

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

*Facoltà di Ingegneria di Modena
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica*

Modello dinamico di trasmissione elettroidraulica
di tipo innovativo per veicoli agricoli
e stima della velocità di rotazione
mediante ruota fonica.

Relatore:
Prof. Roberto Zanasi

Tesi di Laurea di:
Francesco Bedogni

Correlatori:
Dott. Ing. Riccardo Morselli
Dott.ssa Ing. Federica Grossi

Anno Accademico 2006-2007

Capitolo 2

Sistema CVT

2.1 Descrizione del sistema fisico

I moderni mezzi agricoli devono soddisfare un connubio di esigenze di vario genere. La possibilità di trasmettere con continuità coppia a terra risulta di importanza rilevante. Di conseguenza, oltre che per la semplicità di utilizzo ed il comfort (l'utente non deve cambiare marcia), le principali aziende che operano nel campo hanno scelto di utilizzare per alcuni loro modelli un tipo di meccanica in cui i rapporti di trasmissione sono teoricamente infiniti. Si ha, quindi, la possibilità di variare la velocità del veicolo senza alterare i giri del motore. Il termine con cui si è soliti indicare questo tipo di trasmissione è CVT (dall'inglese: Continuously Variable Transmission).

Con l'aiuto della Fig. 2.1, ne descriviamo il principio di funzionamento. Oltre al motore (1), dotato di un'architettura tradizionale, le componenti su cui si basa un tipico cambio CVT sono:

- Il gruppo epicicloidale (2), composto dai satelliti (2a), dalla ruota dentata esterna (2b), che in seguito chiameremo ring, dalla ruota che riceve il moto direttamente dal motore (2c) e dal portasatelliti (2d).

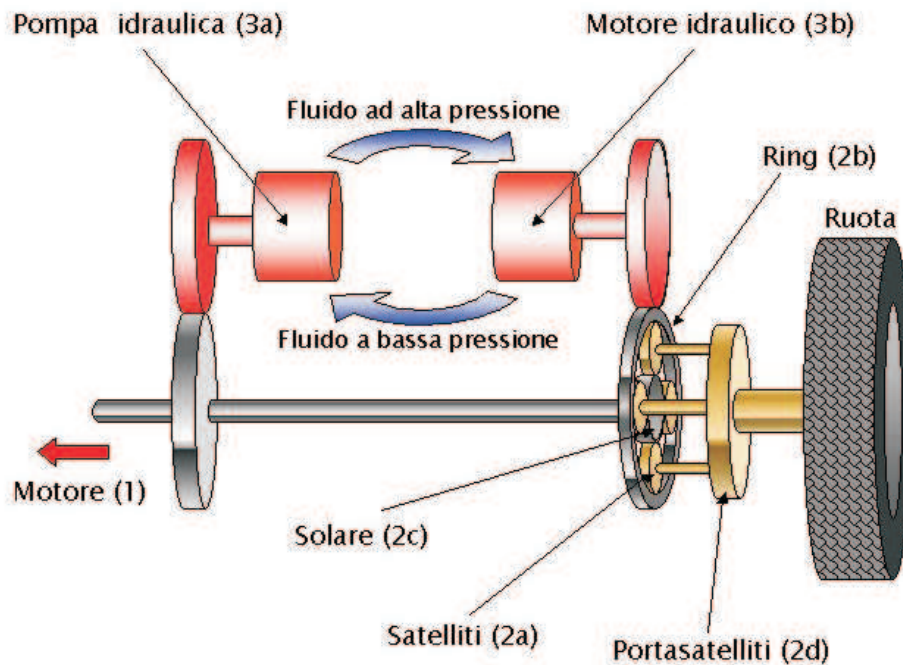


Figura 2.1: Illustrazione semplificata del CVT

- Il gruppo idraulico (3) è composto da una pompa (3a) la cui cilindrata può essere variata entro un certo intervallo, e da un motore idraulico (3b) che converte la pressione ricevuta in una coppia motrice sull'albero di uscita.

Se l'albero motore mantiene una velocità costante, al variare della velocità del ring varierà anche quella dei satelliti attorno all'asse dell'albero principale e quindi del portasatelliti.

Modificando la velocità dell'albero motore e quella del ring è possibile regolare sia la velocità che la direzione di marcia del veicolo.

