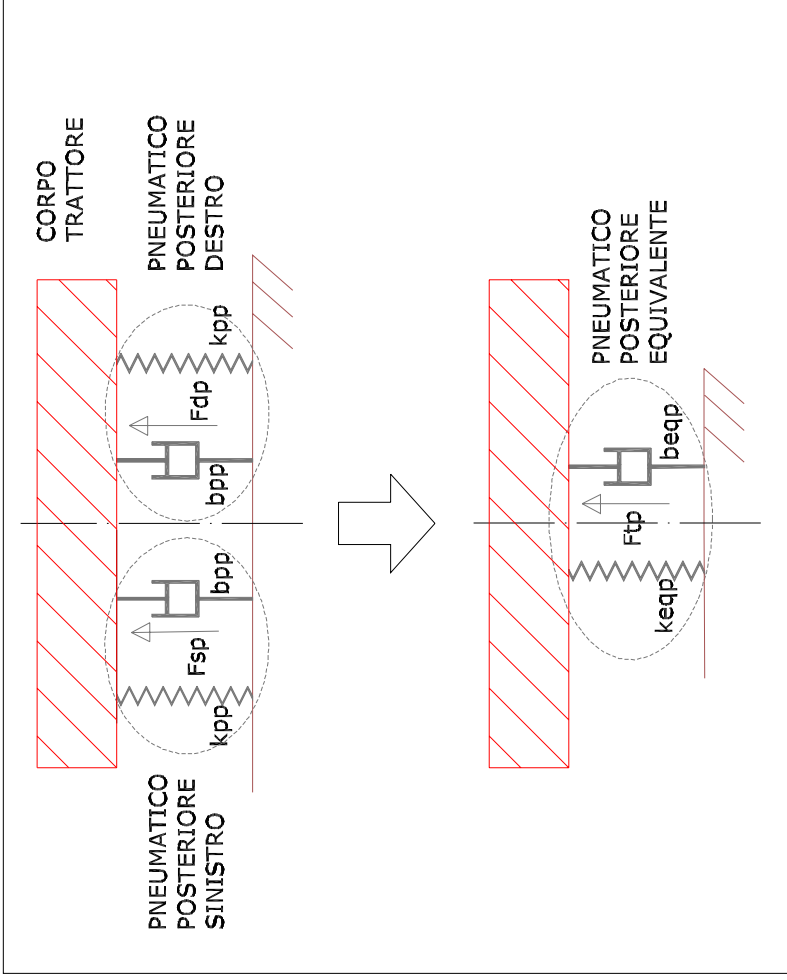


Figura 1.6: Passaggio al pneumatico equivalente posteriore

1.1.3 Il caricamento del trattore

Il trattore può essere caricato sia nella parte anteriore, ad esempio con dei contrappesi sistemati per il bilanciamento, che in quella posteriore con eventuali attrezzi di lavoro, come un'aratro. Il modello quindi andrebbe complicato come in Fig. 1.7 agganciando a m_2^* le seguenti masse:

- m_{2a} carico nella parte anteriore;
- m_{2p} carico nella parte posteriore.

I carichi potrebbero possedere anche un'inerzia rispetto ad un sistema di riferimento locale al caricamento. Siano:

- J_a momento d'inerzia del carico anteriore rispetto ad un'asse z locale al carico anteriore, baricentrico e entrante nel foglio;
- J_p momento d'inerzia del carico posteriore rispetto ad un'asse z locale al carico posteriore, baricentrico e entrante nel foglio.

In modo equivalente si può ritenere ancora valido il modello iniziale di Fig. 1.2 sostituendo però a m_2^* e a J^* la massa m_2 complessiva e il momento d'inerzia J complessivo che risentano cioè anche del contributo di m_{2a} e di m_{2p} :

$$m_2 = m_2^* + m_{2a} + m_{2p}$$

$$J = J^* + J_a + L_a^2 m_{2a} + J_p + L_p^2 m_{2p}$$

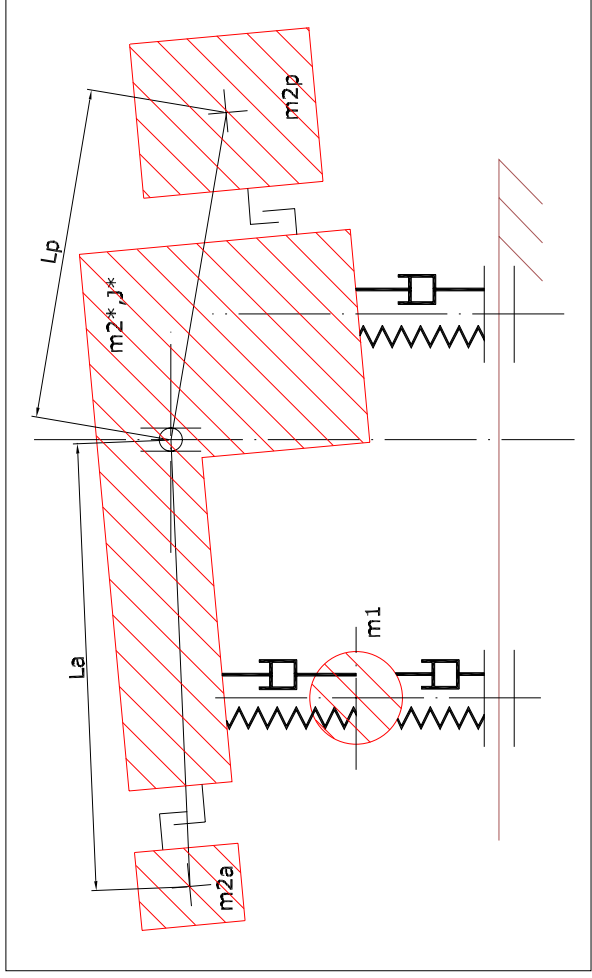


Figura 1.7: Caricamento anteriore e posteriore in un possibile nuovo modello

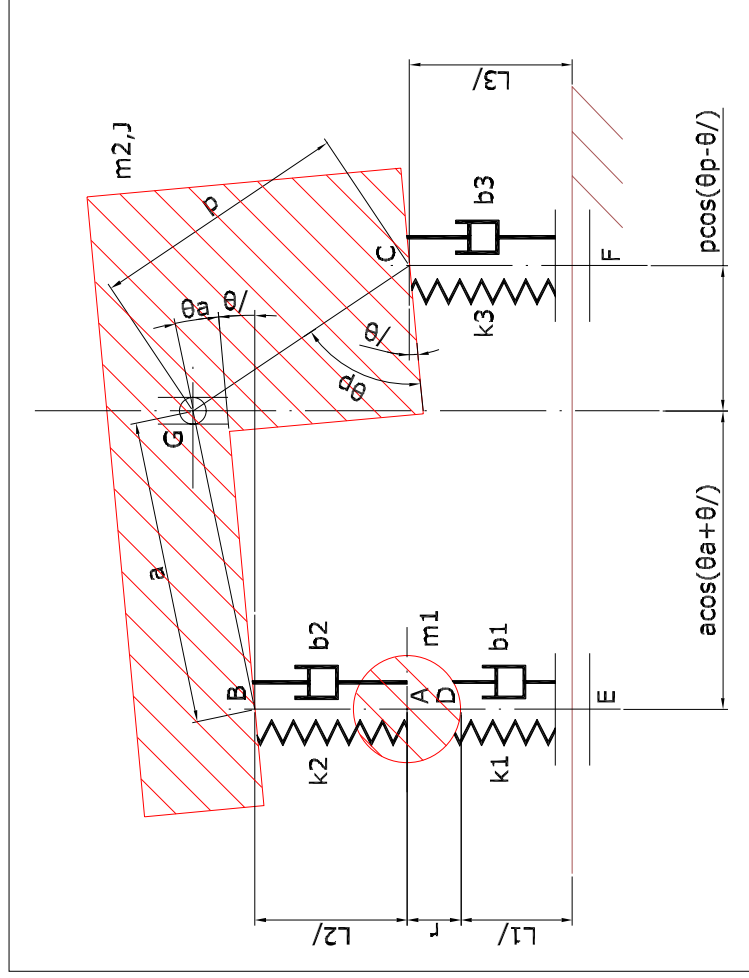


Figura 1.8: Nostro modello con caricamento in una configurazione generica

Il modello completo adottato risulta quindi quello di Fig. 1.8.

m_{2a} , m_{2p} , J_a , J_p , L_a e L_p sono variabili perché esistono molti tipi diversi di caricamento e di conseguenza, nel modello di Fig. 1.8 accade che:

- m_2 e J sono variabili come intensità:

$$m_2 = m_2(m_{2a}, m_{2p}, L_a, L_p)$$

$$J = J(m_{2a}, m_{2p}, J_a, J_p, L_a, L_p)$$

- La posizione di G è variabile.

$$G = G(m_{2a}, m_{2p}, L_a, L_p)$$

Ad esempio, come si nota in Fig. 1.9, se ho solo il caricamento anteriore, il baricentro si sposterà in avanti. Anche se non è illustrato, è scontato che G si può spostare anche verso l'alto o il basso.

