

**Modellistica e simulazione del  
comportamento dinamico di un  
sistema di trasmissione a ruote  
dentate con gioco**

Relatore:  
**Prof. Roberto Zanasi**

Tesi di Laurea di:  
**Marco Fei**

Correlatore:  
**Ing. Federica Grossi**

---

# Capitolo 1

## Descrizione del sistema

### 1.1 Sistema di trasmissione

Lo schema di un sistema di trasmissione è mostrato in Fig. 1.1; il sistema è composto da una serie di ruote dentate e pompe che trasformano la potenza meccanica fornita dal motore in potenza idraulica resa disponibile al braccio meccanico. Nei paragrafi successivi vengono descritti brevemente i componenti principali della trasmissione presa in esame

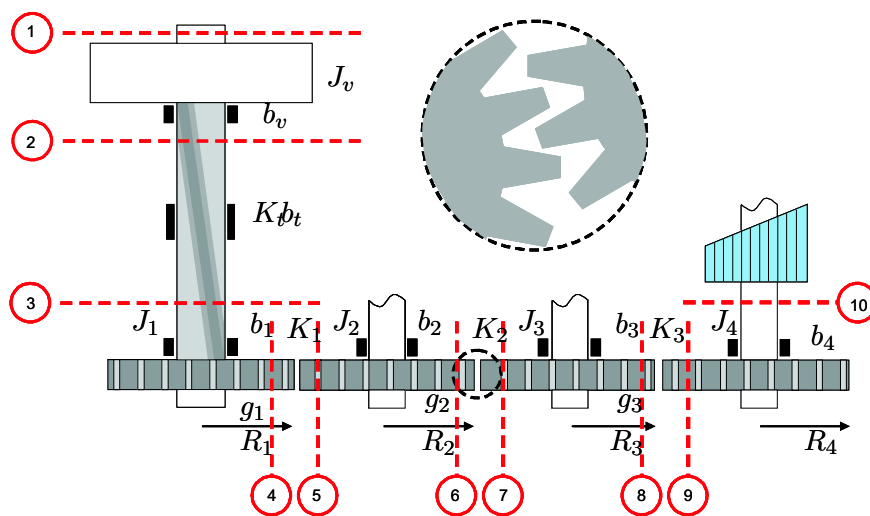


Figura 1.1: Schema semplificato di un sistema di trasmissione.

Le variabili del sistema, con il loro significato fisico, sono mostrate in Tab. 1.1.

### 1.2 Volano e Motore

La coppia motrice sviluppata da un motore a scoppio, sia a due che a quattro tempi, è ben lungi dall'essere costante nell'ambito di un singolo ciclo di funzionamento. Facendo riferimento a un monocilindrico a quattro tempi è noto che la produzione di coppia avviene soltanto in una delle quattro fasi di funzionamento del motore, cioè nella fase di espansione dei gas, mentre le altre

$J_v$	: Momento di inerzia del volano
$b_v$	: Attrito lineare sul volano
$K_t$	: Rigidità dell'albero di trasmissione
$b_t$	: Attrito interno all'albero di trasmissione
$J_1$	: Momento di inerzia della prima ruota dentata
$b_1$	: Attrito lineare della prima ruota dentata
$R_1$	: Raggio della prima ruota dentata
$K_1$	: Rigidità dei denti tra la prima e la seconda ruota
$g_1$	: Gioco tra la prima e la seconda ruota dentata
$b_{12}$	: Attrito interno tra la prima e la seconda ruota
$J_2$	: Momento di inerzia della seconda ruota dentata
$b_2$	: Attrito lineare della seconda ruota dentata
$R_2$	: Raggio della seconda ruota dentata
$K_2$	: Rigidità dei denti tra la seconda e la terza ruota
$g_2$	: Gioco tra la seconda e la terza ruota dentata
$b_{23}$	: Attrito interno tra la seconda e la terza ruota
$J_3$	: Momento di inerzia della terza ruota dentata
$b_3$	: Attrito lineare della terza ruota dentata
$R_3$	: Raggio della terza ruota dentata
$K_3$	: Rigidità dei denti tra la terza e la quarta ruota
$g_3$	: Gioco tra la terza e la quarta ruota dentata
$b_{34}$	: Attrito interno tra la terza e la quarta ruota
$J_4$	: Momento di inerzia della quarta ruota dentata
$b_4$	: Attrito lineare della quarta ruota dentata
$R_4$	: Raggio della quarta ruota dentata

Tabella 1.1: Le variabili del sistema

tre fasi (aspirazione, compressione, scarico) non solo non producono coppia ma anzi ne assorbono essendo delle fasi passive. Queste ultime vengono superate perché l'inerzia delle masse del motore ormai in rotazione è tale da far superare al motore stesso le fasi passive a spese dell'energia accumulata nell'unica fase attiva del ciclo, quella di espansione. Il funzionamento di tale motore è pertanto molto ruvido in quanto a una fase di accelerazione delle masse in rotazione segue una fase di rallentamento dovuta all'energia che il motore deve sprecare per espellere i gas combusti dal cilindro, per aspirare miscela fresca e per comprimerla. In altri termini, occorrono tre fasi di preparazione, passive, per ottenere un'unica fase di erogazione di coppia.

Se si vuole diminuire la ruvidità del motore o, per usare un linguaggio più tecnico, il suo grado di irregolarità (intendendo con questo termine il rapporto fra il valore massimo della coppia motrice e quello medio), non resta che aumentare l'inerzia delle masse in rotazione calettando per esempio sull'albero motore un bel disco d'acciaio col compito specifico di immagazzinare energia durante le fasi attive e restituirla durante le fasi passive. Il volano infatti accumula energia meccanica  $E = \frac{1}{2}I\omega^2$  durante le fasi utili per restituirla durante quelle passive.

Il grado di irregolarità del motore, cioè il rapporto fra coppia massima e coppia media nell'ambito di un ciclo di funzionamento, sarebbe uguale a 1 in un ipotetico motore in cui la produzione di coppia avvenisse con assoluta costanza e regolarità; assume il valore di 1,65 in un motore a sei cilindri; circa 2 in un quattro cilindri; 4,5 in un bicilindrico e ben 10,3 in un monocilindrico a quattro tempi, il che significa che nel momento dell'espansione dei gas si sviluppa una coppia che è ben 10 volte maggiore della coppia media. Da queste brevi considerazioni appare evidente che i motori che più hanno bisogno di notevoli masse volaniche sono quelli che hanno regimi di rotazione non troppo elevati e basso numero di cilindri.

