

L'output piú importante é l'angolo di beccheggio. Se fosse individuata esattamente la velocità del trattore alla quale il beccheggio diventa sensibile, sarebbe interessante vedere come l'angolo di beccheggio varia in un intorno di detta velocità; per questo motivo il programma mostra l'andamento dell'angolo di beccheggio per sinusoidi in ingresso aventi pulsazioni pari a

$$[0.95 \quad 1.05 \quad 1.1 \quad 1] \omega \quad (2.8)$$

dove ω é ricavata dalla relazione (2.7). Poi procede alla visualizzazione dei vari output citati, che si riferiscono solo alla pulsazione ω in questione.

2.2.4 Il modello linearizzato e il confronto col modello non lineare

Per determinare a quale velocità del trattore diventa rilevante il beccheggio, si é fatto uso dei diagrammi di Bode. Per un sistema SISO (Single-Input-Single-Output) una funzione di trasferimento $G(s)$ nel dominio delle frequenze é il legame esistente fra l'input $X(s)$ e l'output $Y(s)$ (Fig. 2.16):

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

Il sistema lineare, implementato attraverso le matrici ricavate nel primo capitolo, é del

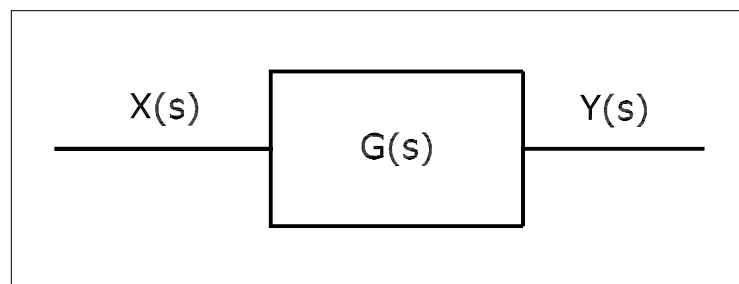


Figura 2.16: Sistema SISO

tipo MIMO, cioè Multi-Input-Multi-Output, per il quale esiste un numero di funzioni di trasferimento pari al prodotto del numero di input per quello degli output. Matlab permette di ottenere un vettore con tutte le funzioni di riferimento possibili; selezionando un elemento di tale vettore, cioè una determinata funzione di trasferimento, é possibile studiarla come fosse un sistema SISO: se ne possono graficare i diagrammi di Bode, si puó conoscere la posizione dei poli e degli zeri, la risposta allo step, al gradino, alla rampa ecc. Tutte queste funzionalità sono presenti in Matlab nell'utilities del control toolbox. La funzione di trasferimento piú importante ai fini della nostra analisi é quella che lega la sinusoide in ingresso con l'angolo di beccheggio. Essa é uguale alla funzione di trasferimento fra la derivata della sinusoide in ingresso e la velocità angolare del corpo del trattore, come risulta dalla Fig. 2.17. Infatti la funzione di trasferimento del blocco tratteggiato vale

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

mentre la funzione di trasferimento fra l'ingresso e l'uscita del blocco centrale vale:

$$G'(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

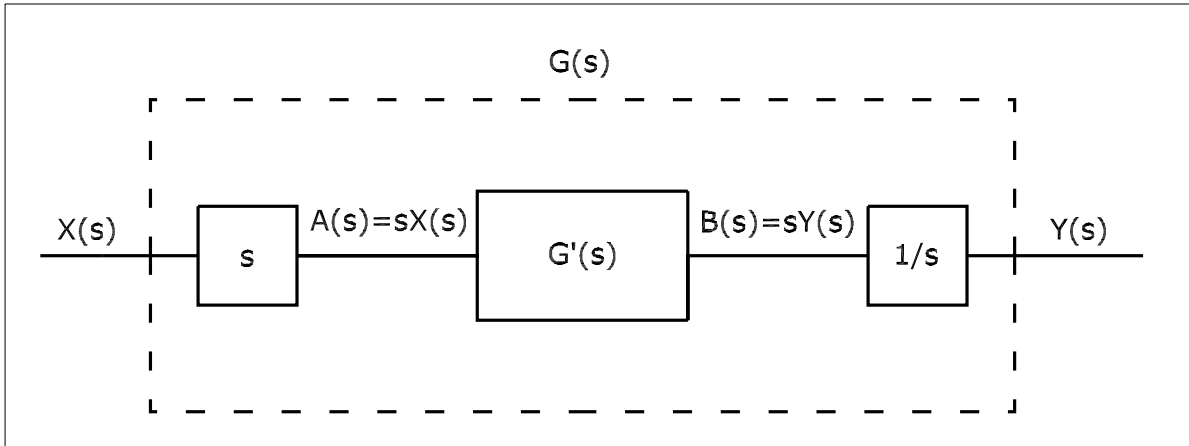


Figura 2.17: Funzioni di trasferimento $G'(s) = G(s)$

con

$$A(s) = s X(s) \quad B(s) = s Y(s)$$

e quindi

$$G'(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s Y(s)}{s X(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

Applicando queste considerazioni al caso specifico, $X(s)$ é la trasformata di Laplace del segnale del terreno posteriore e $s X(s)$ ne rappresenta la derivata nel dominio delle frequenze per condizione iniziale nulla; $Y(s)$ é l'angolo di beccheggio del trattore, $s Y(s)$ rappresenta dunque, nel dominio delle frequenze e per condizione iniziale nulla, la velocità angolare del corpo del trattore attorno al suo baricentro. Noi otterremo la $G(s)$ come $G'(s)$, cioè, riferendoci al primo capitolo, come quella funzione di trasferimento fra il terzo ingresso $\tilde{u}_3 = \dot{Y}_{tp}$ e la seconda quarta uscita $\tilde{y}_4 = \dot{\theta}$ del sistema linearizzato.

$$G'(s) = \frac{\dot{\theta}}{\dot{Y}_{tp}} = G(s)$$

Poi tratteremo i diagrammi di Bode di $G(s)$: se l'ingresso al sistema lineare é di tipo sinusoidale, essi mostrano come varia l'ampiezza e la fase dell'uscita sinusoidale del sistema al crescere della pulsazione della sinusoide in ingresso (la pulsazione invece resta uguale fra la sinusoide in ingresso e quella in uscita). Se sono presenti dei picchi nel diagramma di Bode delle ampiezze, significa che, per una determinata pulsazione del terreno sinusoidale in ingresso, l'angolo di beccheggio é molto piú elevato rispetto a quello che si riscontra alle altre pulsazioni. Ad una certa pulsazione é legata una specifica velocità di marcia v_r del trattore, quindi il modello é in grado di indicare a quali velocità il moto di beccheggio é accentuato e a quali tale moto risulta filtrato dal sistema.

Gli stessi diagrammi di Bode si possono ottenere anche in altro modo, partendo questa volta dallo schema simulink del modello non lineare. Matlab infatti, grazie allo strumento della Linear Analysis, é in grado di linearizzare un certo percorso in uno schema simulink che si presenta complessivamente come non lineare; é sufficiente indicare sullo schema il punto di ingresso e il punto d'uscita fra cui si intende compresa la porzione di sistema da rendere lineare.

Linear Analysis lavora a livello numerico, utilizzando i risultati di una simulazione. Dopo averla effettuata, sono a disposizione tutti gli strumenti prima elencati: diagrammi di Bode, posizione dei poli e degli zeri ecc. Per piccoli scostamenti dal punto di lavoro, i risultati dell'analisi eseguita col modello lineare e quelli di Linear Analysis dovrebbero coincidere.