In particolare la Fig. 2.1 mostra che il motore tradizionale mette in moto una pompa idraulica mediante una coppia di ruote dentate. Questa a sua volta

alimenta, mediante fluido in pressione, il motore idraulico il cui albero di uscita agisce sul ring. Cambiando, tramite un attuatore controllato elettronicamente, la cilindrata della pompa, varia l'azione che lo stesso motore idraulico esercita sull'albero di uscita e quindi cambia, in ultima istanza, il rapporto fra i giri del motore e la velocità del veicolo. Esistono inoltre ulteriori marce, selezionabili elettronicamente, che permettono di aumentare la gamma di velocità di utilizzo del trattore.

Il primo passo sarà quello di individuare un modello dinamico accurato delle parti principali del sistema utilizzando la tecnica POG.

2.2 Modelli dinamici POG

2.2.1 Circuito idraulico

Il gruppo idraulico presente nel sistema CVT consente di variare con continuità la velocità del veicolo. In prima analisi, come si può vedere in Fig. 2.2, si può dividere il sistema in sezioni ideali (linee tratteggiate verticali), ognuna corrispondente ad un elemento POG visibile in Fig. 2.3.

Le sezioni A ed F rappresentano la pompa e il motore idraulico. La prima trasforma una velocità angolare ω_p in una portata idraulica Q_p , la seconda fa esattamente il lavoro opposto e converte Q_q in ω_q . Ciò che determina il valore della portata all'interno del circuito è la cilindrata della pompa che nel nostro caso è variabile e dipende dall'angolo θ del piattello di controllo. Questo angolo può essere sia positivo che negativo a seconda che si voglia o meno l'inversione delle camere di aspirazione e di conseguenza della mandata della pompa. Queste due parti sono state modellate con due blocchi di connessione: il primo $h_p(\theta)$ è una grandezza dipendente da θ che consente la trasformazione tra velocità angolare e portata idraulica, il secondo h_q converte la portata

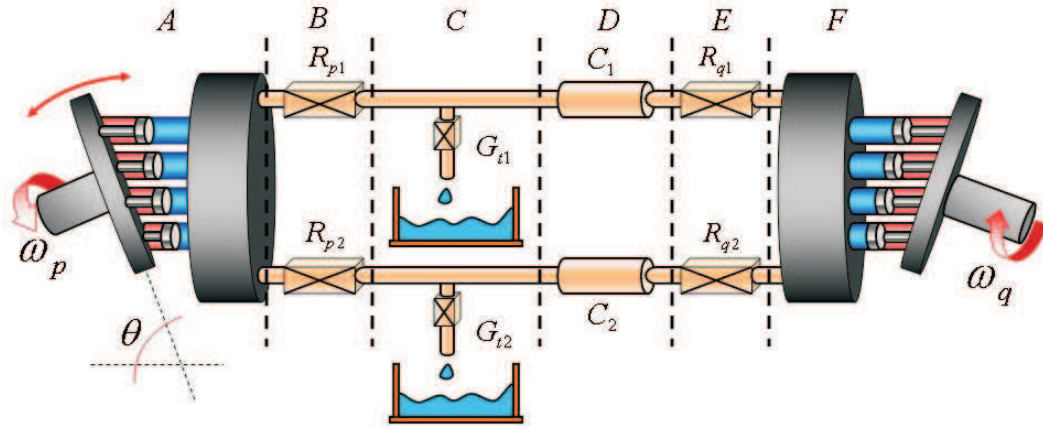


Figura 2.2: Schema del circuito idraulico.

in una velocità angolare. Questo ultimo coefficiente è una costante perché il motore idraulico che modella ha la cilindrata fissa. Inoltre in questi due blocchi vi è il passaggio da una a due dimensioni e viceversa.

Le sezioni B e E modellano le perdite di carico rispettivamente in ingresso e in uscita al circuito. Questi sono due blocchi di elaborazione che trasformano una portata in una pressione.

La sezione C rappresenta le perdite per trafilamento. Queste perdite sono state modellate tramite un blocco di elaborazione che lavora nel verso opposto rispetto ai precedenti. Ricevendo in ingresso una coppia di pressioni P_1 e P_2 dà in uscita due portate che si vanno a sottrarre alle portate della mandata e del ritorno; questo perché più sale la pressione e più questo tipo di perdite limita la portata totale.

La sezione D modella la capacità idraulica del sistema. Questo è un elemento dinamico contenente due blocchi: uno con la matrice che contiene i valori di queste capacità e uno contenente un integratore.