La dipendenza dal numero di cilindri è intuitiva in quanto è evidente che in un motore a più cilindri, disponendo opportunamente le manovelle dell'albero motore e organizzando di conseguenza gli scoppi nei singoli cilindri, si riesce a ottenere un diagramma di coppia molto più uniforme, senza i picchi e gli avallamenti così vistosi che si verificano in un monocilindrico: questo in quanto se un cilindro è in una fase passiva ve ne sarà un altro che è in una fase attiva e i due effetti, entro certi limiti, si compenseranno

### 1.3 Albero di trasmissione

L'albero trasmette un moto rotatorio ed è sottoposto ad uno sforzo di torsione, a causa delle masse collegate è anche sottoposto a uno sforzo di flessione che richiede l'ausilio di opportuni supporti. Si pone quindi il problema dell'attrito tra la parte rotante (albero) e quella stazionaria (supporto)

## 1.4 Le ruote dentate

Le ruote dentate, siano esse piane o coniche, con qualunque tipo di dentatura siano state costruite, rappresentano, insieme alle corrispondenti ruote di frizione, la soluzione al problema della trasmissione del moto fra una coppia di assi, rispettivamente paralleli o concorrenti in un punto, e con un rapporto di trasmissione costante. Ciò spiega la loro estrema diffusione ed il largo impiego nei più svariati settori della meccanica generale.

### 1.4.1 Ruote dentate, ingranaggi e rapporto di trasmissione

Quando sono in gioco potenze notevoli è conveniente che la trasmissione del moto sia affidata, non all'aderenza come nelle ruote di frizione, ma all'azione mutua che si scambiano opportune superfici coniugate ricavate sulla periferia di un disco, superfici che costituiscono la sagoma dei denti di una ruota dentata.

Una ruota dentata, studiata per trasmettere momento torcente ad un'altra ruota o elemento dentato, forma con quest'ultima un ingranaggio (vedi Fig. 1.2).

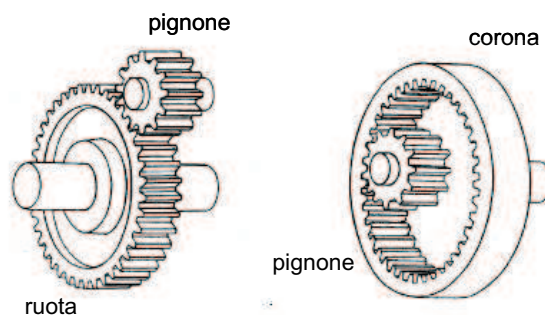


Figura 1.2: Ingranaggio esterno      Ingranaggio interno.

La ruota più piccola è comunemente chiamata pignone, mentre quella grande è chiamata corona. Ingranaggi di diversa dimensione sono spesso usati in coppia per aumentare il momento torcente riducendo nel contempo la velocità angolare, o viceversa aumentare la velocità diminuendo il momento torcente; ipotizzando di avere un rendimento unitario vale infatti l'equazione di conservazione dell'energia e di conseguenza della potenza:

$$P = \tau_1 \omega_1 = \tau_2 \omega_2 \quad (1.1)$$

Dall'equazione (1.1), il rapporto di trasmissione risulta essere:

$$R_T = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1.2)$$

Il tipo più comune di ingranaggio è quello a denti dritti (vedi Fig. ??): la ruota dentata è piatta, l'asse dei denti si proietta radialmente dal centro di rotazione dell'ingranaggio e le creste dei denti decorrono trasversalmente al

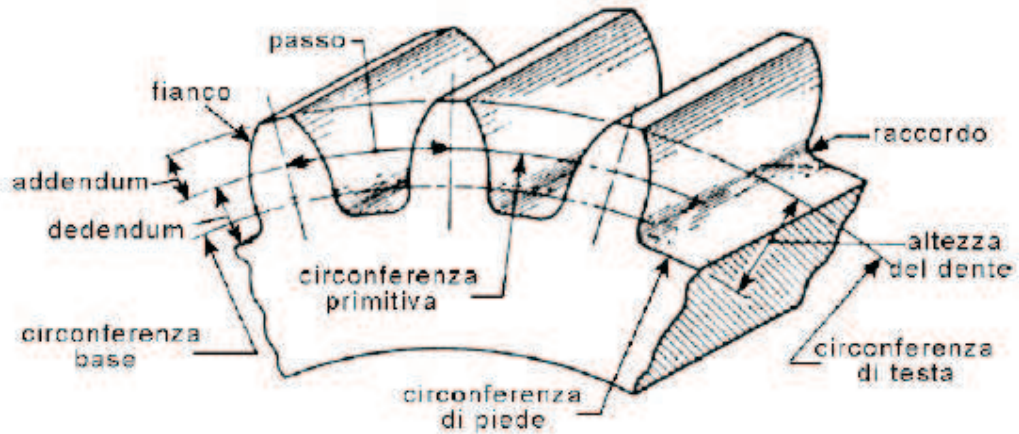


Figura 1.3: Ingranaggio a denti dritti.

piano di rotazione e parallelamente tra loro.

I limiti estremi del dente sono fissati da due circonferenze dette circonferenza di testa e circonferenza di piede. Solitamente il profilo del dente non taglia la circonferenza di base a spigolo vivo, ma viene opportunamente raccordato alla circonferenza di base; la circonferenza di piede deve avere raggio non superiore al raggio della circonferenza di base, altrimenti in quella zona il profilo del dente non risulta più un evolvente di cerchio. La differenza fra i raggi della circonferenza di testa e della primitiva prende il nome di addendum, la differenza fra la circonferenza primitiva e quella di base prende il nome di dedendum; la loro somma misura l'altezza del dente. La superficie compresa tra la circonferenza primitiva e la circonferenza di testa è detta costa mentre quella compresa tra la circonferenza primitiva e la circonferenza di piede è detta fianco.