2.2.5 Simulazione n.°1

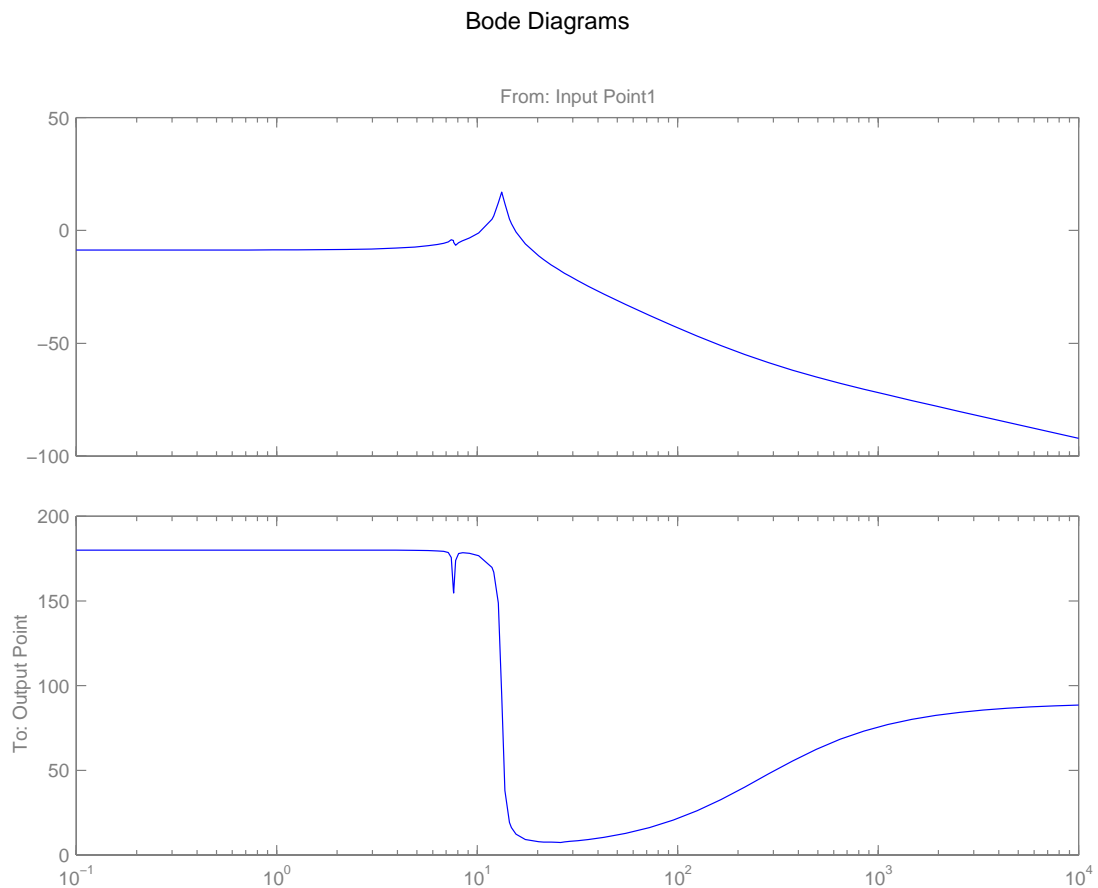


Figura 2.18: Diagrammi di Bode per *Simulazione n.°1*: ampiezza e fase della sinusoide rappresentante l'angolo di beccheggio in funzione della pulsazione della sinusoide del terreno posteriore

Questa prima simulazione é stata effettuata con il seguente caricamento:

- carico anteriore $m_{2a} = 1100 \text{ kg}$;
- carico posteriore $m_{2p} = 0 \text{ kg}$.

L'ampiezza delle sinusoidi in ingresso é di 4 mm . Lanciata la simulazione, si ricavano, da Linear Analysis, i diagrammi di Bode di Fig. 2.18 per l'ampiezza e la fase dell'angolo di beccheggio. Si nota un picco di risonanza in corrispondenza di una pulsazione poco superiore a $10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Per frequenze inferiori e superiori il sistema é filtrante e infatti il guadagno rimane inferiore a 0 db . Senza modificare i parametri geometrici e di caricamento, altrimenti cambierebbero i diagrammi di Bode, si lancia nuovamente la simulazione

del modello non lineare per un intorno della pulsazione di risonanza ($w = 13,2 \frac{rad}{sec}$) e si ottengono tanti grafici dell'angolo di beccheggio quante sono le componenti del vettore delle pulsazioni (2.8). Questi grafici sono rappresentati nelle Figg. 2.19- 2.20- 2.21- 2.22.

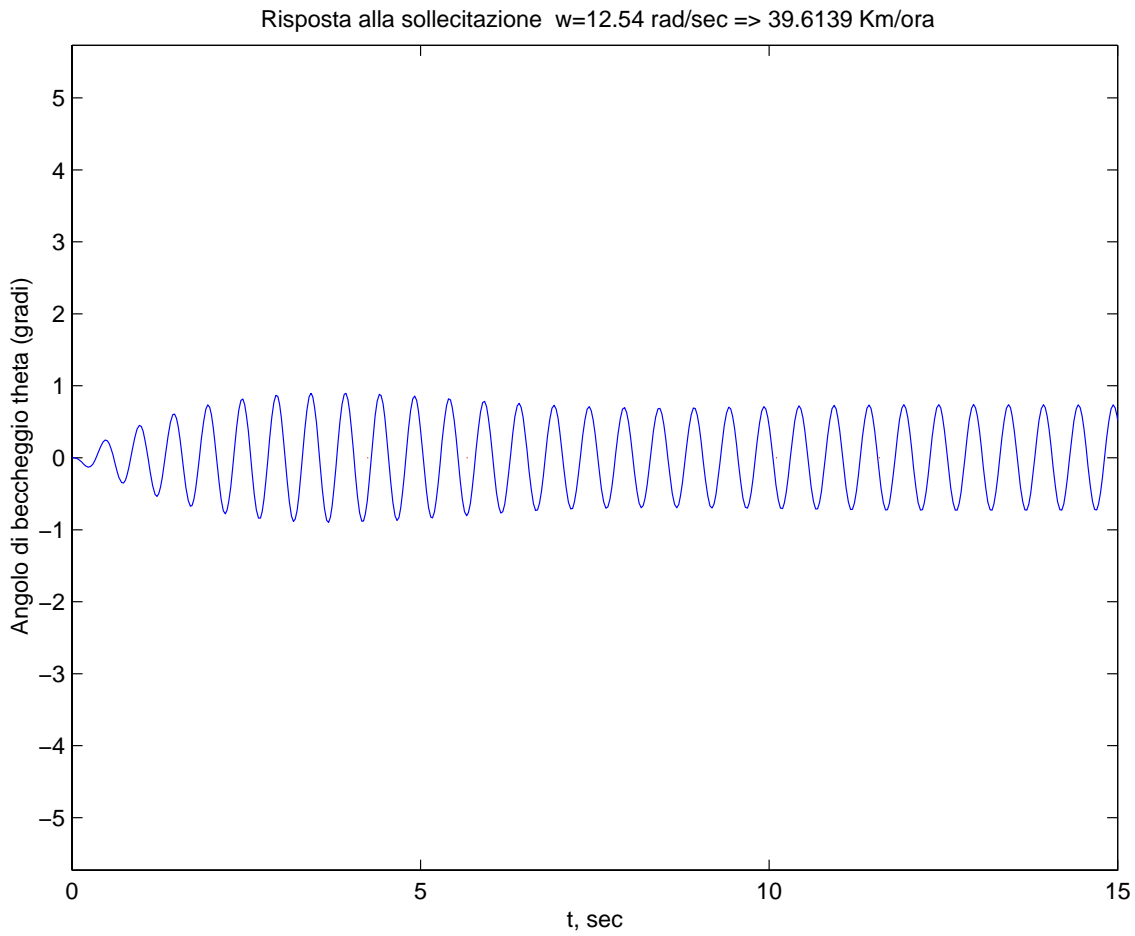


Figura 2.19: Angolo di beccheggio in funzione del tempo per una sinusoide in ingresso di pulsazione $w = 12,52 \frac{rad}{sec}$