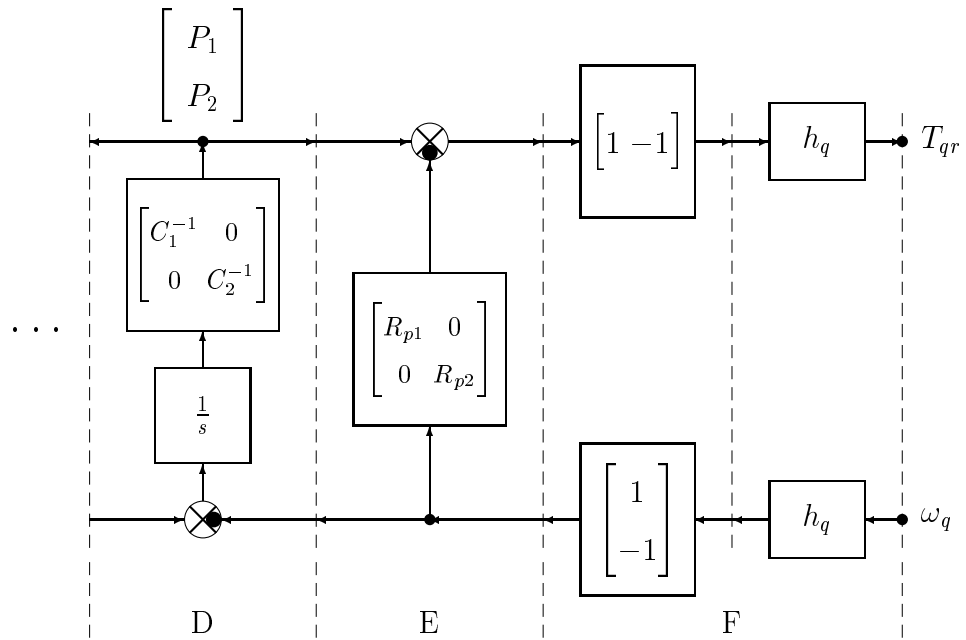
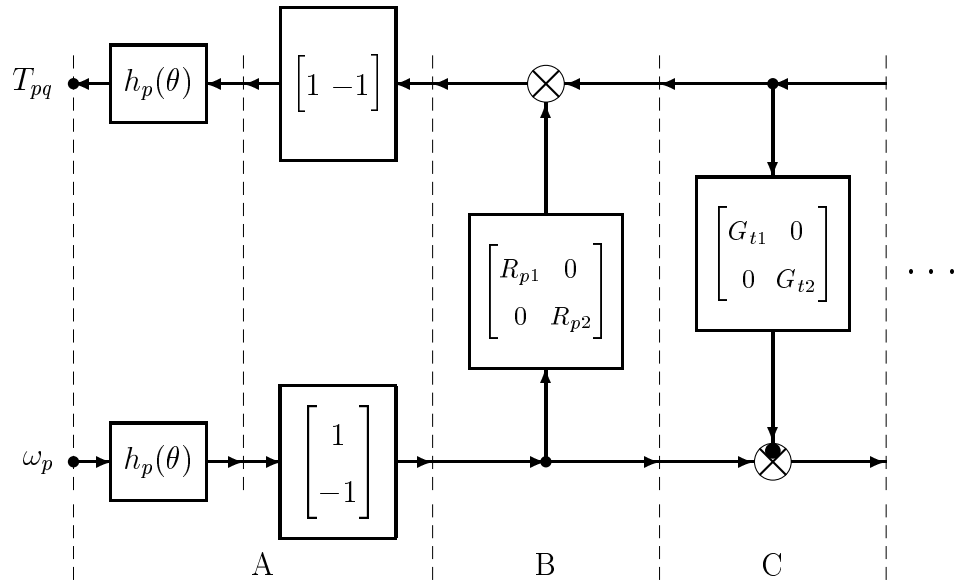


Figura 2.3: Modello POG dello schema in Fig. 2.2.

È possibile modellare le capacità idrauliche del CVT ricavando le equazioni dinamiche del sistema mostrato in Fig. 2.3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -G_{t1} & 0 \\ 0 & -G_{t2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_p \\ Q_q \end{bmatrix}}_u \\ \underbrace{\begin{bmatrix} P_p \\ P_q \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} R_{p1} + R_{p2} & 0 \\ 0 & R_{p1} + R_{p2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_p \\ Q_q \end{bmatrix}}_u \end{array} \right.$$

Per semplificare i calcoli il circuito idraulico può essere modellato come in Fig. 2.4 (in alto) in cui tutti gli elementi dinamici sono stati presi solo per una mandata idraulica. Lo schema POG relativo a questa semplificazione è presente in Fig. 2.4 (in basso).