Per potere correttamente ingranarsi, le ruote devono avere lo stesso passo ( $p_1 = p_2$ ), cioè uguale lunghezza dell'arco fra due profili omologhi; conseguentemente il rapporto di trasmissione espresso in funzione dei raggi  $R_1$  e  $R_2$  può essere espresso in funzione del numero di denti  $n_1$  e  $n_2$ . Ricordando infatti la relazione che lega la circonferenza primitiva con il numero di denti ( $2\pi R = pn$ ) si ottiene:

$$R_T = \frac{R_2}{R_1} = \frac{p_2 n_2}{2\pi} \frac{2\pi}{p_1 n_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.3)$$

#### 1.4.2 Ruote dentate piane ad evolvente

La quasi totalità delle ruote dentate cilindriche ha profili ad evolvente di cerchio. Ogni profilo viene generato come luogo delle successioni di un punto  $P$  appartenente ad una retta  $g$  (detta linea generatrice, o di pressione o d'azione) che viene fatta rotolare su una circonferenza (detta circonferenza di base) concentrica a quella primitiva; non sarà quindi possibile avere tratti di evolvente interni alla circonferenza di base. Per come sono stati costruiti, i profili sono sempre perpendicolari ai loro raggi di curvatura che coincidono con i segmenti,

giacenti sulla retta d'azione, compresi tra il punto di contatto  $P$  e i punti di tangenza  $H$  e  $K$  della retta generatrice con la circonferenza di base. Queste due evolventi hanno un punto in comune in tutte le loro posizioni, perchè sono descritte dallo stesso punto  $P$  ed hanno la retta  $g$  in comune, costituiscono quindi due curve coniugate il cui punto di contatto si sposta sulla retta d'azione. Ovviamente per comporre un dente completo sarà necessario comporre un'altro profilo simmetrico al primo. L'inclinazione della retta d'azione  $g$  ri-

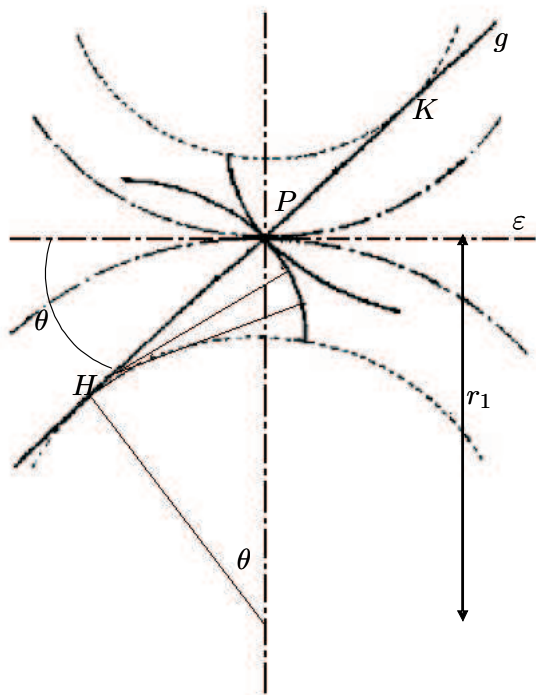


Figura 1.4: Ingranaggio a denti dritti.

spetto alla tangente alle primitive nel punto di contatto delle stesse  $\varepsilon$  è pari all'angolo di pressione o di azione  $\theta$ . I raggi delle circonferenze di base, tangenti alla retta d'azione, vengono determinati a partire da tale angolo come  $r_1 \cos \vartheta$  e  $r_2 \cos \vartheta$  dove  $r_1$  e  $r_2$  sono i raggi delle circonferenze primitive.

Una proprietà dei profili ad evolvente, che nella pratica ha importanza notevole, è costituita dal fatto che, se la distanza fra gli assi di due ruote compagne è lievemente maggiore della somma dei raggi delle due primitive (per es. per una imperfezione di montaggio o per usura dei cuscinetti), i due profili seguitano ad essere coniugati. Infatti, la normale ai profili nei punti di contatto rimarrà sempre diretta secondo la tangente comune alle due circonferenze di base, le quali non si modificano, per il fatto che gli assi delle ruote cambiano la loro posizione relativa, trattandosi di elementi geometrici direttamente coniugati alle sagome dei denti. Ciò significa che i profili rimangono coniugati.

### 1.4.3 Ingranamento, forze trasmesse

Il contatto fra i denti avviene esclusivamente sulla retta di azione ma si verifica prima che questi attraversino la retta dei centri; possiamo quindi definire i punti  $I_A$  ed  $I_B$  in cui avverrà il primo contatto, in fase di accesso, ( $I_A$ ), fra il fianco di un dente della ruota conduttrice e l'estremità della costa di un dente della ruota condotta, e l'ultimo contatto, in fase di recesso, ( $I_B$ ), fra l'estremità della costa del dente della ruota conduttrice ed un punto del fianco del dente della ruota condotta. Come si evince anche dalla Fig. 1.6 tutti i punti di contatto giacciono sulla retta  $g$ . L'arco misurato sulle primitive durante il

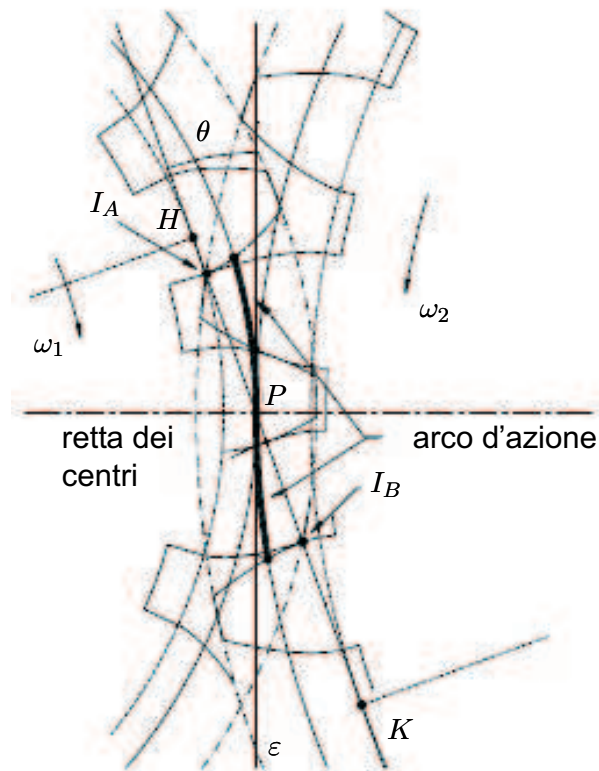


Figura 1.5: Ingranaggio a denti dritti.

quale rimangono a contatto i due profili coniugati è chiamato arco d'azione. Le forze scambiate tra le due ruote dentate sono dirette lungo la retta d'azione; tali forze  $F$  possono essere scomposte nelle loro componenti tangenziali  $F_t$  e radiali  $F_r$ , ovviamente solo le prime sono quelle utili per la trasmissione del momento torcente mentre quelle radiali vanno a scaricarsi sui supporti delle ruote.