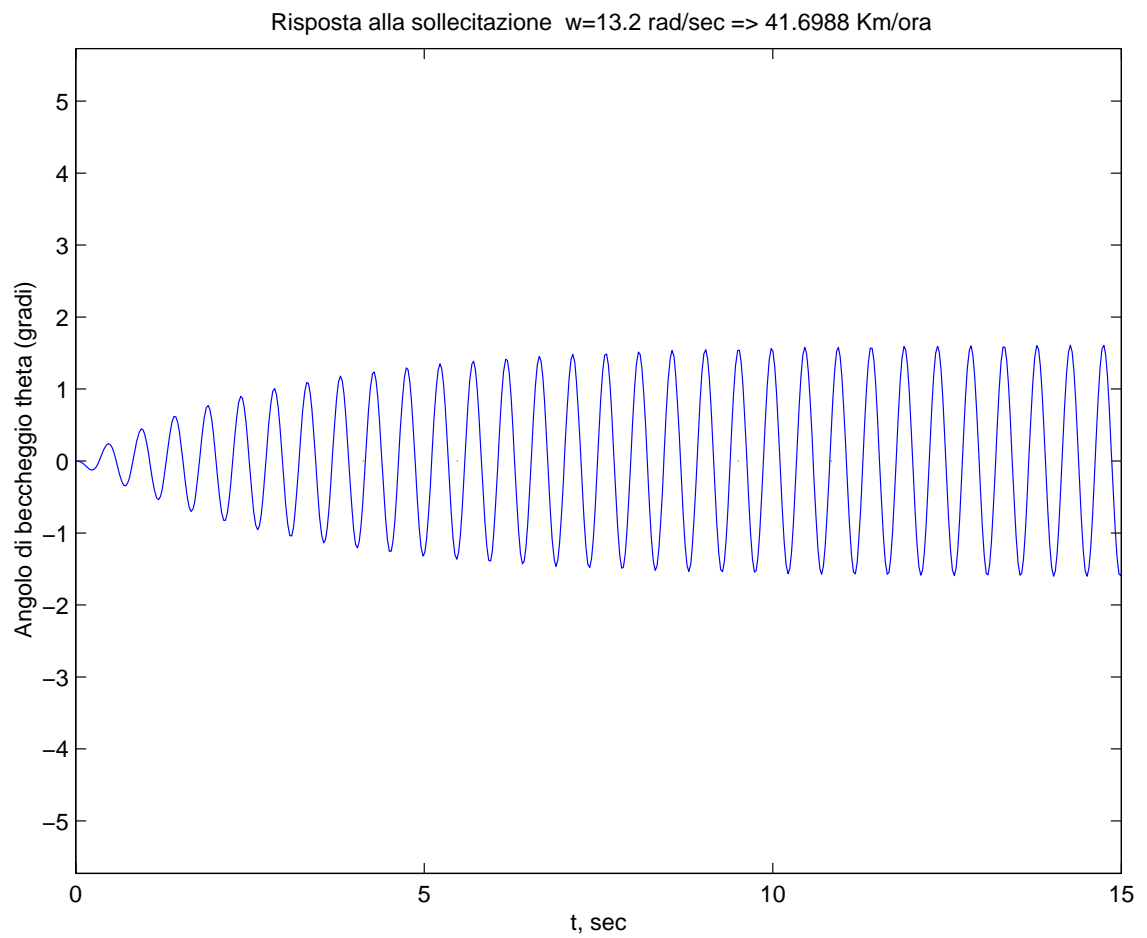


Figura 2.20: Angolo di beccheggio in funzione del tempo per una sinusoidale in ingresso di pulsazione $w = 13,2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

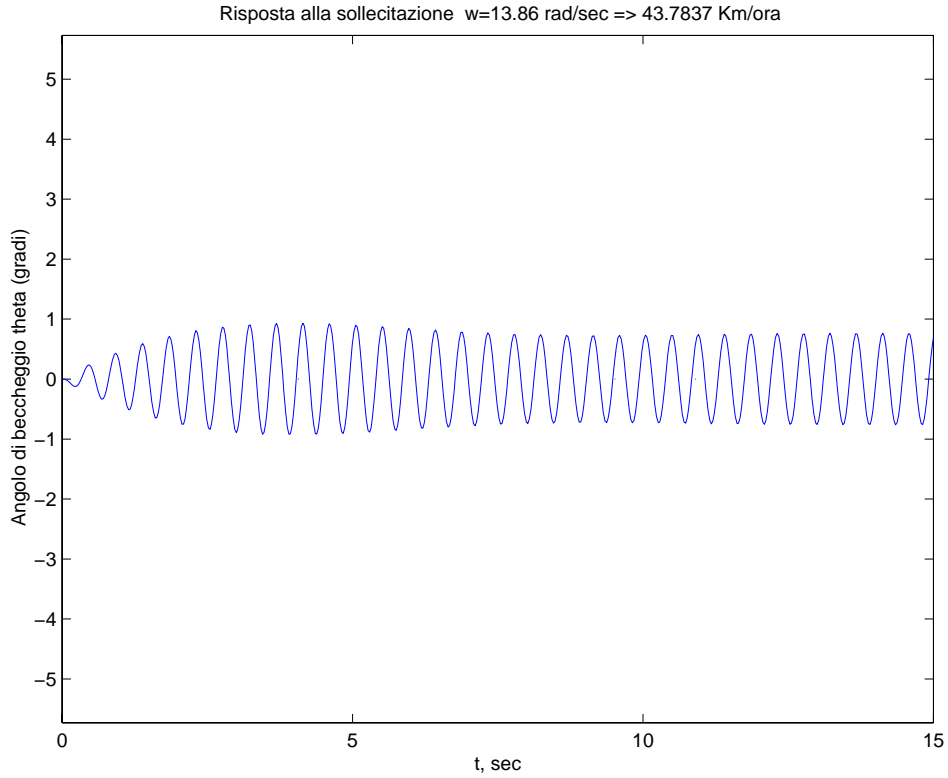


Figura 2.21: Angolo di beccheggio in funzione del tempo per una sinusoide in ingresso di pulsazione $w = 13,86 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