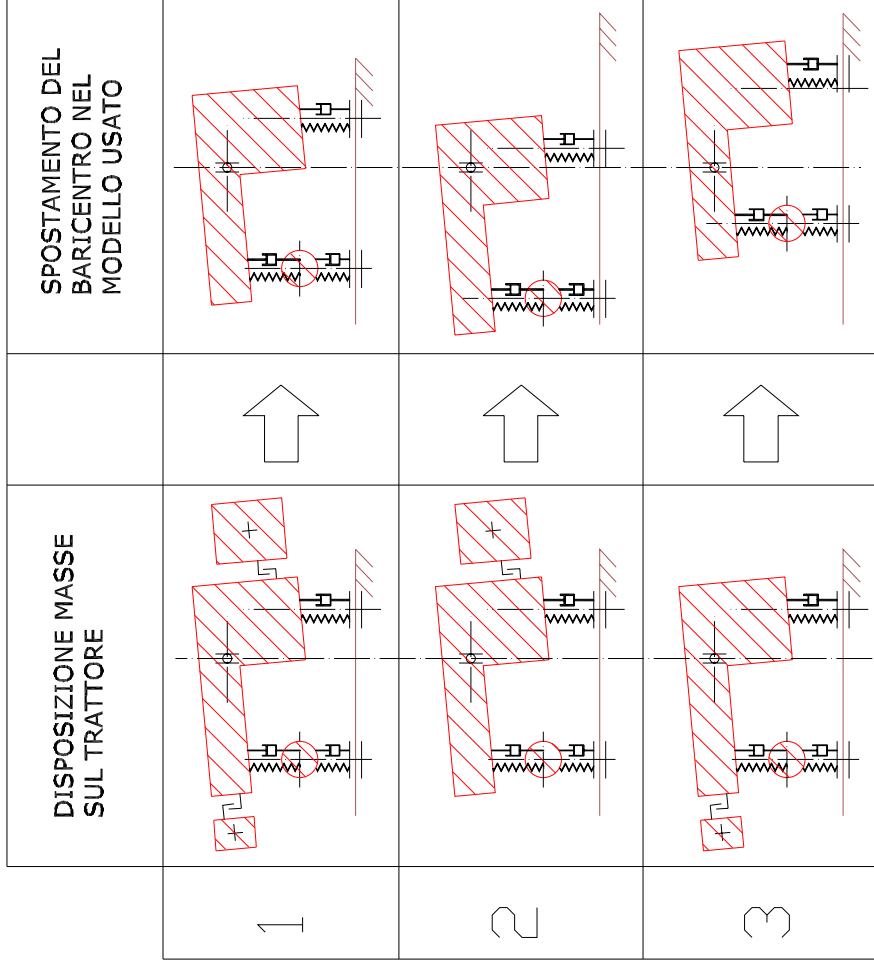


Figura 1.9: Alcune configurazioni di caricamento e conseguente spostamento del baricentro G

Per il fatto che la posizione di G cambia al variare delle condizioni di carico, accade che le coordinate polari che definiscono la posizione dei punti B e C rispetto G debbano essere impostate per ogni nuovo tipo di caricamento:

$$a = a(G) = a(m_{2a}, m_{2p}, L_a, L_p)$$

$$\theta_a = \theta_a(G) = \theta_a(m_{2a}, m_{2p}, L_a, L_p)$$

$$p = p(G) = p(m_{2a}, m_{2p}, L_a, L_p)$$

$$\theta_p = \theta_p(G) = \theta_p(m_{2a}, m_{2p}, L_a, L_p)$$

1.1.4 Analisi statica della generica configurazione

Utilizzando lo schema di Fig. 1.10, esprimiamo adesso le forze statiche agenti sulla massa m_1 e sulla massa m_2 . Ovviamente si presuppone che il trattore sia fermo (in tal caso gli smorzatori non danno contributo di forza) quindi le forze di seguito indicate sono solo determinate dalle molle:

$$F_{i/} = F_{mi/}$$

(si veda per i pedici la Tab. 1.2) Nello schema di Fig. 1.10 le forze sono positive se dirette

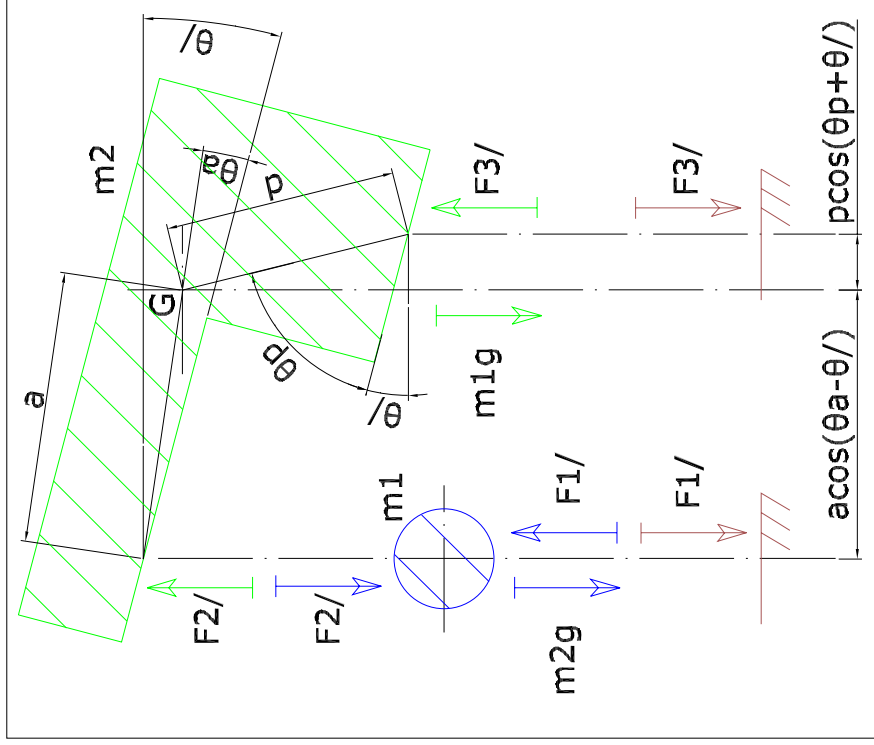


Figura 1.10: Forze statiche

verso l'alto, i momenti positivi se antiorari. Possiamo scrivere:

1. l'equazione di equilibrio delle forze applicate alla massa m_1 :

$$F_{1/} - F_{2/} - m_1 g = 0;$$

2. l'equazione di equilibrio delle forze applicate alla massa m_2 :

$$F_{2/} + F_{3/} - m_2 g = 0;$$

3. l'equazione di equilibrio dei momenti, valutati rispetto a G e applicati alla cassa del trattore, di massa m_2 :

$$F_{3/} p \cos(\theta_p + \theta_l) - F_2 a \cos(\theta_a - \theta_l) = 0;$$

Risolvendo le tre equazioni precedenti messe a sistema nelle incognite $F_{1/}$, $F_{2/}$, $F_{3/}$ si perviene alla seguente soluzione:

$$\begin{cases} F_{1/} = m_1 g + \frac{p \cos(\theta_p + \theta_l)}{a \cos(\theta_a - \theta_l) + p \cos(\theta_p + \theta_l)} m_2 g \\ F_{2/} = \frac{p \cos(\theta_p + \theta_l)}{a \cos(\theta_a - \theta_l) + p \cos(\theta_p + \theta_l)} m_2 g \\ F_{3/} = \frac{a \cos(\theta_a - \theta_l)}{a \cos(\theta_a - \theta_l) + p \cos(\theta_p + \theta_l)} m_2 g \end{cases} \quad (1.3)$$