### 1.4.4 Gioco

Questi ingranaggi possono accoppiare solamente assi paralleli e soffrono del problema del gioco. In un cambiamento di moto la faccia opposta del dente deve arrivare a spingere contro il corrispondente dente dell'altra ruota, si ha

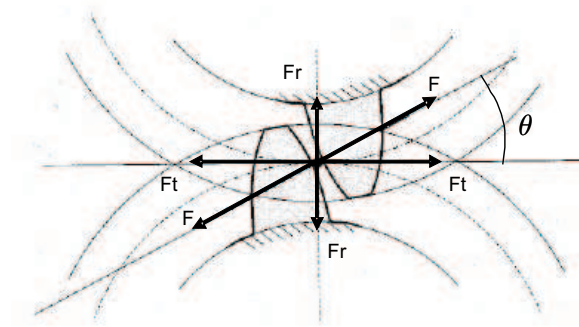


Figura 1.6: Ingranaggio a denti dritti.

quindi un periodo in cui le ruote si muovono senza trasmettere coppia. Per tenerne conto durante le simulazioni è stata introdotta una non linearità nello schema con andamento mostrato in Fig. 1.7 Va però notato che in un ingra-

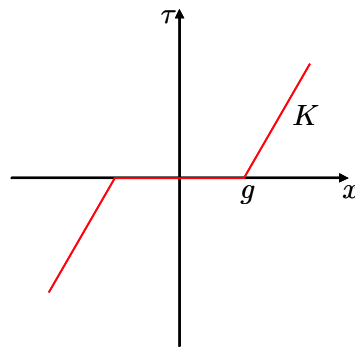


Figura 1.7: Gioco.

naggio il gioco è necessario per impedire l'inceppamento dei denti in condizioni di funzionamento.

## Capitolo 2

# Modello di un sistema di trasmissione

### 2.1 Schema POG

Prima di rappresentare il modello dinamico della trasmissione, ottenuto utilizzando la tecnica dei Power-Oriented Graph, conviene riportare le principali formule caratterizzanti gli ambiti energetici meccanico traslazionale e meccanico rotazionale; rimandando alla lettura dell'Appendice per un ulteriore approfondimento sulla metodologia di modellizzazione .

Lo schema POG del sistema è mostrato in Fig. 2.1.

### 2.2 Rappresentazione nello S.d.S

Se le variabili di stato  $\mathbf{x} = [\omega_v \ \tau_k \ \omega_1 \ F_{12} \ \omega_2 \ F_{23} \ \omega_3 \ F_{34} \ \omega_4]^T$  coincidono con le variabili di potenza, le variabili di ingresso e uscita sono  $\mathbf{u} = [\tau_v \ \tau_r]^T$   $\mathbf{y} = [\vartheta_t \ x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  la descrizione del sistema nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.1)$$

	Simboli	Eq. Lineare	Eq.Differenziale
$D_1$	$M$ massa		
$q_1$	$P$ quantità di moto	$P = M\dot{x}$	$\frac{dP}{dt} = F = M\ddot{x}$
$v_1$	$\dot{x}$ velocità		
$D_2$	$K$ rigidità		
$q_2$	$x$ spostamento	$F = Kx$	$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$
$v_2$	$F$ forza		
$R$	$b$ dissipatore	$F = b\dot{x}$	