Per estendere il modello sono state aggiunte alcune sezioni dinamiche che servono a descrivere l'interazione che il circuito idraulico ha con le altre parti meccaniche che compongono la trasmissione CVT. Queste interazioni avvengono tramite ruote dentate che ovviamente hanno una loro inerzia, una loro rigidità non infinita e tra di loro esercitano una certa frizione nel trasmettere coppia. Una visione semplificata della parte di sistema di cui si sta parlando si può vedere in Fig. 2.5. Come si può notare, i blocchi b_{mp} e b_{qr} rappresentano le frizioni della pompa e del motore idraulico mentre gli elementi dinamici $\frac{1}{J_p}$ e $\frac{1}{J_q}$, seguiti da un integratore, le rispettive inerzie. Infine gli elementi dissipativi contenenti $K_{mp} b_{mp}$ e $K_{mq} b_{mq}$ presenti in entrata e in uscita modellano

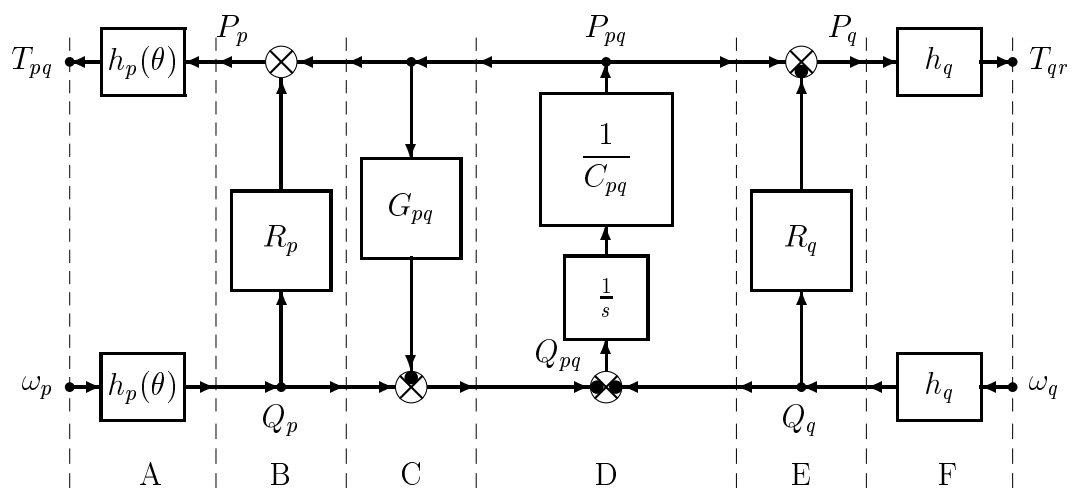
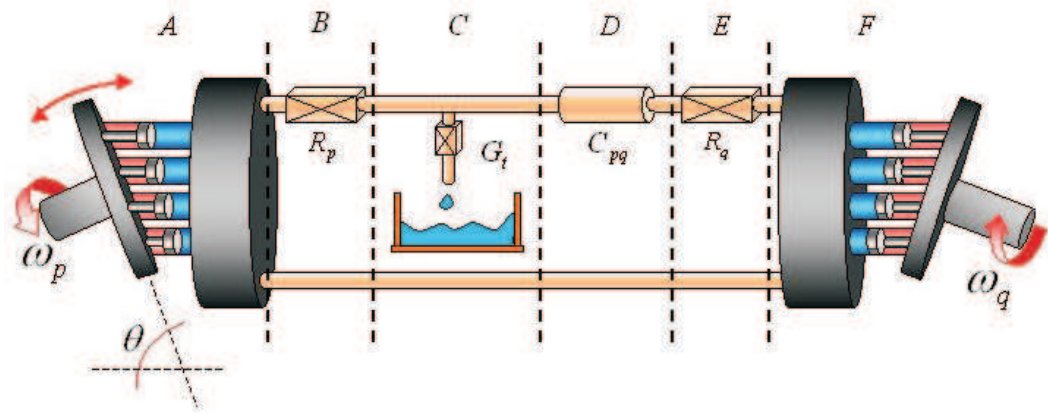


Figura 2.4: Schema POG semplificato per il circuito idraulico.

l'elasticità della connessione vera e propria tra gli ingranaggi. Le sezioni ai due estremi sono due blocchi di connessione che moltiplicano le coppie e le velocità angolari per i raggi delle ruote dentate. Questo è necessario per ottenere i rispettivi valori tangenziali, utili per la modellazione degli elementi dinamici degli ingranaggi.