Forze e schiacciamenti sono proporzionali attraverso le costanti elastiche

$$\begin{cases} F_{1/} = -k_1 s c_{1/} \\ F_{2/} = -k_2 s c_{2/} \\ F_{3/} = -k_3 s c_{3/} \end{cases}$$

Quindi possiamo esprimere gli schiacciamenti delle molle come segue:

$$\begin{cases} s c_{1/} = -\frac{1}{k_1} \left[m_1 g + \frac{p \cos(\theta_p + \theta_l)}{a \cos(\theta_a - \theta_l) + p \cos(\theta_p + \theta_l)} m_2 g \right] \\ s c_{2/} = -\frac{1}{k_2} \left[\frac{p \cos(\theta_p + \theta_l)}{a \cos(\theta_a - \theta_l) + p \cos(\theta_p + \theta_l)} m_2 g \right] \\ s c_{3/} = -\frac{1}{k_3} \left[\frac{a \cos(\theta_a - \theta_l)}{a \cos(\theta_a - \theta_l) + p \cos(\theta_p + \theta_l)} m_2 g \right] \end{cases} \quad (1.4)$$

1.2 Le 3 configurazioni del modello

1.2.1 Riposo

Immaginiamo che il trattore sia appeso: i pneumatici sono scarichi e hanno spessore $L_{1/b}$ e $L_{3/b}$. Immaginiamo ora di posare il trattore spento su un suolo perfettamente orizzontale:

otteniamo la configurazione *riposo* (pedice *rp*). I pneumatici sentono le forze peso delle masse m_1 e m_2 e si schiacciano. Valgono le seguenti relazioni, che traducono le (1.2)

$$\begin{aligned} L_{1rp} &= L_{1tb} + sC_{1rp} \\ L_{3rp} &= L_{3tb} + sC_{3rp} \end{aligned}$$

dove per sC_{1rp} e sC_{3rp} vale il risultato (1.4) trovato nella generica analisi statica, attualizzato attraverso il pedice *rp*.

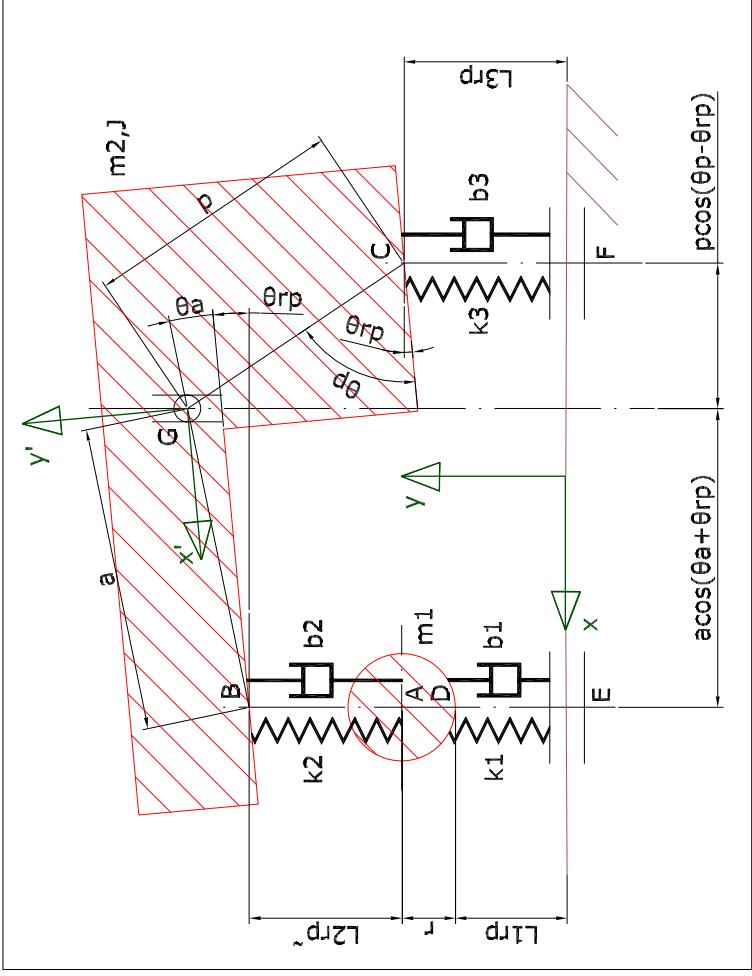


Figura 1.11: Modello in configurazione *riposo*

1.2.2 Accensione

Quando il trattore è spento nella condizione di *riposo* (Fig. 1.11), il corpo del trattore è inclinato rispetto all'orizzontale di un certo angolo θ_{rp} dipendente dalle condizioni di carico. Quando si gira la chiave del trattore, si passa alla nuova configurazione *accensione* (pedice 0): la sospensione automaticamente sente θ_{rp} e si estende o si accorcia per portare il corpo del trattore in posizione orizzontale. Il nuovo angolo rispetto l'orizzonte diviene $\theta_0 = 0$, cioè i due sistemi di riferimento xyz e $x'y'z'$ diventano paralleli. In Fig. 1.11 abbiamo indicato la lunghezza L_{2rp} della sospensione con un *tilde* proprio perché si agisce su questo parametro per allinearsi all'orizzontale.

Da *riposo* ad *accensione* cambia l'inclinazione (da θ_{rp} si passa a $\theta_0 = 0$), quindi secondo le (1.4) cambiano gli schiacciamenti nelle due configurazioni.

$$L_{10} = L_{1tb} + sC_{10} \neq L_{1rp}$$

$$L_{30} = L_{3tb} + sC_{30} \neq L_{3rp}$$

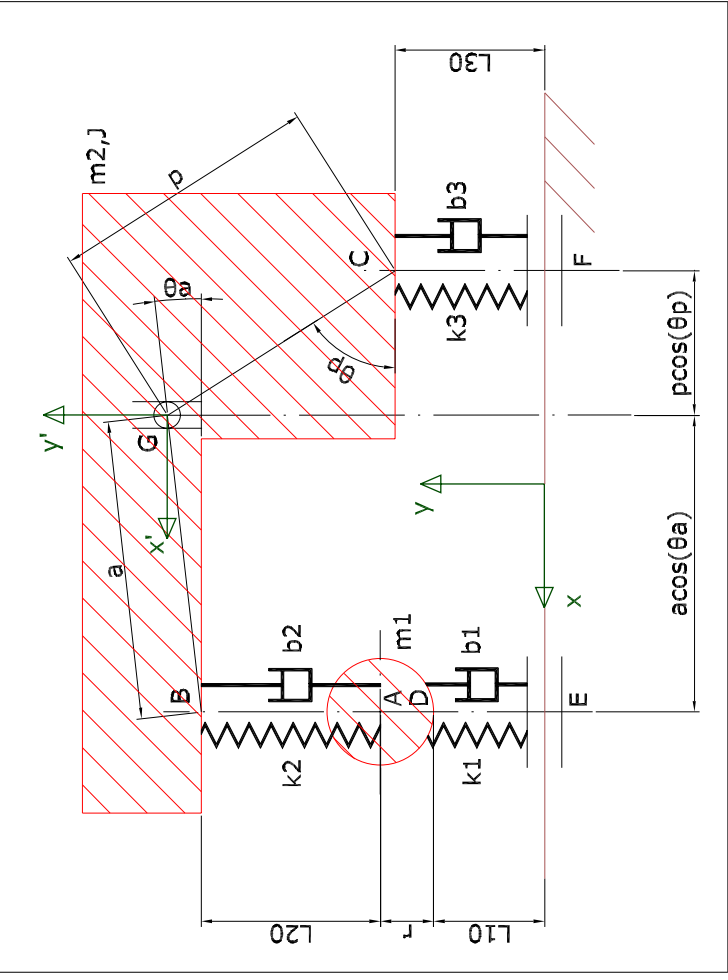


Figura 1.12: Modello in configurazione *accensione*

Osservando la geometria di Fig. 1.12, la quota di G deve risultare la medesima sia sommando le quote alla destra dell'asse verticale per G che quelle alla sua sinistra. Si determina così L_{20} affinché sia $\theta_0 = 0$:

$$\begin{aligned} L_{10} + r + L_{20} + a \sin \theta_a &= L_{30} + p \sin \theta_p, \\ \Rightarrow L_{20} &= L_{30} + p \sin \theta_p - L_{10} - a \sin \theta_a = \\ &= L_{30b} + s c_{30} + p \sin \theta_p - L_{10b} - s c_{10} - a \sin \theta_a \end{aligned}$$