Tabella 2.1: Ambito meccanico traslazionale

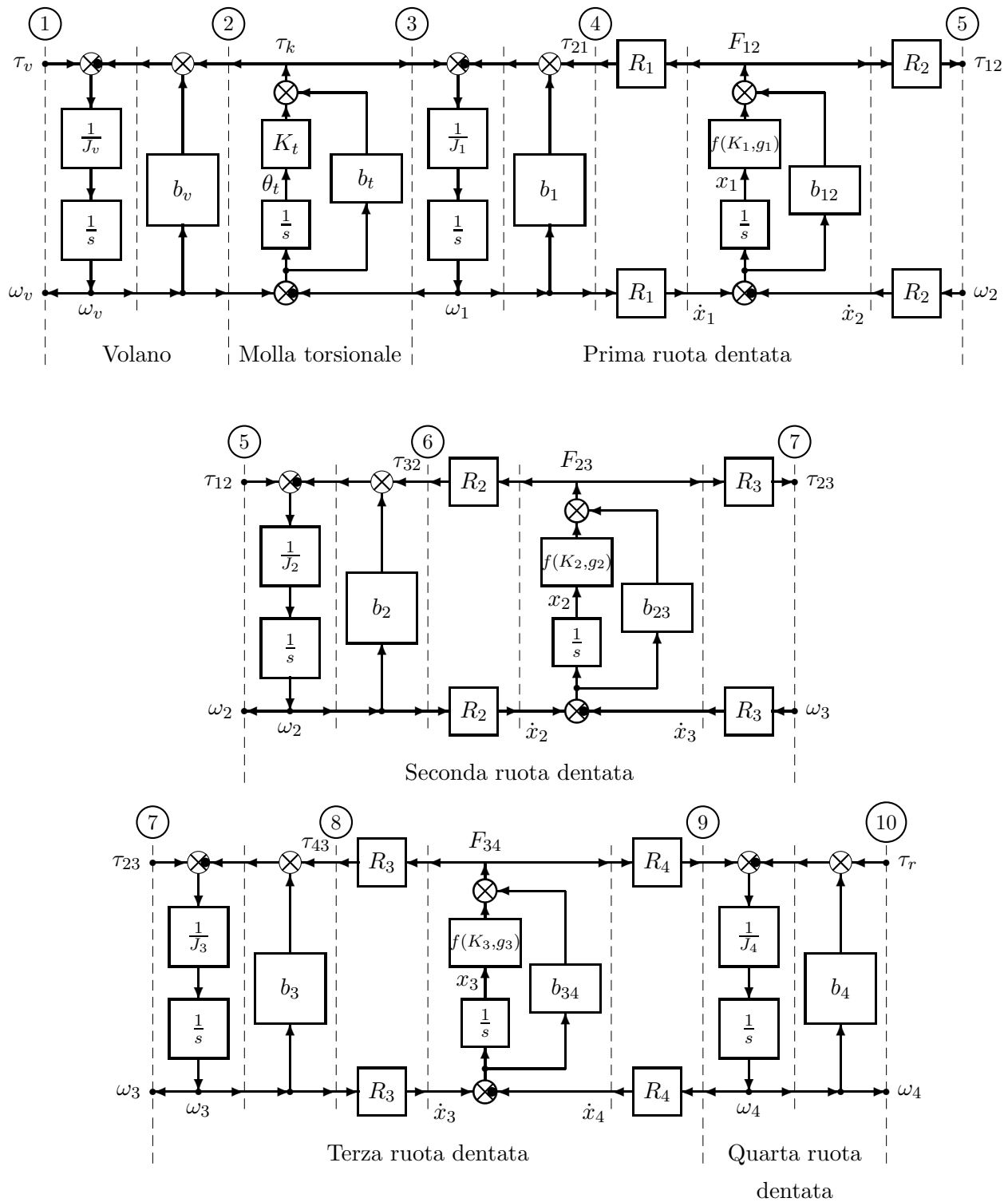


Figura 2.1: Schema POG del sistema fisico mostrato in Fig. 1.1.



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{b_t}{K_t} & \frac{1}{K_t} & \frac{b_t}{K_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_{12}R_1}{K_1} & \frac{1}{K_1} & \frac{b_{12}R_2}{K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_{23}R_2}{K_2} & \frac{1}{K_2} & \frac{b_{23}R_3}{K_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_{34}R_3}{K_3} & \frac{1}{K_3} & \frac{b_{34}R_3}{K_3} \end{bmatrix}$$

Portando, nella matrice  $\mathbf{L}$ , tutte le rigidità  $k$  delle ruote dentate ad infinito, dall'equazione  $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ , si trovano i legami statici delle equazioni differenziali, i quali non sono altro che i rapporti di trasmissione delle ruote.

$$\begin{cases} \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \\ \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3 \\ \omega_3 R_3 = \omega_4 R_4 \end{cases} \quad (2.2)$$

Il sistema fisico, rappresentato dai tre ingranaggi, degenera in uno a dimensione minore, rappresentato da una sola ruota dentata. La riduzione può essere ottenuta usando una matrice di congruenza  $\mathbf{T}$  e applicando la trasformazione:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1}{R_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1}{R_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1}{R_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \omega_v \\ \tau_k \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

Tale trasformazione, delle variabili di stato, altera le matrici del sistema; moltiplicando infatti la prima equazione matriciale di (2.1) per  $\mathbf{T}^T$ , si ottiene una combinazione lineare di equazioni differenziali equivalente (2.4).

$$\begin{cases} \mathbf{T}^T \mathbf{L} \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{z} \end{cases} \quad (2.4)$$

Posto  $\mathbf{L}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{L} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}_{eq} = \mathbf{T}^T \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_{eq} = \mathbf{C} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}_{eq} = \mathbf{D} \mathbf{T}$  si ottiene il sistema (2.5) formalmente equivalente a quello iniziale (2.1).

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{eq} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{eq} \mathbf{z} + \mathbf{B}_{eq} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{eq} \mathbf{z} + \mathbf{D}_{eq} \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{L}_{eq} = \begin{bmatrix} J_v & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_t} & 0 \\ 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{bmatrix} -b_t - b_v & -1 & b_t \\ 1 & 0 & -1 \\ b_t & 1 & -b_t - b_0 \end{bmatrix}$$

$$J_0 = J_1 + R_1^2 \left( \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{J_3}{R_3^2} + \frac{J_4}{R_4^2} \right) \quad b_0 = -b_1 + R_1^2 \left( \frac{b_2}{R_2^2} - \frac{b_3}{R_3^2} - \frac{b_4}{R_4^2} \right)$$

$$\mathbf{B}_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & -\frac{R_1}{R_4} & \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{eq} = \begin{bmatrix} -\frac{b_t}{K_t} & \frac{1}{K_t} & \frac{b_t}{K_t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avendo ridotto il sistema portando le rigidità ad infinito, gli schiacciamenti  $x_1, x_2, x_3$  vanno a zero è quindi corretto che nella matrice  $\mathbf{C}_{eq}$  compaiano tre righe tutte nulle.

Volendo ora ridurre il sistema iniziale in uno caratterizzato da sole due ruote, per poter studiare gli effetti del gioco, si trascurano le rigidità della seconda e della terza ruota. Considerando la rigidità  $K_1$  della prima ruota, il legame statico  $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$  ora non è più valido; rimangono però validi i legami:

$$\begin{cases} \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3 \\ \omega_3 R_3 = \omega_4 R_4 \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \omega_v \\ \tau_k \\ \omega_1 \\ F_{12} \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

Posto  $\mathbf{L}_{eq1} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{L} \mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{A}_{eq1} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{A} \mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{B}_{eq1} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_{eq1} = \mathbf{C} \mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{D}_{eq1} = \mathbf{D} \mathbf{T}_1$  si ottiene il sistema (2.6) formalmente equivalente a quello iniziale (2.1).

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{eq1} \mathbf{z}_1 = \mathbf{A}_{eq1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_{eq1} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{eq1} \mathbf{z}_1 + \mathbf{D}_{eq1} \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{L}_{eq1} = \begin{bmatrix} J_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_e \end{bmatrix}$$

$$J_e = J_1 + R_2^2 \left( \frac{J_3}{R_3^2} + \frac{J_4}{R_4^2} \right)$$

$$\mathbf{A}_{eq1} = \begin{bmatrix} -b_t - b_v & -1 & b_t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ b_t & 1 & -b_1 - b_t - b_{12}R_1^2 & -R_1 & b_{12}R_1R_2 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & b_{12}R_1R_2 & R_2 & -b_2 + R_2^2(-b_{12} - \frac{b_3}{R_3^2} - \frac{b_4}{R_4^2}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{eq1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{R_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{eq1} = \begin{bmatrix} -\frac{b_t}{K_t} & \frac{1}{K_t} & \frac{b_t}{K_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_{12}R_1}{K_1} & \frac{1}{K_1} & \frac{b_{12}R_2}{K_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3 Autovalori e contorno delle radici

I denti si comportano come molle che collegano le masse del pignone e della ruota; pertanto ogni ingranaggio ha una frequenza propria di vibrazione e può incorrere in una condizione di risonanza a seconda della frequenza di ingranamento.

Volendo capire come gli attriti influenzino tale pulsazione, si studia il sistema, ridotto ad una sola ruota dentata, trovandone i poli.