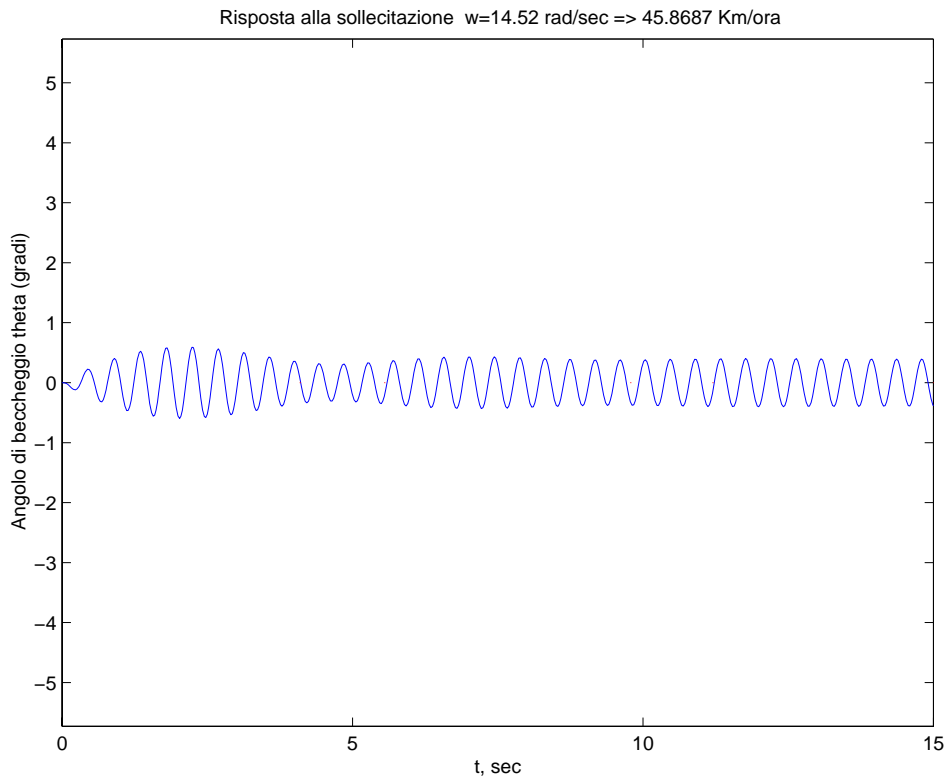


Figura 2.22: Angolo di beccheggio in funzione del tempo per una sinusoide in ingresso di pulsazione $w = 14,52 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

Esaurito un certo transitorio, l'angolo di beccheggio é una funzione sinusoidale la cui ampiezza, come ci aspettavamo, ha un massimo per una pulsazione della sinusoide del terreno di circa $w = 13,2 \frac{rad}{sec}$, che corrisponde, attraverso l'equazione (2.7), ad una velocità del trattore di $42 \frac{km}{h}$. I grafici ottenuti danno risultati coerenti con la Fig. 2.18 anche per quel che riguarda il guadagno d'ampiezza. Se ad esempio consideriamo la pulsazione alla quale si verifica la risonanza, cioè $w = 13,2 \frac{rad}{sec}$, ad essa corrisponde il seguente guadagno:

$$17,1 \text{ db} = 10^{\frac{17,1}{20}} \simeq 7,16 \frac{rad}{m}$$

La sinusoide in ingresso ha ampiezza di 4 mm per cui il beccheggio del sistema sarà una sinusoide di ampiezza:

$$x^\circ = 7,16 \frac{rad}{m} 4 \text{ mm} = 7,16 \frac{rad}{m} 0,004 \text{ m} \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 1,64^\circ$$

e $1,64^\circ$ é circa l'ordinata dei massimi della sinusoide a regime sul grafico di Fig. 2.20. Potrebbe sembrare basso un angolo di beccheggio di solo $1,64^\circ$, ma considerando un braccio di 2 m , l'ampiezza delle oscillazioni risulta di circa 6 cm .

Analizziamo gli altri grafici.

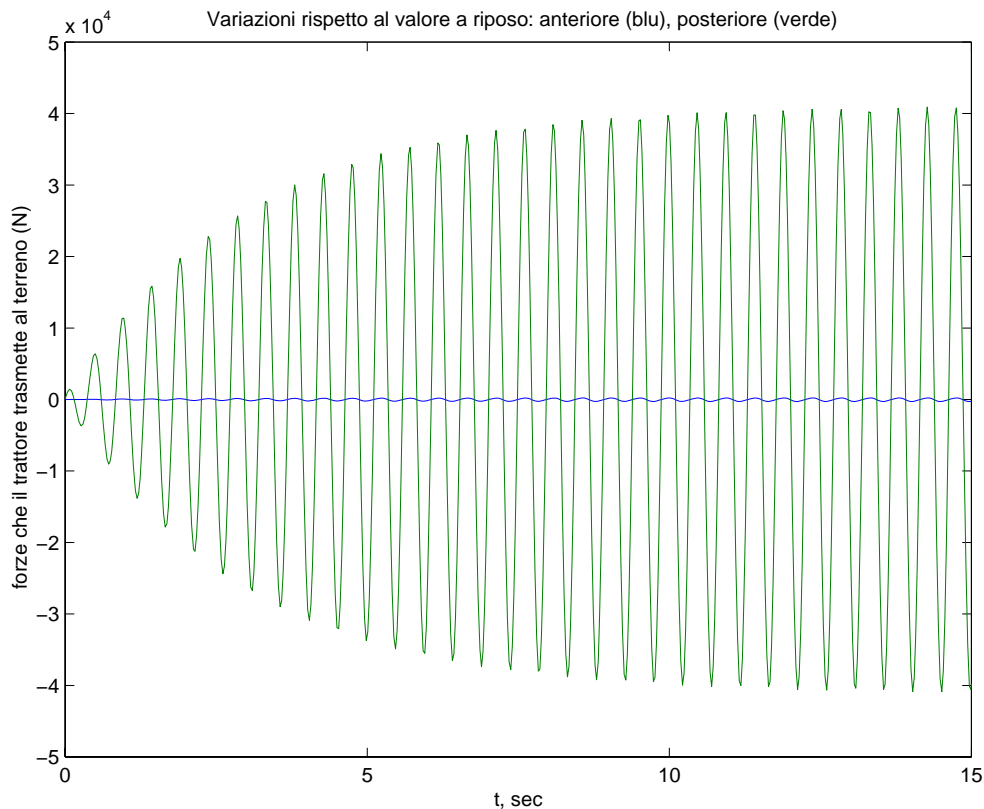


Figura 2.23: Variazione rispetto alla configurazione *accensione* delle forze che si scaricano al suolo per una sinusoide sotto il pneumatico posteriore di pulsazione $w = 13,2 \frac{rad}{sec}$

In Fig. 2.23 la forza che il pneumatico posteriore trasmette al suolo subisce variazioni nettamente superiori rispetto a quelle della forza che scarica il pneumatico anteriore: queste ultime appaiono insignificanti come ampiezza. Si nota che i due andamenti, dopo

un certo transitorio, sono di tipo sinusoidale e sono in fase fra loro. Ovviamente non bisogna interpretare il fatto che le forze possano diventare negative come un'inversione di segno della reazione del terreno sul pneumatico: infatti essa non può essere che diretta dal suolo al pneumatico (il terreno non può attrarre il pneumatico!). Si ricorda che si sono graficate variazioni di forze.