Sostituendo agli schiacciamenti le espressioni (1.4) attualizzate al pedice 0 otteniamo:

$$\begin{aligned} L_{20} &= L_{30b} - L_{10b} + p \sin \theta_p - a \sin \theta_a + \frac{1}{k_1} \left[m_1 g + \frac{p \cos \theta_p}{a \cos \theta_a + p \cos \theta_p} m_2 g \right] \\ &\quad - \frac{1}{k_3} \left[\frac{a \cos \theta_a}{a \cos \theta_a + p \cos \theta_p} m_2 g \right] \end{aligned}$$

1.2.3 *Movimento*

Supponiamo adesso di partire col trattore: nell'analisi viene trascurato il transitorio d'accelerazione e si considera che il baricentro G trasi orizzontalmente ad una velocità costante v_r (velocità di regime); poiché per noi il baricentro è vincolato a scorrere solo in verticale sull'asse passante per esso, risulta conveniente tenere G fermo orizzontalmente e far traslare il terreno in direzione opposta e alla stessa v_r . Il terreno può presentare dei dossi o delle buche che determinano le quote Y_{ta} e Y_{tp} dei punti di contatto pneumatico-terreno rispetto l'orizzontale. Diventa critico l'andamento del terreno percorso dal mezzo: se esso

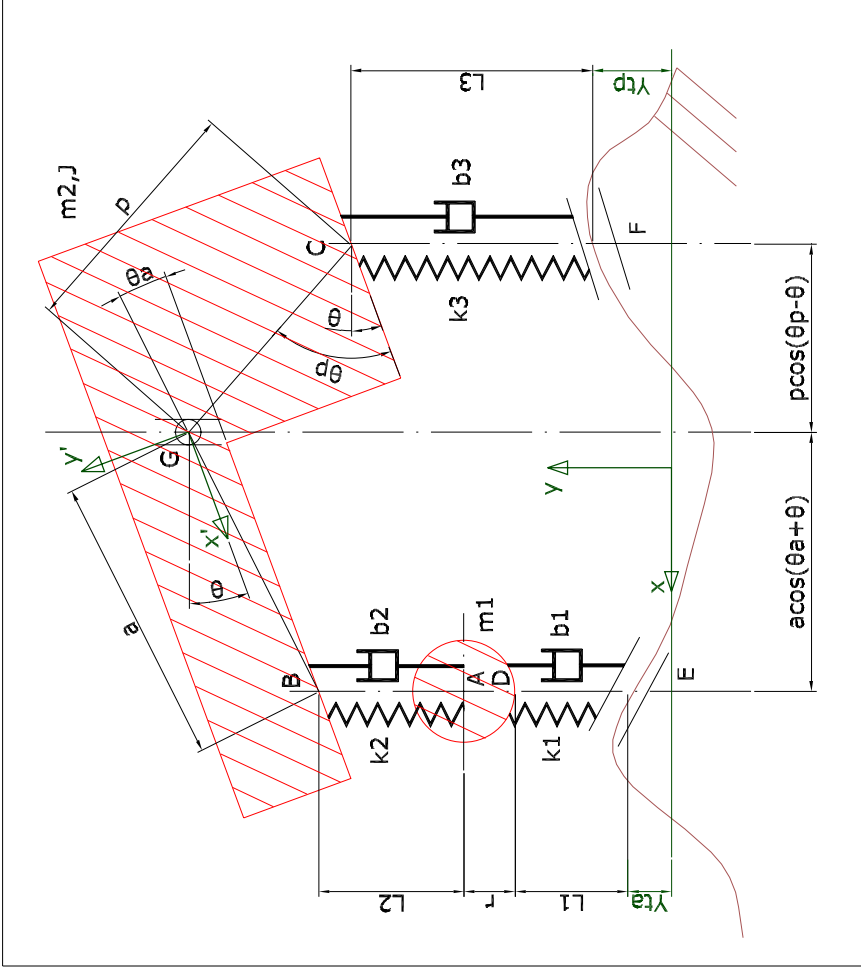


Figura 1.13: Modello in configurazione *movimento*

permane perfettamente orizzontale, la configurazione resta uguale a quella di *accensione* poiché non intervengono nuove forze a modificarla. Se invece esso è ondulato, l'angolo θ , le lunghezze di tutti i gruppi molla-smorzatore e di conseguenza la posizione delle masse cambiano istante per istante, come illustrato in Fig. 1.13. Non è più sufficiente un'analisi statica delle forze per conoscere come si schiacciano le molle poiché nascono anche forze inerziali sulle masse accelerate e forze viscose degli smorzatori dato che essi adesso possiedono una certa velocità di schiacciamento. Pertanto si rende necessaria un'analisi dinamica del sistema che è stata affrontata con *simulink*, un apposito ambiente *matlab* che permette di effettuare delle simulazioni. Quindi passiamo adesso a costruire lo schema *simulink* del modello del trattore.

1.3 Schema *simulink* del trattore

Nello schema *simulink* si sono prese in considerazione solo le dinamiche traslazionali delle masse m_1 e m_2 che avvengono in senso verticale, trascurando quindi per m_1 la dinamica orizzontale, che pure sarebbe presente secondo la rappresentazione a parametri concentrati: ciò è possibile perché l'angolo θ viene supposto piccolo (questa ipotesi, per altri aspetti del problema non è assunta come valida).

Lo schema *simulink* deve poi tener conto di una terza dinamica, cioè quella di rotazione del corpo del trattore di massa m_2 attorno a G , in quanto a tale corpo e ai cari-

camenti ad esso collegati é stata assegnata complessivamente un'inerzia J . Come risulta dalla Fig. 1.14, lo schema *simulink* é suddivisibile in 5 blocchi funzionali:

1. B_a : rappresenta il pneumatico anteriore equivalente;
2. B_b : gestisce la dinamica traslazionale, in direzione verticale, di m_1 ;
3. B_c : rappresenta il sistema sospensione;
4. B_d : descrive le due dinamiche (di traslazione in direzione verticale e di rotazione attorno a G) di m_2 ;
5. B_e : rappresenta il pneumatico posteriore equivalente;

B_a , B_c e B_e sono costituiti dal parallelo di una molla e uno smorzatore; essi ricevono come ingresso la differenza di velocità Δv_i degli estremi dell' i -esimo gruppo molla-smorzatore. Per i blocchi B_a e B_e , una delle due velocità di cui si calcola la differenza Δv_i é la derivata della funzione che rappresenta l'andamento del terreno e che costituisce il vero input all'intero schema (per esempio, il blocco B_a riceverá \dot{Y}_{ia}); l'altra velocità é invece passata al blocco da altri blocchi in cui é stata calcolata (per esempio B_a riceverá da B_b la velocità v_D). L' i -esima molla trasmette una forza proporzionale all'allungamento (o schiacciamento) a cui é sottoposta, per ottenere il quale si deve integrare il segnale Δv_i . Il simbolo dell'integratore é $\frac{1}{s}$. L' i -esimo smorzatore genera una forza proporzionale a Δv_i , per cui si preleva questo segnale senza integrarlo. Le forze di reazione della molla e dello smorzatore si sommano nel nodo sommatore e vengono passate al blocco seguente. Per esempio B_a e B_c trasmettono a B_b rispettivamente le forze di reazione chiamate, secondo le convenzioni di Tab. 1.2, F_1 e F_2 :

$$\begin{aligned} F_{B_a \rightarrow B_b} &= F_1 \\ F_{B_c \rightarrow B_b} &= F_2; \end{aligned}$$