Essendo i poli, della funzione di trasferimento del sistema dinamico considerato, anche gli autovalori della matrice  $\mathbf{L}_{eq}^{-1}\mathbf{A}_{eq}$  utilizzando l'equazione caratteristica si determina la loro posizione sul piano complesso

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{L}_{eq}^{-1}\mathbf{A}_{eq}) = 0 \quad (2.7)$$

Dall'equazione (2.7) risulta:

$$s^3 + s^2\left(\frac{b_t + b_v}{J_v} + \frac{b_t + b_0}{J_0}\right) + s\left(\frac{b_t b_v + b_0 b_v}{J_v J_0} + \frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v}\right) + \frac{b_v K_t + b_0 K_t}{J_v J_0} = 0 \quad (2.8)$$

Trascurano inizialmente tutti gli attriti, la relazione (2.8) diviene:

$$s^3 + s\left(\frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v}\right) = 0$$

risolvendola si trovano le soluzioni

$$s = 0 \quad s = \pm j\sqrt{\frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v}}$$

dove la pulsazione  $\omega_0 = \sqrt{K_t\left(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v}\right)}$  dei poli complessi coniugati è la pulsazione di risonanza del sistema. Disegnando il contorno delle radici, si vede come si spostano sul piano complesso i poli al variare di un parametro che entra in modo lineare nell'equazione caratteristica.

Introducendo l'attrito  $b_t$  dell'albero di trasmissione l'equazione (2.8) assume la seguente forma:

$$s^3 + s^2\left(\frac{b_t}{J_v} + \frac{b_t}{J_0}\right) + s\left(\frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v}\right) = 0$$

raccogliendo tutti i termini che sono moltiplicati per  $b_t$  e dividendo per tutti gli altri ci si riconduce allo studio del luogo delle radici in quanto l'equazione caratteristica assume la forma  $1 + kG(s) = 0$ :

$$1 + b_t s \frac{\frac{1}{J_v} + \frac{1}{J_0}}{s^2 + K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})} = 0$$

Avendo due poli e uno zero, i due rami del luogo si spostano lungo un tratto di circonferenza, come emerge dal grafico mostrato in Fig. 2.2, che ha per centro lo zero e raggio  $R = \sqrt{d_1 d_2} = \omega_0$  dove  $d_1$  e  $d_2$  sono le distanze dello zero dai due poli. Per un elevato attrito dell'albero di trasmissione i poli complessi coniugati si spostano sull'asse reale andando uno nello zero ed uno a infinito. Nella realtà l'attrito  $b_t$  non è mai elevato per cui i poli si sposteranno di poco mantenendo una  $\omega \simeq \omega_0$

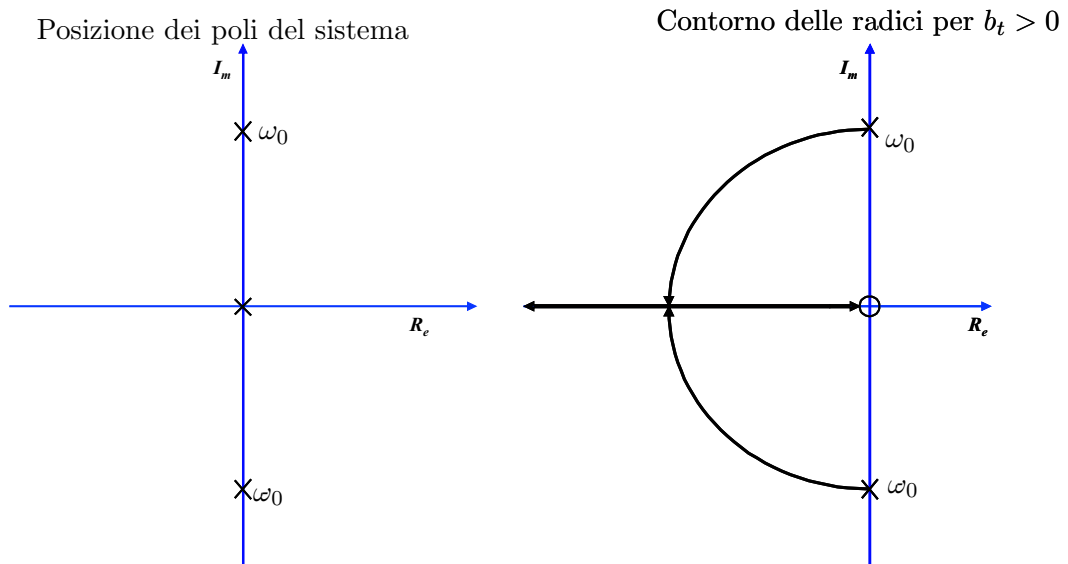


Figura 2.2: Contorni delle radici.

Considerando ora l'attrito  $b_v$  del volano l'equazione (2.8) diviene:

$$s^3 + s^2 \frac{b_v}{J_v} + s \left( \frac{K_t}{J_v} + \frac{K_t}{J_0} \right) + \frac{b_v K_t}{J_v J_0} = 0$$

$$1 + \frac{b_v}{J_v} \frac{s^2 + \frac{K_t}{J_0}}{s[s^2 + K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})]} = 0$$

Essendo la pulsazione  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_t}{J_0}}$  degli zeri complessi coniugati minore della pulsazione di risonanza ( $\sqrt{\frac{K_t}{J_0}} < \sqrt{K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})}$ ) il contorno delle radici risulta essere quello di Fig. 2.3 dove appare chiaro l'ininfluenza che questo attrito ha sulla  $\omega_0$ . Per valori alti di  $b_v$ , che comunque rappresentano un assurdo fisico, i poli si sposteranno sugli zeri e la pulsazione di risonanza diventerà  $\omega_1$  comunque prossima ad  $\omega_0$

Porgendo ora l'attenzione sull'attrito equivalente del sistema ridotto  $b_0$  l'equazione (2.8) risulta del tutto analoga a quella sopra, infatti:

$$s^3 + s^2 \frac{b_0}{J_0} + s \left( \frac{K_t}{J_0} + \frac{K_t}{J_v} \right) + \frac{b_0 K_t}{J_v J_0} = 0$$

$$1 + \frac{b_0}{J_0} \frac{s^2 + \frac{K_t}{J_v}}{s[s^2 + K_t(\frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_v})]} = 0$$

