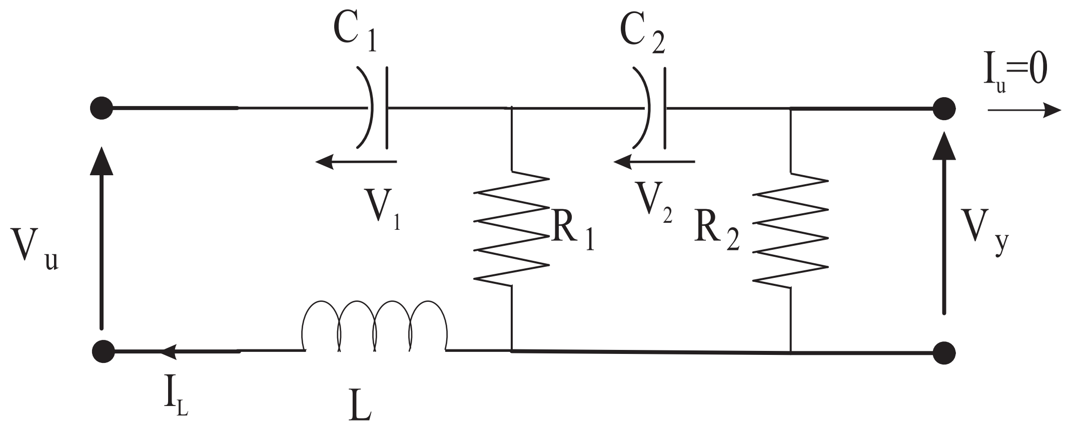
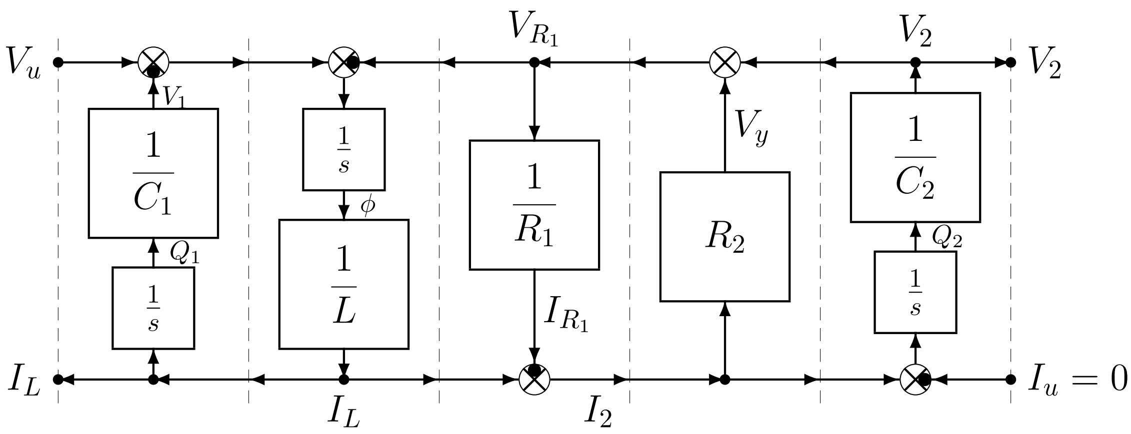
Esempio: rete elettrica

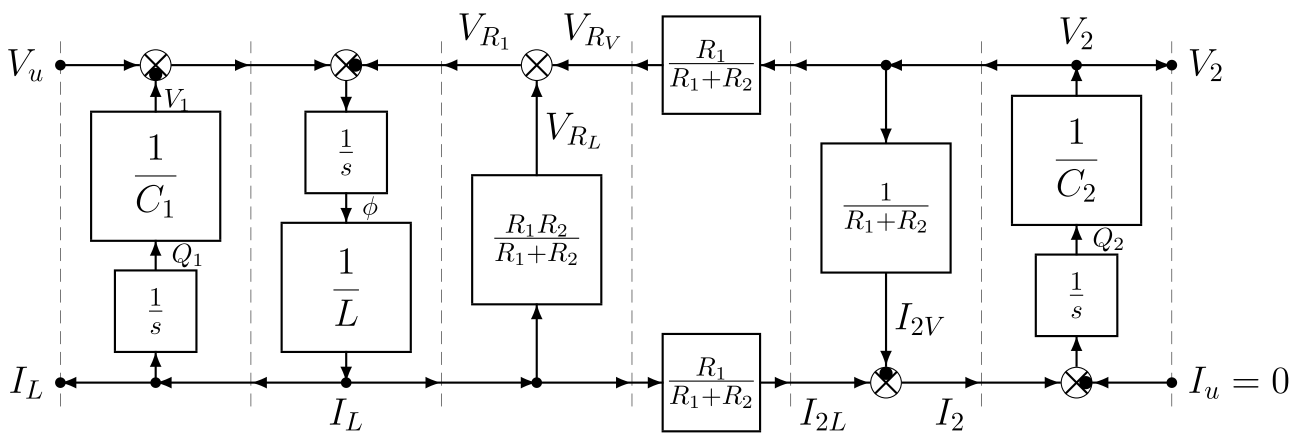
Si consideri la seguente rete elettrica:



Un possibile schema POG del circuito elettrico è il seguente:

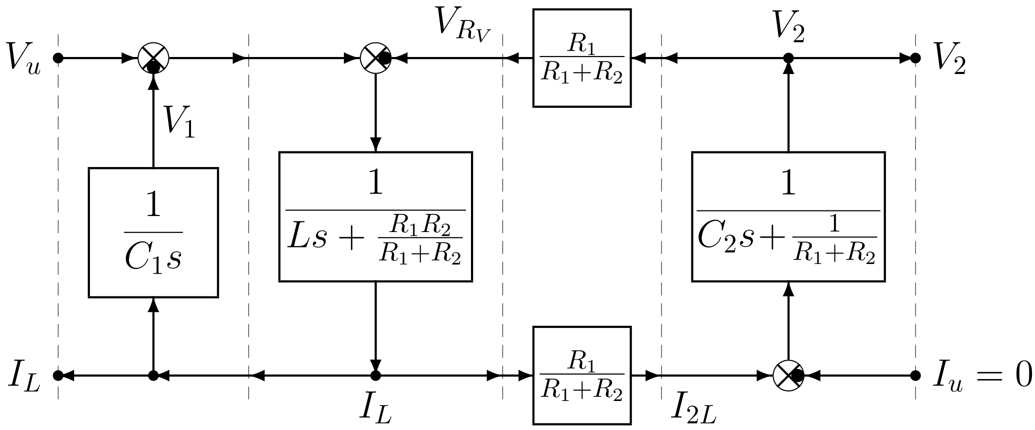


Eliminando il loop algebrico si ottiene il seguente sistema POG equivalente:



Inserire questo schema a blocchi in ambiente Simulink. Utilizzare i parametri R1 = 10*ohm; R2 = 10*ohm; C1 = 0.1*F; C2 = 0.3*F; L = 0.2*H e simulare la risposta libera del sistema a partire dalla condizione iniziale $V1 = V2 = 30$ V, $IL = 10$ A.

Rappresentazione grafica semplificata:



Una descrizione dello sistema nello spazio degli stati si ottiene facilmente utilizzando il vettore di stato $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_1 & I_L & V_2 \end{bmatrix}^T$.

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_L \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{-R_1R_2}{(R_1+R_2)} & \frac{-R_1}{(R_1+R_2)} \\ 0 & \frac{R_1}{(R_1+R_2)} & \frac{-1}{(R_1+R_2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ I_L \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_u \\[2ex]
\qquad\qquad V_y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} & \frac{-R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix}\mathbf{x}
\end{array}\right.$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1\,L} & \frac{-R_1\,R_2}{C_1\,L^2\,(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_1\,R_2}{L^2\,(R_1+R_2)} & \frac{-\left(C_2\,L\,(R_1+R_2)^2\right)+C_1\,R_1{}^2\left(-L+C_2\,R_2{}^2\right)}{C_1\,C_2\,L^3\,(R_1+R_2)^2} \\ 0 & \frac{R_1}{C_2\,L\,(R_1+R_2)} & -\frac{R_1\,(L+C_2\,R_1\,R_2)}{C_2{}^2\,L^2\,(R_1+R_2)^2} \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice $\mathcal{R}^+$ è sempre diverso da zero

$$\det \mathcal{R}^+ = \frac{R_1}{C_1 C_2^2 L^3 (R_1+R_2)^2}$$

per cui il sistema è completamente raggiungibile. Il sistema non è raggiungibile solo se $R_1 = 0$.