B_b riceve anche come input esterno il peso $-m_1g$ che si somma alle altre due forze nel nodo sommatore. Il segnale in uscita dal nodo viene diviso per m_1 , cosí si ricava l'accelerazione verticale a_1 della stessa massa in base all'equazione di Newton:

$$F_1 + F_2 - m_1g = m_1a_1, \quad a_1 = \frac{F_1 + F_2 - m_1g}{m_1}$$

Quest'ultima costituisce un'equazione scalare, essendo tutti i vettori verticali. a_1 poi viene integrata e il risultato é la velocità verticale v_1 di m_1 . Essa viene poi passata al blocco B_a come velocità v_D dell'estremo D collegato a m_1 del gruppo molla-smorzatore rappresentante il pneumatico anteriore e a B_c come velocità v_A dell'estremo A collegato a m_1 del gruppo molla-smorzatore rappresentante la sospensione.

Analoghe considerazioni valgono per il blocco B_d , con la differenza che, mentre B_b descrive l'unica dinamica di m_1 , B_d descrive le due dinamiche di m_2 , quindi opera su due segnali. Per questo motivo B_d si compone a sua volta di 3 parti:

1. B_{d1} : riceve in input da B_c un segnale monodimensionale e in uscita verso B_{d2} ne fornisce uno bidimensionale. Viceversa riceve in input da B_{d2} un segnale bidimensionale e in uscita verso B_c ne fornisce uno monodimensionale;
2. B_{d2} : descrive le due dinamiche di m_2 ;

Quest'ultimo vettore viene passato a B_{d1} e a B_{d3} che, attraverso \mathbf{T}_1^T e \mathbf{T}_3^T , restituiscono, rispettivamente in output a B_3 e a B_5 , i segnali monodimensionali v_B e v_G . Per esempio B_3 riceve da B_{d1}

$$v_B = \mathbf{T}_1^T \begin{bmatrix} v_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \cos(\theta_a - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = v_2 + a \cos(\theta_a - \theta) \dot{\theta}$$

Si evidenzia che v_B é somma della velocità assoluta v_2 di G e della velocità di rotazione relativa di B attorno a G, cioè la velocità angolare $\dot{\theta}$ per il raggio $a \cos(\theta_a - \theta)$

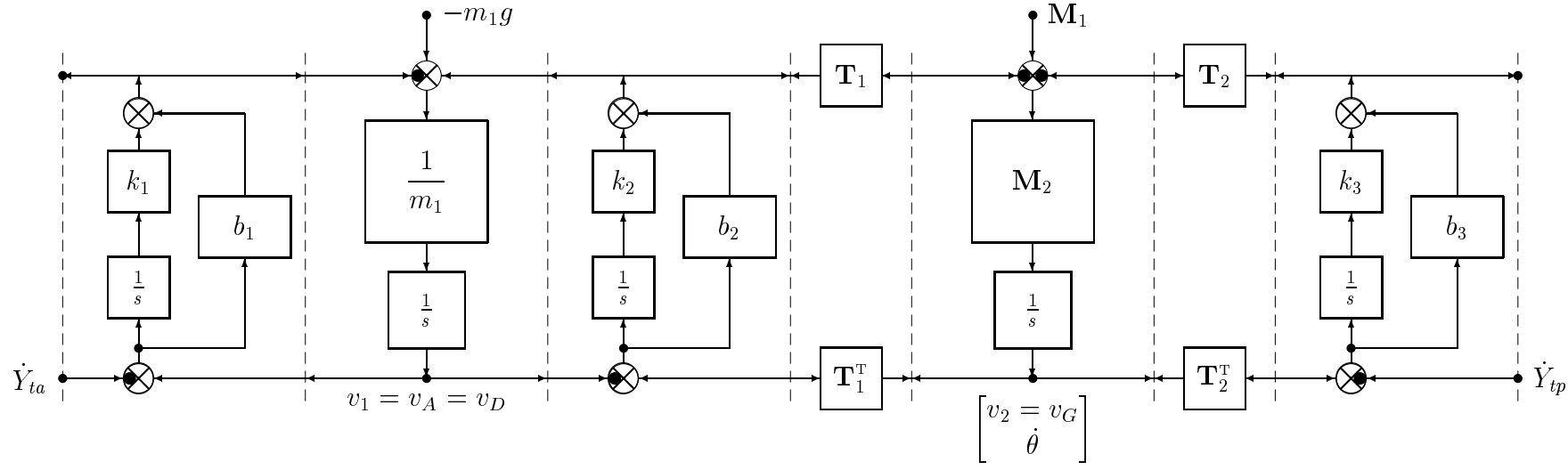


Figura 1.14: Schema simulink ad alto livello del trattore

1.3.1 Realizzazione effettiva dello schema simulink

Lo schema simulink effettivo (Fig. 1.15) non differisce molto da quello ad alto livello (Fig. 1.14). Gli unici aspetti da notare sono:

- lo schema simulink di Fig. 1.15 non fa uso delle matrici \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_3 e delle loro trasposte, perché θ è variabile durante la simulazione, mentre in matlab e in simulink i parametri che si sono passati alle matrici nella fase di definizione iniziale non devono variare. Si é avviato a questo inconveniente traducendo in maniera esplicita il calcolo, che piú agevolmente si sarebbe eseguito nella forma matriciale.
- Come avevo prima accennato, l'input é costituito dalla legge che descrive la conformazione del suolo, che si può pensare come una funzione del tempo o dello spazio dato che operiamo a velocità costante del mezzo, per cui spazio e tempo sono proporzionali. Abbiamo poi anche detto che gli schemi di Fig. 1.14 e di Fig. 1.15 trattano segnali che sono di velocità, per cui richiedono in input la derivata dell'ondulazione del terreno. Essa, immessa nei nodi sommatori dei blocchi B_a e B_e , si sottrae alla velocità dell'altro estremo del parallelo molla-smorzatore che rappresenta il pneumatico e che si considera collegato da una parte al terreno e dall'altra a m_1 o a m_2 . Nella Fig. 1.15 non é direttamente visibile la fonte del segnale *derivata - terreno* e del segnale *terreno*: infatti si é preferito organizzare tutto ciò che riguarda la generazione dell'andamento del suolo in un sottosistema, che é quello di Fig. 1.16. Le quattro fonti che si distinguono fanno riferimento a quattro tipologie possibili del segnale *derivata - terreno*:

Fonte n.1: sinusoidi ritardate;

Fonte n.2: sinusoidi indipendenti;

Fonte n.3: step ritardati;

Fonte n.4: step indipendenti;

Ognuna di queste 4 fonti fornisce in output 4 segnali: *derivata - terreno* e *terreno* del suolo anteriore e posteriore, cioè \dot{Y}_{ta} , Y_{ta} , \dot{Y}_{tp} e Y_{tp} . Questi 16 segnali vengono raggruppati in un unico vettore, da cui poi con un filtro se ne selezionano solo 4, quelli inerenti alla fonte che interessa in quel momento per quella simulazione. In ogni fonte si genera prima il segnale *derivata - terreno* e poi, per integrazione il segnale *terreno*. Logicamente pare piú opportuno generare prima il segnale *terreno* e poi derivarlo per ottenere il segnale *derivata - terreno*, però usare l'operatore di derivazione può dare problemi di stabilità, per cui si é seguita la prima strada. Le simulazioni piú realistiche sono quelle dove i segnali appaiono ritardati, in quanto si può presumere che, se la ruota anteriore incontra un dato profilo di terreno, anche quella posteriore lo incontra con un certo ritardo. Nota la velocità v_r con cui si sposta il trattore, il tempo di ritardo é stimabile con buona approssimazione dalla formula

$$t_{r\text{ritardo}} = \frac{a \cos(\theta_a) + p \cos(\theta_p)}{v_r}$$

che dice che una volta transitato l'asse delle ruote anteriori per un certo traguardo, prima che vi transiti anche l'asse posteriore deve passare alla velocità v_r un segmento di lunghezza pari all'interasse. $t_{r\text{ritardo}}$ é lievemente approssimato perché non si