Le considerazioni precedenti sono ancora valide; l'unica differenza è la pulsazione degli zeri complessi coniugati  $\omega_2 = \sqrt{\frac{K_t}{J_v}}$  minore della precedente  $\omega_1 \sqrt{\frac{K_t}{J_0}}$  in quanto il momento di inerzia del volano  $J_v$  è maggiore di quello del sistema ridotto  $J_0$

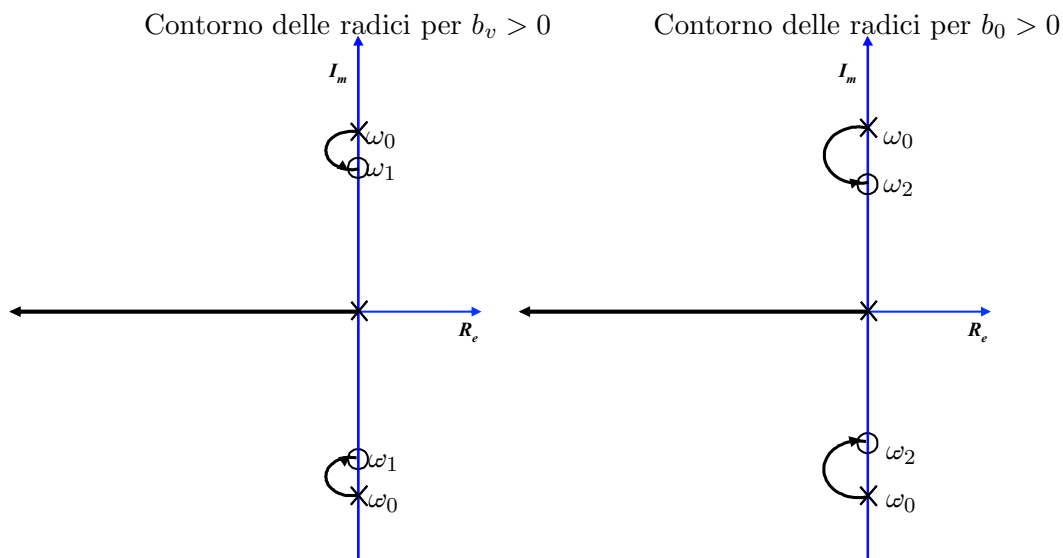


Figura 2.3: Contorni delle radici.

Introducendo ora il gioco fra due ruote dentate e risolvendo l'equazione caratteristica (2.9) ponendo tutti gli attriti a zero si ottiene:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{L}_{eq}^{-1} \mathbf{A}_{eq}) = 0 \quad (2.9)$$

$$s^5 + s^3 \left( \frac{K_1 R_2^2}{J_e} + \frac{K_1 R_1^2}{J_1} + \frac{K_t}{J_v} + \frac{K_t}{J_1} \right) + s \left( \frac{K_1 K_t R_2^2}{J_v J_e} + \frac{K_1 K_t R_2^2}{J_1 J_e} + \frac{K_1 K_t R_1^2}{J_v J_1} \right) = 0$$

risolvendola si trovano le soluzioni

$$s = 0 \quad s = \pm j\omega_1 \quad s = \pm j\omega_2$$

dove le pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  dei poli complessi coniugati sono quelle di risonanza

$$\text{cost} = \sqrt{-4J_1 J_e J_v K_1 K_t (J_e R_1^2 + (J_1 + J_v) R_2^2) + (J_v J_e (K_t + K_1 R_1^2) + J_1 (J_e K_t + J_v K_1 R_2^2))^2}$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\frac{-J_1 J_e K_t + J_v J_e K_t + J_v J_e K_1 R_1^2 + J_1 J_e K_1 R_2^2 + \text{cost}}{J_1 J_e J_v}}}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{\frac{-J_e J_v (K_t + K_1 R_1^2) - J_1 (J_e K_t + J_v K_1 R_2^2) + \text{cost}}{J_1 J_e J_v}}}{\sqrt{2}}$$

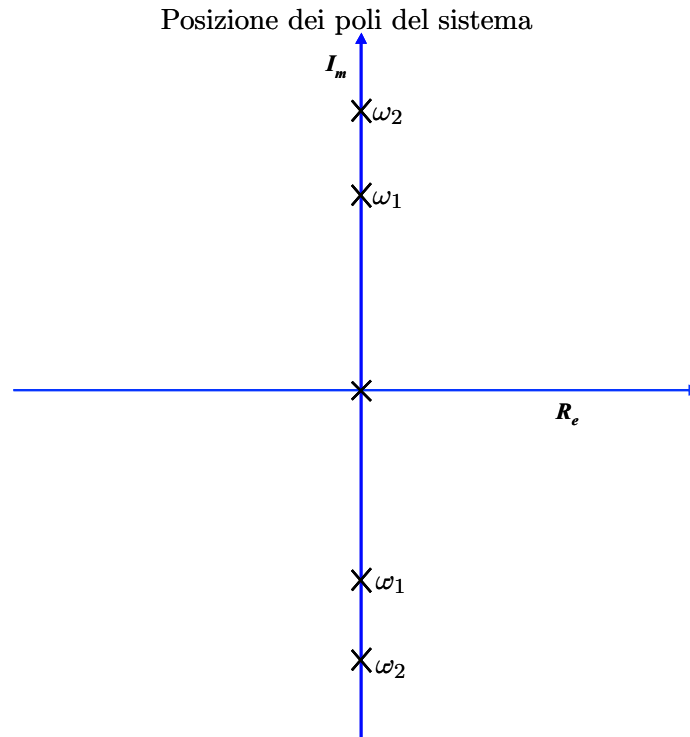


Figura 2.4: Poli

## 2.4 Linearizzazione del modello

Per molte applicazioni che riguardano sistemi non lineari è possibile fare l'ipotesi di un funzionamento per piccoli segnali. Questo accade quando l'ampiezza dei segnali di controllo determina traiettorie nello spazio degli stati, nell'intorno di un punto di equilibrio (detto anche punto di lavoro) la cui estensione sia "piccola rispetto alle dinamiche non-lineari intrinseche del sistema". Volendo quindi linearizzare i sistemi semplificati, nell'intorno del punto di lavoro, si utilizza il comando `linmod` di Matlab ( $[A, B, C D] = \text{LINMOD}('SYS')$ ) che ottiene, nello spazio degli stati, il modello lineare del sistema descritto nel diagramma di blocco 'SYS'.