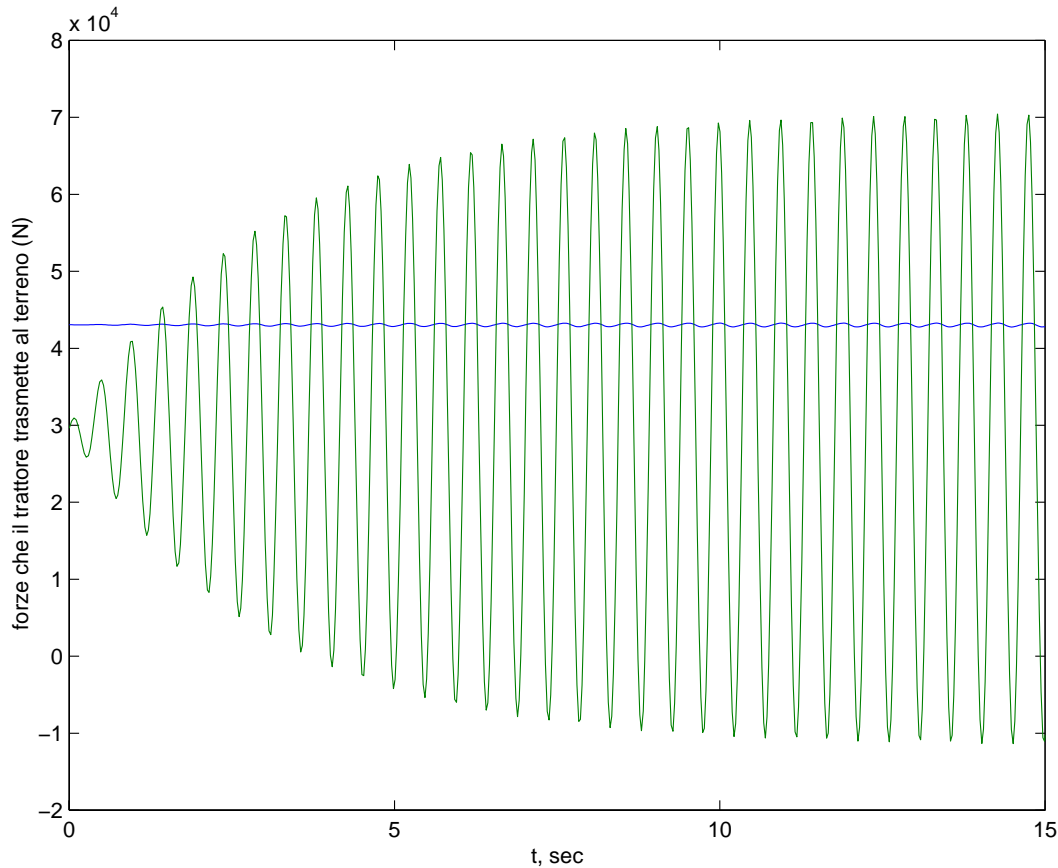


Figura 2.24: Forze che si scaricano al suolo per una sinusoida sotto il pneumatico posteriore di pulsazione $w = 13,2 \frac{rad}{sec}$

L'andamento delle forze è invece quello di Fig. 2.24. Potrebbe apparire strano che la forza che il pneumatico anteriore scambia col suolo (linea blu) sia maggiore di quella del pneumatico posteriore (linea verde). Ciò è dovuto al caricamento scelto, che è solo anteriore e quindi sposta il baricentro del corpo del trattore più vicino all'assale anteriore che a quello posteriore. Si nota che la forza che il pneumatico posteriore trasmette al suolo si inverte di segno. È un'inesattezza del programma, che non è accurato da questo punto di vista. Bisognerebbe inserire una saturazione per le forze F_1 e F_3 , in modo da renderle nulle quando esse tendessero a diventare negative (distacco dal suolo). Non la si è inserita anche a causa dei problemi che sarebbero sorti in fase di linearizzazione. Si diceva che la forza che si scambiano il pneumatico anteriore e il suolo varia poco rispetto a quella posteriore; dato che le forze sono proporzionali agli schiacciamenti delle molle, possiamo supporre che le molle anteriori si schiaccino poco rispetto a quelle posteriori, ragionando in prima approssimazione a rigidità costanti e uguali fra loro.

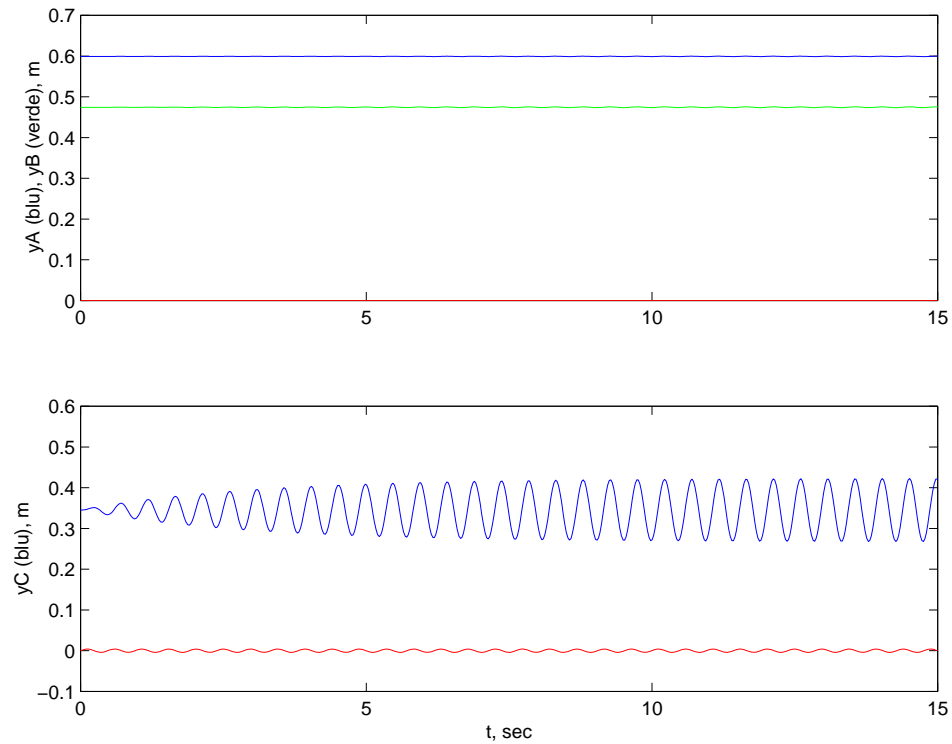


Figura 2.25: Altezze dei punti A, B, C per una sinusoide sotto il pneumatico posteriore di pulsazione $w = 13,2 \frac{rad}{sec}$

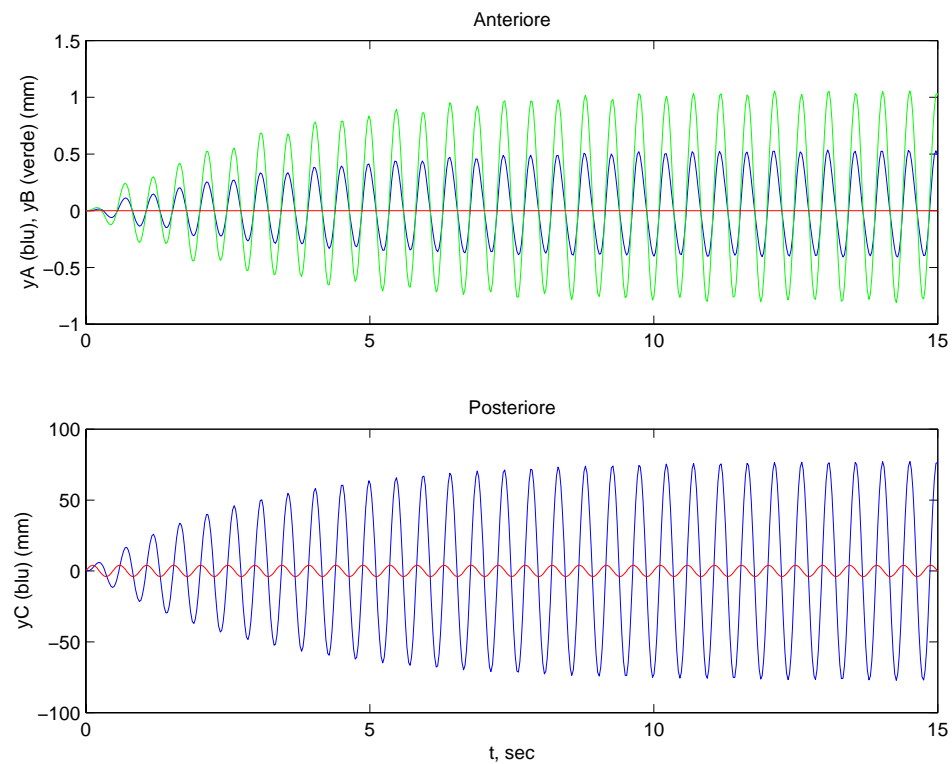


Figura 2.26: Variazione di quota dei punti A, B, C per una sinusoide sotto il pneumatico posteriore di pulsazione $w = 13,2 \frac{rad}{sec}$

Nella Fig. 2.25 si graficano le quote dei punti notevoli A, B, C rispetto al terreno. A causa della scala impiegata, sembra che solo la quota di C vari. In realtà oscillano anche le posizioni di A e B, però in maniera modesta, proprio come ci aspettavamo. Nelle Figg. 2.25- 2.26, le linee rosse rappresentano l'andamento del terreno, piatto sull'anteriore, sinusoidale sul posteriore.