é tenuto conto dell'angolo θ che incide, anche se di pochissimo, sulla lunghezza dell'interasse (quindi qui sto ipotizzando ancora che θ sia trascurabile). Vedremo piú avanti perché sarà importante anche poter generare due segnali indipendenti per l'anteriore e per il posteriore. Le funzioni *terreno* che nascono dall'integrazione dei segnali *derivata* sono nell'ordine:

Fonte n.1: cosinusoidi ritardate (trattore su terreno ondulato);

Fonte n.2: cosinusoidi indipendenti;

Fonte n.3: rampe ritardate (trattore in salita);

Fonte n.4: rampe indipendenti;

- Il segnale $\dot{\theta}$ va ancora integrato perché ci occorre la posizione angolare θ per calcolare i bracci. In altro modo, θ lo si potrebbe ricavare da considerazioni geometriche note le quote di 2 fra i punti B, G e C.
- Per ora il blocco B_2 relativo alla sospensione lo rappresentiamo ad alto livello come un parallelo molla-smorzatore. Successivamente esso andrà studiato ad un livello piú basso, perché un nostro obiettivo é descrivere accuratamente la dinamica della sospensione. Quindi all'attuale blocco B_2 sostituiremo quello piú dettagliato. Anche le rigidzze dei pneumatici verranno sostituite con altri blocchi poiché esse non sono costanti ma dipendono dal caricamento che grava istantaneamente sul pneumatico.