Per apprezzare meglio i risultati ottenuti si espone brevemente la teoria che sta dietro alla linearizzazione di un sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

I punti di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  per l'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$  si determinano imponendo  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ :

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0}$$

In questo caso si tratta di risolvere rispetto a  $\mathbf{x}_0$  una funzione vettoriale non lineare. Per sistemi non lineari si possono avere tutti i casi possibili: 1) nessun punto di equilibrio; 2) un solo punto di equilibrio; 3) un numero finito di punto di equilibrio; 4) infiniti punti di equilibrio tutti isolati; ecc.

Il valore  $\mathbf{y}_0$  dell'uscita corrispondente ad una condizione di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  di ottiene direttamente dall'equazione di uscita:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$$

Per sistemi non lineari la stabilità non è più una proprietà globale del sistema, ma una proprietà "locale" del singolo punto di equilibrio. Occorre fare un'analisi di stabilità specifica per ciascun punto di equilibrio. Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante  $\mathbf{u}_0$ . Sviluppando in serie le funzioni  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  nell'intorno del punto  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  si ottiene:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_{\mathbf{y}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

dove con  $\mathbf{h}_1(\cdot)$  e  $\mathbf{h}_2(\cdot)$  si sono indicati gli infinitesimi di ordine superiore che si suppone di poter trascurare nell'interno del punto di equilibrio  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ . Utilizzando come nuove variabili di sistema le distanze dal punto di equilibrio,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ , e  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ , si ottiene il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}(t) \end{cases}$$

dove le matrici di sistema sono le seguenti:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

e

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

La stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio può essere studiata applicando il criterio "ridotto" di Lyapunov al sistema linearizzato.

Avendo esposto brevemente la teoria, che stà dietro alla linearizzazione dei sistemi non lineari, passiamo ad analizzare i risultati ottenuti. Il sistema ridotto ad una sola ruota dentata è già lineare (non presenta non linearità) per cui con il comando linmod, al variare degli attriti, si determinano le funzioni di trasferimento e i diagrammi di Bode riportati in Fig. 2.5: Al progressivo aumentare degli attriti il picco di risonanza diminuisce. Questo risultato è

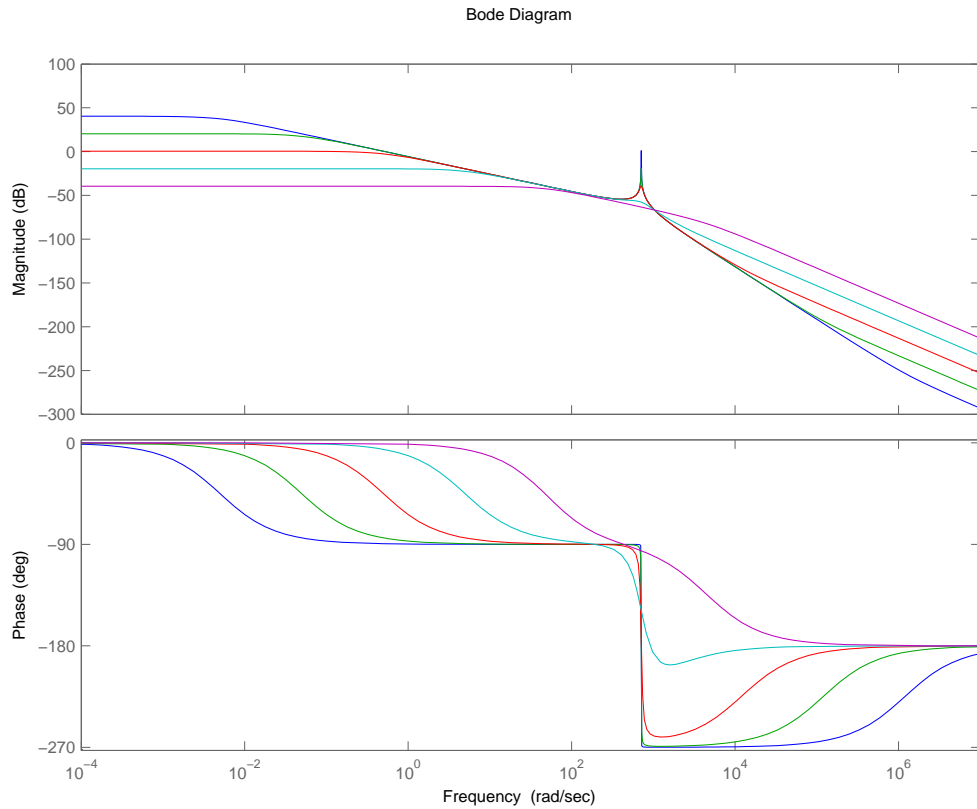


Figura 2.5: Diagrammi di Bode

concorde con le relazioni teoriche sull'ampiezza  $M_R$  del picco di risonanza e sul coefficiente di smorzamento  $\delta$

$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \quad \delta = \cos(\varphi)$$

Al diminuire dell'attrito i poli si spostano poco dall'asse immaginario (come si evince anche dai contorni delle radici sul sistema ridotto) e l'angolo  $\varphi$  (vedi Fig. 2.6), per come è definito, assume valori prossimi a  $\frac{\pi}{2}$ ; sarà quindi più pronunciato il picco di risonanza. Volendo linearizzare il sistema in cui è presente il gioco si ottiene una funzione di trasferimento nulla, questo non deve stupire in quanto il punto di lavoro si trova all'interno del gioco e la tangente alla non linearità risulta la retta delle ascisse.

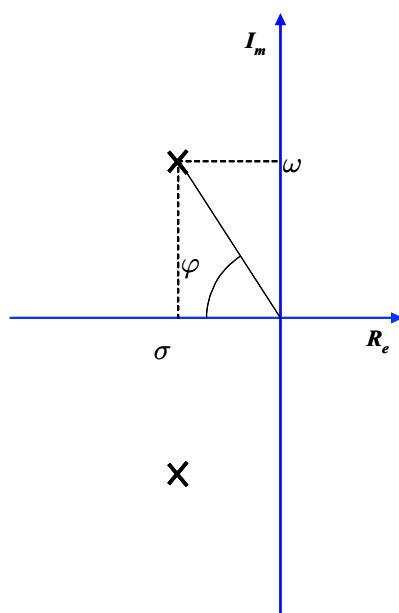


Figura 2.6: Poli complessi coniugati