La Fig. 2.26 evidenzia il fatto che i punti A e B si spostano verticalmente, mostrando però che la loro variazione di quota è di due ordini di grandezza inferiore a quella del punto C. Inoltre i punti A, B e C oscillano in fase fra loro: ad esempio, in corrispondenza dell'istante di 5 sec tutte e tre le sinusoidi presentano un massimo. Questo potevamo già supporlo per i punti A e C dal grafico di Fig. 2.23, essendo le variazioni di forza fasate fra loro.

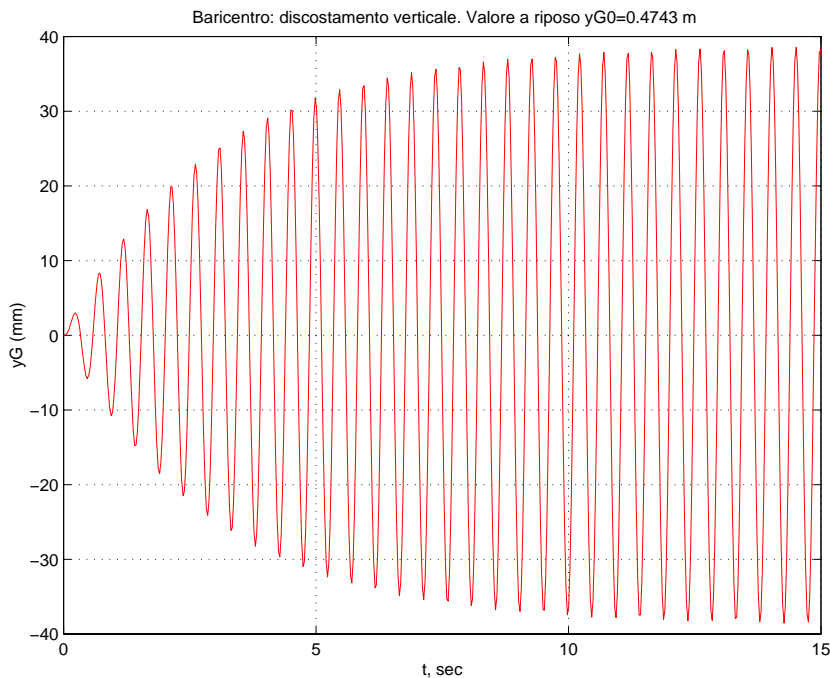


Figura 2.27: Variazione della quota del baricentro

Nella Fig. 2.27 si rappresenta la variazione di quota del baricentro rispetto alla configurazione *accensione*. Tale variazione non è nulla, quindi il baricentro non è centro di istantanea rotazione della cassa del trattore rispetto all'orizzontale. Da tutte queste considerazioni, si deduce che il trattore saltella sul posteriore.

Il centro di rotazione quindi si trova spostato verso l'anteriore. Si può dire di più: il centro di istantanea rotazione si troverà al di fuori dell'interasse fra le ruote, come mostrato in Fig. 2.28. Qui la cassa è schematizzata come un segmento e sono prese in considerazione solo due molle aventi estremi in A e C. È un'operazione lecita perché la molla che rappresenta la sospensione oscilla in fase con quella del pneumatico anteriore, quindi possiamo considerarle come un'unica molla. Proviamo a posizionare il centro di istantanea rotazione (CIR) fuori del segmento AC: se la molla anteriore, quella con estremo in A, si allunga e raggiunge il massimo allungamento in A', anche la molla posteriore è allungata e trova il massimo del suo allungamento periodico in C'. Così pure, se AA'' rappresenta l'accorciamento massimo per la molla anteriore, CC'' è l'accorciamento massimo per quella posteriore. Le molle oscillano in fase e la molla anteriore ha un'escursione mi-

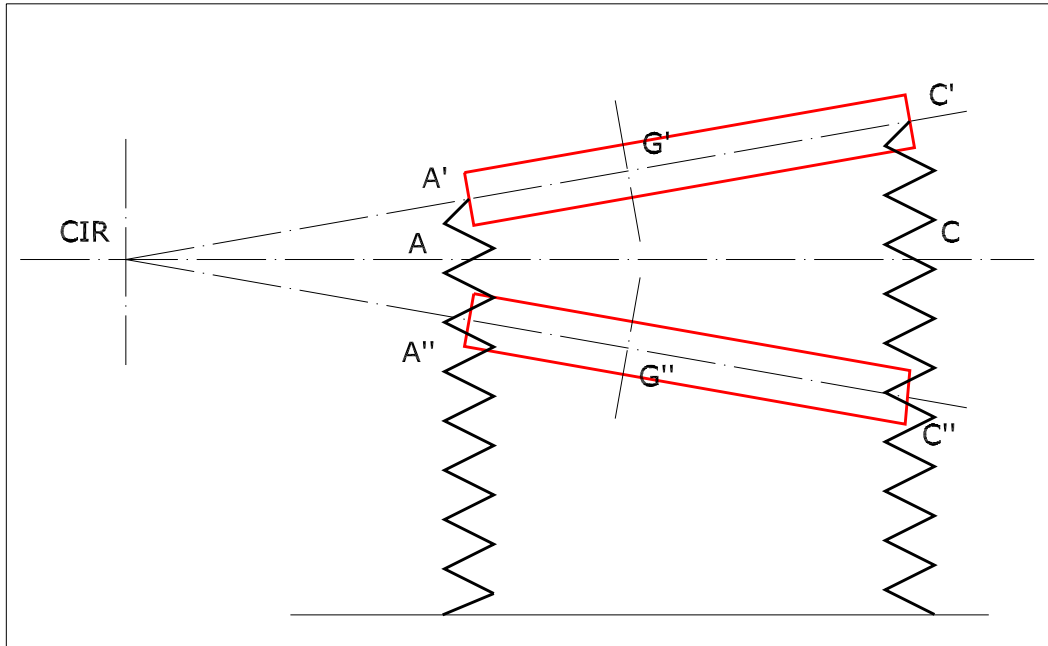


Figura 2.28: CIR esterno al segmento AC

nore di quella posteriore, come avevamo visto in Fig. 2.26. Tutto é coerente con i risultati ottenuti nei grafici, per cui la Fig. 2.28 é stata tracciata correttamente e si é dimostrato che il CIR resta fuori dall'interasse.