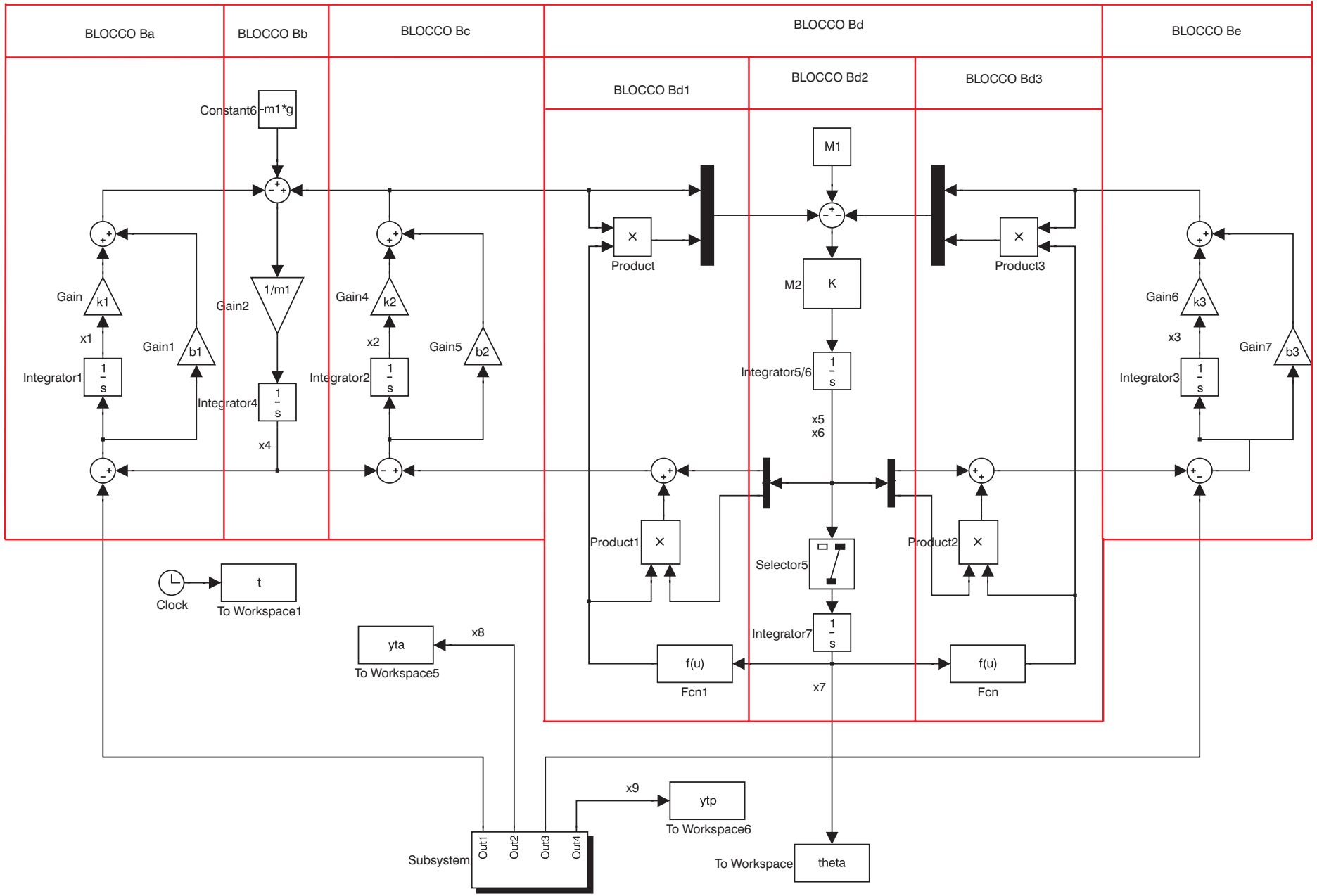


Figura 1.15: Schema simulink impiegato per le simulazioni

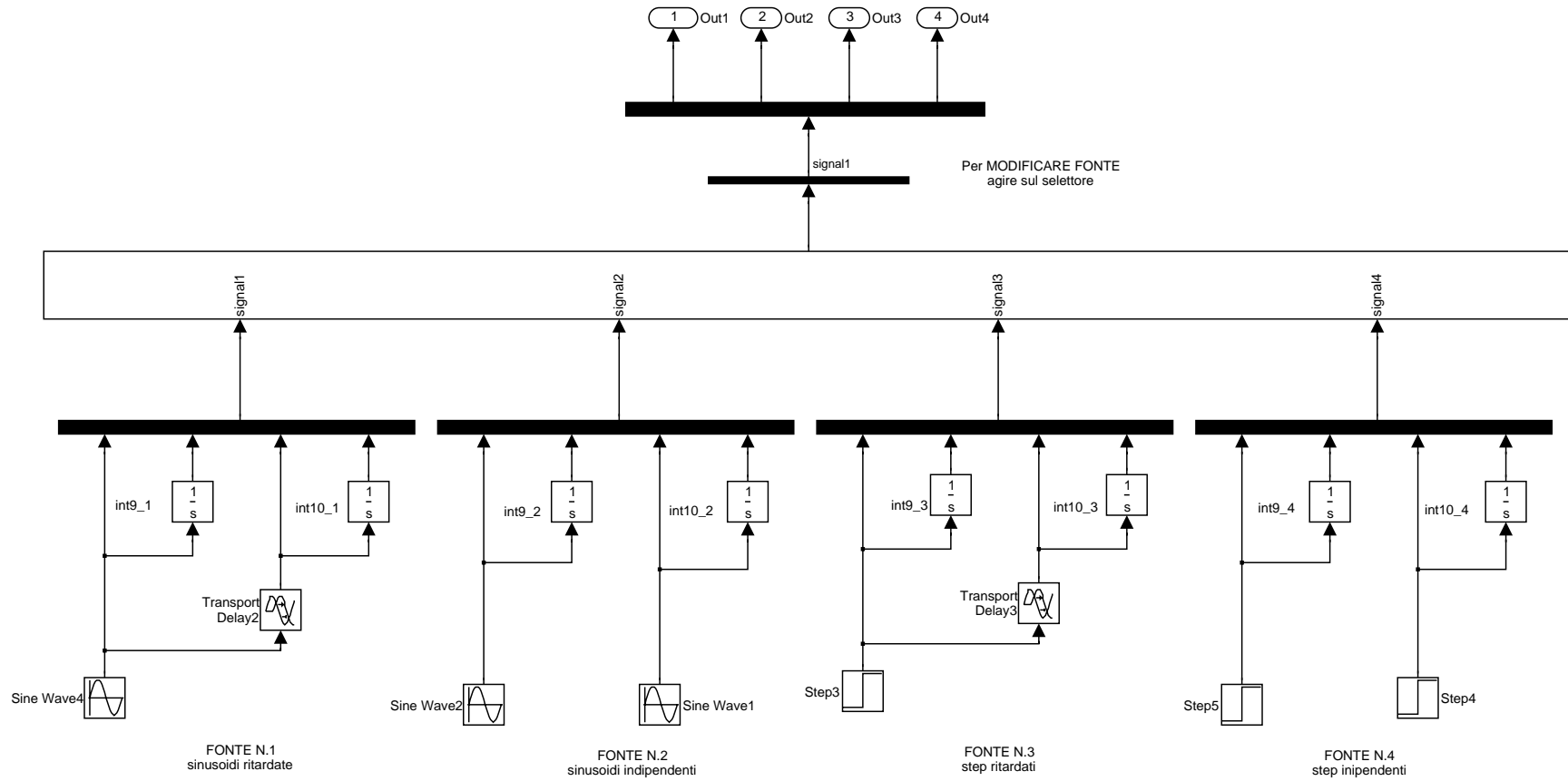


Figura 1.16: Sottosistema che organizza le fonti per i segnali derivata — terreno

1.4 Equazioni differenziali del sistema

Dallo schema simulink, ricaviamo le equazioni differenziali che regolano la dinamica del modello: si vuole ottenere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine e privo di derivate parziali, cioè del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) & (a) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) & (b) \end{cases} \quad (1.5)$$

\mathbf{x} é il vettore che raccoglie le variabili di stato; \mathbf{u} é il vettore degli ingressi, cioè grandezze note che costituiscono l'input del sistema. \mathbf{x} e \mathbf{u} dipendono dal tempo. Se anche in \mathbf{f} compare la dipendenza esplicita dal tempo, il sistema si dice tempo variante, ma non é il nostro caso. \mathbf{y} é il vettore delle uscite, cioè quelle grandezze di interesse per lo studio che si sta affrontando; anch'esso dipende dal tempo. La parte dinamica del sistema é descritta dall'equazione (1.5.a), nella quale \mathbf{f} é detta *funzione di stato*. Se si riuscisse a risolverla, si otterrebbe come soluzione

$$\mathbf{x}(t) = \psi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\cdot), t)$$

dove ψ é detta *funzione di transizione dello stato* e permette di riassumere la storia passata del sistema nelle sue variabili di stato ad un certo istante t . Nell'equazione (1.5.b) la *funzione \mathbf{g} di uscita* esprime le variabili di uscita secondo grandezze note allo stesso istante t ; ce ne occuperemo dopo.

Per ottenere l'equazione (1.5.a) (che in realtà é un sistema d'equazioni essendo \mathbf{f} un vettore) in quella forma é opportuno scegliere come variabili di stato le uscite degli integratori. Nello schema simulink di Fig. 1.15 sono presenti 8 integratori (2 degli 8 sono nel subsystem di Fig. 1.16), di cui però quello del blocco $\mathbf{B}_{\#2}$ opera su due segnali e quindi vale doppio. In totale ci sono 9 integratori e dunque 9 variabili di stato.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sC_1 \\ sC_2 \\ sC_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ \dot{\theta} \\ \theta \\ y_{ta} \\ y_{tp} \end{bmatrix}$$

x_8 e x_9 sono fittizie perché servono solamente a non perdere nella descrizione algebrica del sistema l'informazione della forma d'onda del terreno anteriore e posteriore.

Il vettore degli ingressi invece é costituito da 3 elementi: oltre alla costante gravitazionale \mathbf{g} , ci sono le derivate del terreno anteriore \dot{Y}_{ta} e posteriore \dot{Y}_{tp} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \dot{Y}_{ta} \\ \dot{Y}_{tp} \end{bmatrix}$$

L'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

se esplosa, dar  dunque luogo ad un sistema di 9 equazioni differenziali, perch  $\dot{\mathbf{x}}$ ha 9 componenti (come \mathbf{x}). Ognuna di esse si ottiene ricreando l'espressione analitica del segnale in ingresso al rispettivo integratore e uguagliandola alla derivata della variabile di stato corrispondente. Ad esempio per la seconda equazione differenziale si parte da *integrator*2: il nodo sommatore che gli sta a monte opera la differenza fra v_B , uscita del blocco \mathbf{B}_{d1} verso B_c , ovvero

$$\begin{bmatrix} v_2 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a\cos(\theta_a - \theta) \end{bmatrix},$$

e $v_A = v_1$. Quindi la seconda equazione differenziale si scrive cos :

$$\frac{d}{dt}sc_2 = \begin{bmatrix} v_2 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a\cos(\theta_a - \theta) \end{bmatrix} - v_1$$

cio , sviluppando:

$$\frac{d}{dt}sc_2 = v_2 + a\cos(\theta_a - \theta)\dot{\theta} - v_1$$

Ripetendo questa procedura per tutti gli integratori dello schema simulink, si ricava il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}sc_1 = v_1 - \dot{Y}_{ta} \\ \frac{d}{dt}sc_2 = -v_1 + v_2 + a\cos(\theta_a - \theta)\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}sc_3 = v_2 - p\cos(\theta_p + \theta)\dot{\theta} - \dot{Y}_{tp} \\ \frac{d}{dt}v_1 = -\frac{k_1}{m_1}sc_1 + \frac{k_2}{m_1}sc_2 - \frac{(b_1 + b_2)}{m_1}v_1 + \frac{b_2}{m_1}v_2 + \frac{ab_2\cos(\theta_a - \theta)}{m_1}\dot{\theta} + \frac{b_1}{m_1}\dot{Y}_{ta} - g \\ \frac{d}{dt}v_2 = -\frac{k_2}{m_2}sc_2 - \frac{k_3}{m_2}sc_3 + \frac{b_2}{m_2}v_1 - \frac{(b_2 + b_3)}{m_2}v_2 \\ \quad + \frac{-ab_2\cos(\theta_a - \theta) + pb_3\cos(\theta_p + \theta)}{m_2}\dot{\theta} + \frac{b_3}{m_2}\dot{Y}_{tp} - g \\ \frac{d}{dt}\dot{\theta} = -\frac{ak_2\cos(\theta_a - \theta)}{J}sc_2 + \frac{pk_3\cos(\theta_p + \theta)}{J}sc_3 \\ \quad + \frac{ab_2\cos(\theta_a - \theta)}{J}v_1 + \frac{-ab_2\cos(\theta_a - \theta) + pb_3\cos(\theta_p + \theta)}{J}v_2 \\ \quad + \frac{-a^2b_2(\cos(\theta_a - \theta))^2 - p^2b_3(\cos(\theta_p + \theta))^2}{J}\dot{\theta} - \frac{pb_3\cos(\theta_p + \theta)}{J}\dot{Y}_{tp} \\ \frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}y_{ta} = \dot{Y}_{ta} \\ \frac{d}{dt}y_{tp} = \dot{Y}_{tp} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Come si nota, le ultime due equazioni differenziali ci dicono solo che i segnali *derivata-terreno* anteriore e posteriore vengono immagazzinati nelle derivate delle variabili di stato x_8 e x_9 . Esplicitiamo adesso l'equazione (1.5.b): a differenza di (1.5.a), essa risulta lineare nei suoi argomenti. Per i nostri obiettivi sono variabili di interesse le quote, rispetto

l'orizzontale, di punti significativi, per esempio y_A , y_B e y_C , la velocità angolare $\dot{\theta}$ e l'angolo di beccheggio θ . Poniamo come vettore delle uscite:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \\ \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix};$$

come matrice d'uscita:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

come matrice costante:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} L_{1lb} + r \\ L_{1lb} + L_{2lb} + r \\ L_{3lb} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La (1.5.b) si traduce come:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} \quad (1.7)$$

1.4.1 Verifica delle equazioni differenziali

Cerchiamo ora di verificare la correttezza delle equazioni scritte, almeno nel caso statico. Questo equivale a fermare il trattore su un terreno comunque sconnesso, aspettare che cessino i transitori a causa della dissipazione degli smorzatori e verificare che le equazioni (1.6), applicate a questo caso particolare, siano coerenti con quelle dell'analisi statica (equazioni (1.4)). Riscriviamo il sistema d'equazioni (1.6) ponendo tutte le velocità e le altre derivate rispetto al tempo nulle e otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = -\frac{k_1}{m_1}sc_1 + \frac{k_2}{m_1}sc_2 - g \\ 0 = -\frac{k_2}{m_2}sc_2 - \frac{k_3}{m_2}sc_3 - g \\ 0 = -\frac{ak_2 \cos(\theta_a - \theta)}{J}sc_2 + \frac{pk_3 \cos(\theta_p + \theta)}{J}sc_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

Risolviamo rispetto gli schiacciamenti:

$$\begin{cases} sc_1 = -\frac{1}{k_1} \left[m_1 g + \frac{p \cos(\theta_p + \theta)}{a \cos(\theta_a - \theta) + p \cos(\theta_p + \theta)} m_2 g \right] \\ sc_2 = -\frac{1}{k_2} \left[\frac{p \cos(\theta_p + \theta)}{a \cos(\theta_a - \theta) + p \cos(\theta_p + \theta)} m_2 g \right] \\ sc_3 = -\frac{1}{k_1} \left[\frac{a \cos(\theta_a - \theta)}{a \cos(\theta_a - \theta) + p \cos(\theta_p + \theta)} m_2 g \right] \end{cases} \quad (1.8)$$

Se attualizziamo l'analisi statica alla configurazione *movimento*, le espressioni (1.8) e (1.4) coincidono, per cui abbiamo verificato la correttezza di (1.6), almeno nel caso statico.

1.5 Linearizzazione nell'intorno del punto di lavoro

Mentre l'equazione (1.5.b) é stata esplicitata nell'equazione lineare (1.7), l'equazione (1.5.a) é stata tradotta con il sistema (1.6) che non risulta lineare poiché compare θ in espressioni trigonometriche e inoltre alcune variabili di stato si moltiplicano fra loro. Dunque non é facile trovarne una soluzione chiusa, cioè non si riesce a determinare la funzione ψ di cui sopra si é parlato. Pertanto l'intero sistema (1.5) non risulta lineare; se vogliamo ricavarne una soluzione, seppur approssimata, dobbiamo linearizzare il sistema (1.5) nell'intorno del punto di lavoro (o punto d'equilibrio).

Consideriamo il trattore in moto uniforme su un terreno orizzontale: il trattore si dispone come nella configurazione *accensione* poiché stato di quiete o moto uniforme su terreno orizzontale determinano le stesse forze sul sistema. Scompaiono i termini \dot{Y}_{ta} e \dot{Y}_{tp} , quindi gli ingressi costanti $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ di questo stato di moto saranno:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per il sistema, lo stato \mathbf{x}_0 é uno stato di equilibrio relativo a \mathbf{u}_0 costante se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$$

ció, traducendo la precedente, se:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = v_1 \\ 0 = -v_1 + v_2 + a \cos(\theta_a - \theta) \dot{\theta} \\ 0 = v_2 - p \cos(\theta_p + \theta) \dot{\theta} \\ 0 = -\frac{k_1}{m_1} s c_1 + \frac{k_2}{m_1} s c_2 - \frac{(b_1 + b_2)}{m_1} v_1 + \frac{b_2}{m_1} v_2 + \frac{a b_2 \cos(\theta_a - \theta)}{m_1} \dot{\theta} - g \\ 0 = -\frac{k_2}{m_2} s c_2 - \frac{k_3}{m_2} s c_3 + \frac{b_2}{m_2} v_1 - \frac{(b_2 + b_3)}{m_2} v_2 \\ \quad + \frac{-a b_2 \cos(\theta_a - \theta) + p b_3 \cos(\theta_p + \theta)}{m_2} \dot{\theta} - g \\ 0 = -\frac{a k_2 \cos(\theta_a - \theta)}{J} s c_2 + \frac{p k_3 \cos(\theta_p + \theta)}{J} s c_3 \\ \quad + \frac{a b_2 \cos(\theta_a - \theta)}{J} v_1 + \frac{-a b_2 \cos(\theta_a - \theta) + p b_3 \cos(\theta_p + \theta)}{J} v_2 \\ \quad + \frac{-a^2 b_2 (\cos(\theta_a - \theta))^2 - p^2 b_3 (\cos(\theta_p + \theta))^2}{J} \dot{\theta} \\ 0 = \dot{\theta} \\ 0 = \dot{Y}_{ta} \\ 0 = \dot{Y}_{tp} \end{array} \right.$$

Semplificando questo sistema otteniamo ancora il sistema (1.8). Poniamo poi che la sospensione mantenga orizzontale il corpo del trattore ($\theta = \theta_0 = 0$). Il punto di lavoro diviene:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{m_1 g}{k_1} & -\frac{p \cos \theta_p}{a \cos \theta_a + p \cos \theta_p} & \frac{m_2 g}{k_1} \\ -\frac{p \cos \theta_p}{a \cos \theta_a + p \cos \theta_p} & \frac{m_2 g}{k_2} \\ -\frac{a \cos \theta_a}{a \cos \theta_a + p \cos \theta_p} & \frac{m_2 g}{k_3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{C} \mathbf{x}_0 + \mathbf{D}$$

Passiamo a linearizzare adesso l'equazione (1.5.a) applicando lo sviluppo in serie di MacLaurin del primo ordine alla funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ nell'intorno di $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left(\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0] + \left(\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}} \right)_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0] + \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Trascuriamo gli infinitesimi d'ordine superiore al primo e poniamo:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{B} = \left(\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}} \right)_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}$$

Ricordando che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$ per definizione di punto d'equilibrio, l'equazione linearizzata risulta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0] + \mathbf{B}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0]$$

Calcoliamo le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & a \cos \theta_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -p \cos \theta_p & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & -\frac{(b_1 + b_2)}{m_1} & b_2 & \frac{ab_2 \cos \theta_a}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_1}{k_2} & -\frac{k_3}{m_2} & \frac{m_1}{b_2} & -\frac{m_1}{(b_2 + b_3)} & a_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{a_{62}} & a_{63} & \frac{m_2}{a_{64}} & a_{65} & a_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove, per mancanza di spazio abbiamo definito i seguenti coefficienti:

$$\begin{aligned} a_{56} &= -\frac{ab_2 \cos \theta_a + pb_3 \cos \theta_p}{m_2} \\ a_{62} &= -\frac{ak_2 \cos \theta_a}{J} \\ a_{63} &= \frac{pk_3 \cos \theta_p}{J} \\ a_{64} &= \frac{ab_2 \cos \theta_a}{J} \\ a_{65} &= \frac{-ab_2 \cos \theta_a + pb_3 \cos \theta_p}{J} \\ a_{66} &= \frac{-a^2 b_2 \cos^2 \theta_a - p^2 b_3 \cos^2 \theta_p}{J} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{m_1}{m_2} & 0 & 0 & \frac{b_3}{m_2} & \frac{pb_3 \cos \theta_p}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{pb_3 \cos \theta_p}{J} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasliamo il sistema di riferimento delle incognite \mathbf{x} , degli ingressi \mathbf{u} e delle uscite \mathbf{y} e otteniamo le nuove coordinate $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ e $\tilde{\mathbf{y}}$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \\ \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}) - (\mathbf{C}\mathbf{x}_0 - \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Essendo $\mathbf{x}_0 = \text{costante}$, risulta $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}}$ e quindi il sistema linearizzato diventa:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (1.9)$$