2.2.6 Confronto coi risultati del modello linearizzato

Il modello lineare per prima cosa ci conferma i diagrammi di Bode ritrovati già con Linear Analysis (non riportiamo i diagrammi perché identici a quelli di Fig. 2.18). Come ulteriore conferma della correttezza dei calcoli, notiamo che anche le funzioni di trasferimento (terreno posteriore-angolo di beccheggio) ottenute nei due modi sono praticamente le stesse. Quella ricavata da Linear Analysis vale:

$$G(s)_1 = \frac{-0.24783 s (s + 258.1)(s^2 + 0.1718s + 58.47)(s^2 + 1.918s + 680.9)}{s (s^2 + 0.1706s + 57.9)(s^2 + 0.6799s + 175.3)(s^2 + 1.917s + 680.6)}$$

mentre dal programma che implementa il sistema linearizzato otteniamo:

$$G(s)_2 = \frac{-0.24783 (s + 258.1)(s^2 + 0.1718s + 58.47)(s^2 + 1.918s + 680.9)}{(s^2 + 0.1706s + 58.05)(s^2 + 0.6799s + 175.5)(s^2 + 1.917s + 680.6)}$$

Risulta che:

$$G(s)_1 \simeq G(s)_2$$

Possiamo concludere che, per piccoli angoli di beccheggio come lo sono quelli delle Figg. 2.19-2.20- 2.21- 2.22, il sistema linearizzato ben approssima quello non lineare. QUIII

Dal sistema linearizzato otteniamo anche altre informazioni, per esempio la collocazione dei poli (Fig. 2.29). I poli hanno, nel piano immaginario, le seguenti coordinate:

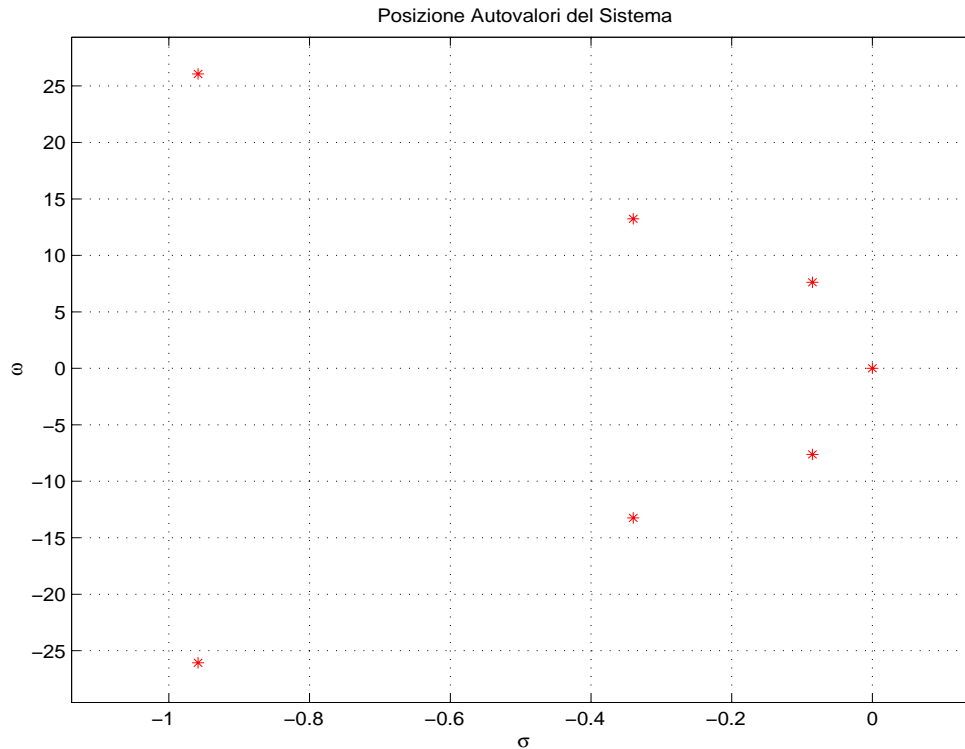


Figura 2.29: Poli del sistema linearizzato

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 -0.9584 + 26.0701i \\
 -0.9584 - 26.0701i \\
 -0.3400 + 13.2425i \\
 -0.3400 - 13.2425i \\
 -0.0853 + 7.6188i \\
 -0.0853 - 7.6188i
 \end{array}$$

Ci sono due poli nell'origine e tre coppie di poli complessi coniugati. Il sistema non può essere interpretato come un sistema a poli dominanti essendo la parte reale di tutte e tre le coppie di poli complessi coniugati dello stesso ordine di grandezza. Questo significa che non esiste una dinamica molto più lenta delle altre. Se consideriamo un sistema del secondo ordine caratterizzato da una funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\delta}{\omega_n^2} s + 1}$$

con:

$$\omega_n^2 = \omega^2 + \sigma^2;$$

$$\delta = \cos \varphi$$

il picco di risonanza si manifesta ad una frequenza

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

e l'ampiezza del picco vale:

$$M_r = \frac{1}{2 \delta \sqrt{1 - \delta^2}}$$

Riportiamo ad esempio i diagrammi di Bode per il sistema

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.1 s + 1)}$$

Si ha che:

$$\omega_n = 1 \frac{rad}{sec};$$

$$\delta = 0,05;$$

$$\varphi = \arccos \delta = 87^\circ;$$

$$\omega_r = 0,997 \omega_n \simeq \omega_n;$$

I poli di questo sistema si trovano in:

$$\sigma = -0,05;$$

$$\omega = 0,999 \frac{rad}{sec}$$

quindi per un sistema del secondo ordine poco smorzato vale che:

$$\omega_r \simeq \omega_n \simeq \omega$$

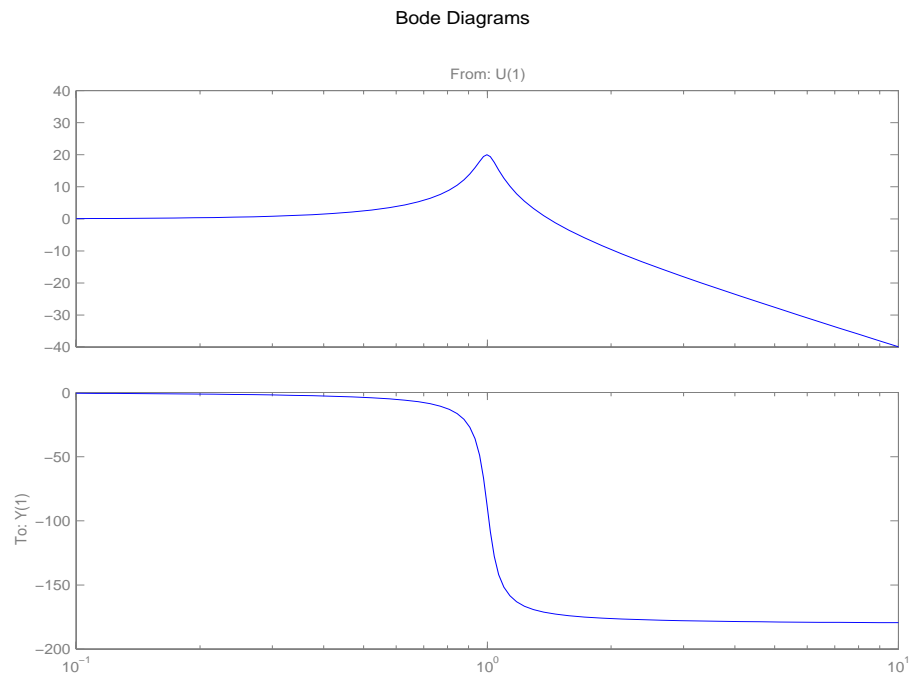


Figura 2.30: Sistema del secondo ordine

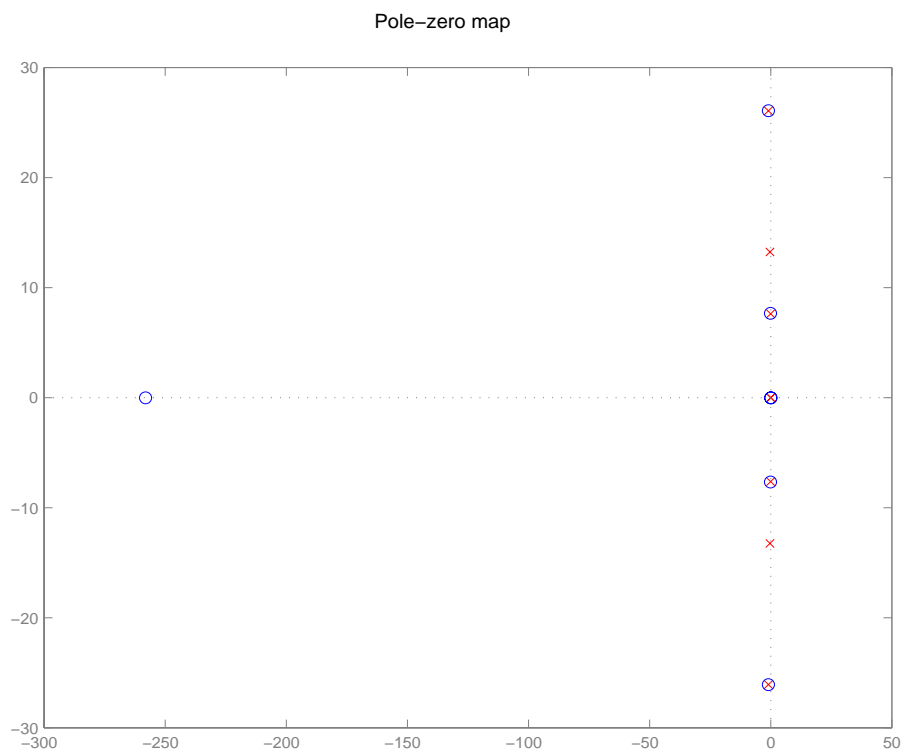


Figura 2.31: Poli e zeri del sistema linearizzato

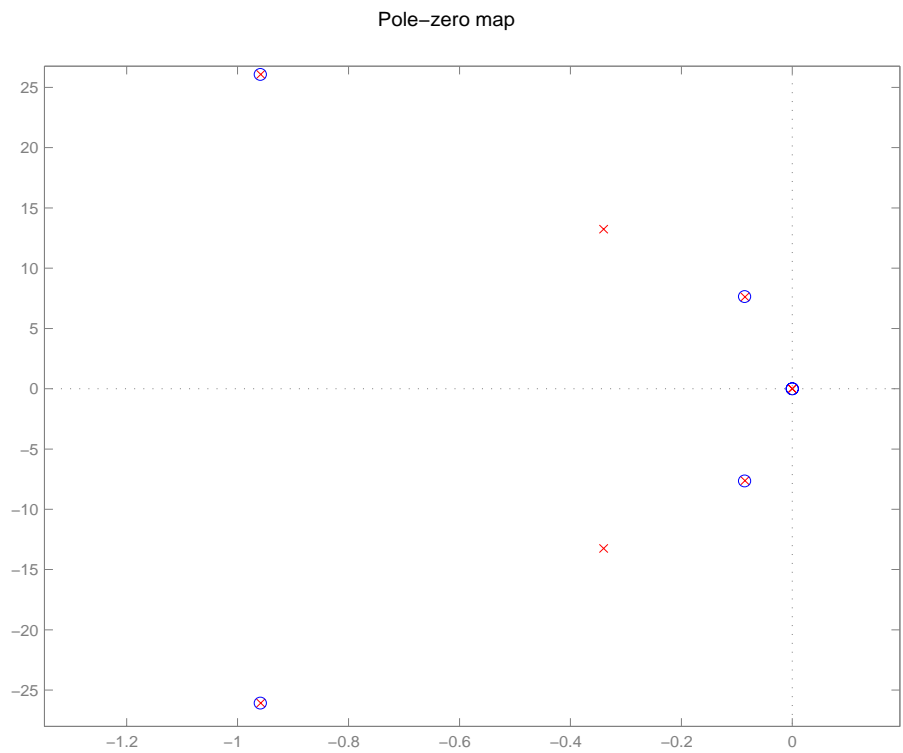


Figura 2.32: Poli e zeri del sistema linearizzato: zoom

Il nostro sistema ha tre coppie di poli complessi coniugati: in prima approssimazione potremmo pensare che per ogni coppia di poli nasca un picco in corrispondenza della sua ω_n , per un totale di tre picchi. Invece nella Fig. 2.18 riscontriamo un solo picco. Questo perché, oltre ai poli, il sistema presenta degli zeri. Se essi si sovrappongono nel piano complesso con i poli, c'è un annullamento degli effetti (si parla di cancellazione poli-zeri). Nella Fig. 2.31 sono segnalati tutti i poli e tutti gli zeri. C'è uno zero molto più veloce degli altri, che appiattisce i rimanenti zeri e poli sull'asse delle ordinate. Per una migliore comprensione, eseguiamo lo zoom di Fig. 2.32. Adesso risulta chiaro perché sopravvive solo un picco nei diagrammi di Bode di Fig. 2.18: due coppie di poli si cancellano coi rispettivi zeri e solo la coppia a $\omega_n \simeq \omega \simeq 13 \frac{rad}{sec}$ origina il picco di risonanza, che infatti si trova in corrispondenza della suddetta pulsazione.

2.2.7 Variazioni parametriche nel sistema linearizzato

Anche se conosciamo le posizioni dei poli, non sappiamo da quali parametri sono influenzate. Questo perché la funzione di trasferimento è stata espressa numericamente e non in modo parametrico. Quindi partendo dai parametri della simulazione n° 1 modifichiamo, uno alla volta, il valore dei parametri più significativi nelle matrici del sistema linearizzato e osserviamo come cambia la posizione dei poli sul piano complesso e la posizione dei picchi nei diagrammi di Bode. Facciamo variare tre parametri: il carico posteriore m_{2p} , perché effettivamente può cambiare, k_2 e b_2 perché potremo modificarli intervenendo sulla geometria della sospensione. Nella simulazione n° 1 il loro valore era:

- $m_{2p} = 0 \text{ kg}$;
- $k_2 = 300000 \frac{N}{m}$;
- $b_2 = 1000 \frac{kg}{sec}$.

I grafici e i poli segnati in rosso corrispondono in generale al valore minimo del parametro nell'intervallo; quelli in blu ai successivi valori assunti dal parametro in questione.

Variazione del parametro m_{2p} : il carico posteriore è considerato puntiforme, cioè per semplicità non gli si attribuisce un'inerzia, anche se si potrebbe farlo. La massa varia nell'intervallo

$$m_{2p} \in [0 \div 9000] \text{ kg}$$

In Fig. 2.33 si nota che, al variare della massa, non si sposta la coppia di poli più lontana dall'asse delle ordinate, mentre le altre due coppie di poli si avvicinano a tale asse. In Figg. 2.34- 2.35 si rappresenta la disposizione dei poli e degli zeri per il caricamento con $m_{2p} = 9000 \text{ kg}$. Si nota che le coppie di poli più lente (quelle più vicino all'asse delle ordinate) si sono svincolate dagli zeri: una lo era già anche per caricamento nullo e generava il picco. Adesso nasce un secondo picco, che si nota in Fig. 2.36 seguendo uno degli andamenti in blu. Tutti e due i picchi si presentano a pulsazioni più basse di quella del picco rosso perché le rispettive coppie di poli, oltre ad essersi avvicinate all'asse delle ordinate, hanno diminuito l'ordinata ω .