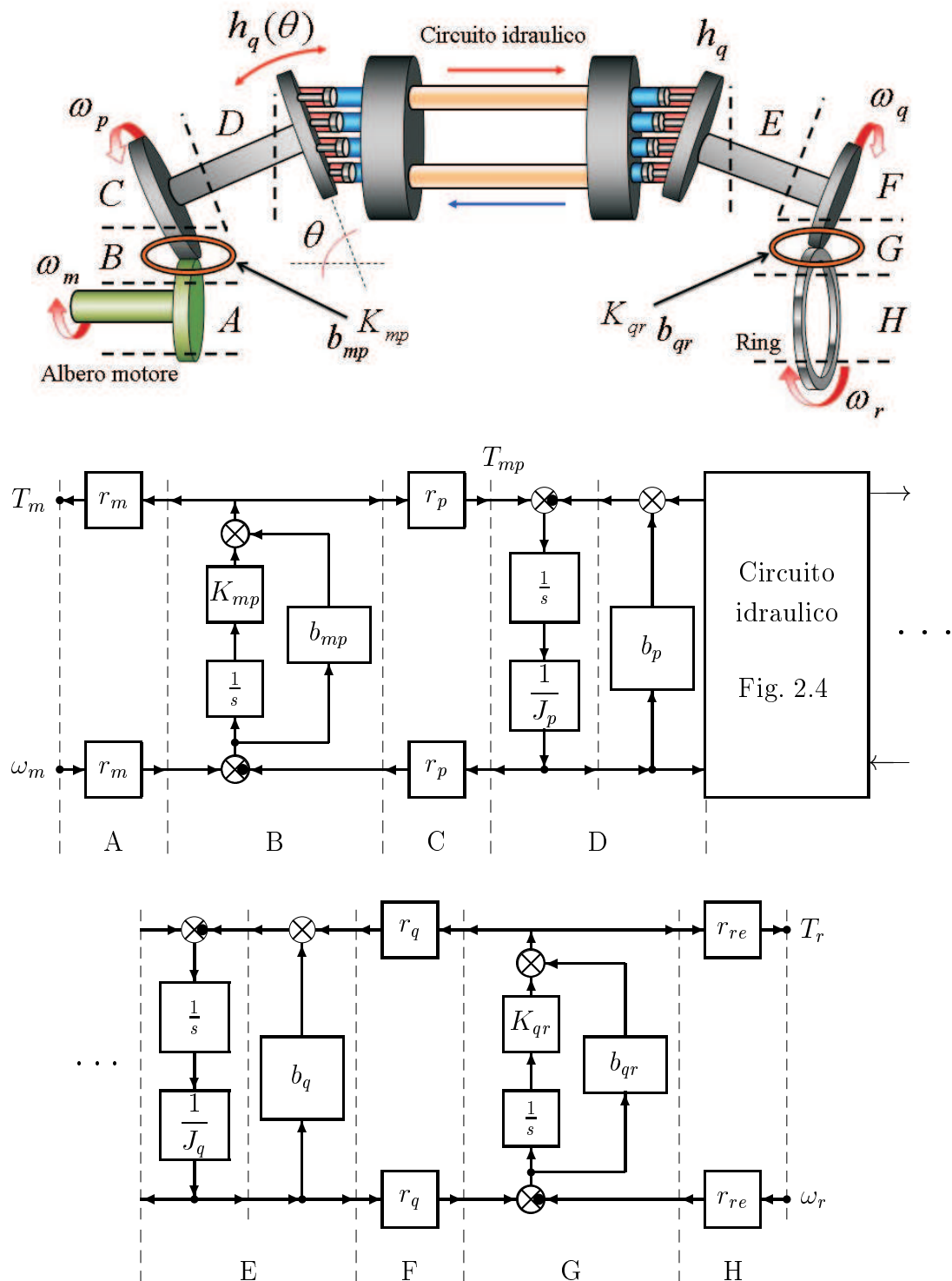


Figura 2.5: Schema di interconnessione della parte idraulica con il resto della trasmissione (in alto) con relativa modellizzazione POG delle parti dinamiche.

2.2.2 Gruppo epicicloidale

I diversi tipi di rotismi esistenti si possono distinguere in ordinari ed epicicloidali. Nei primi gli assi di rotazione degli ingranaggi sono fissi mentre nei secondi questi sono liberi di muoversi ovvero sono mobili.

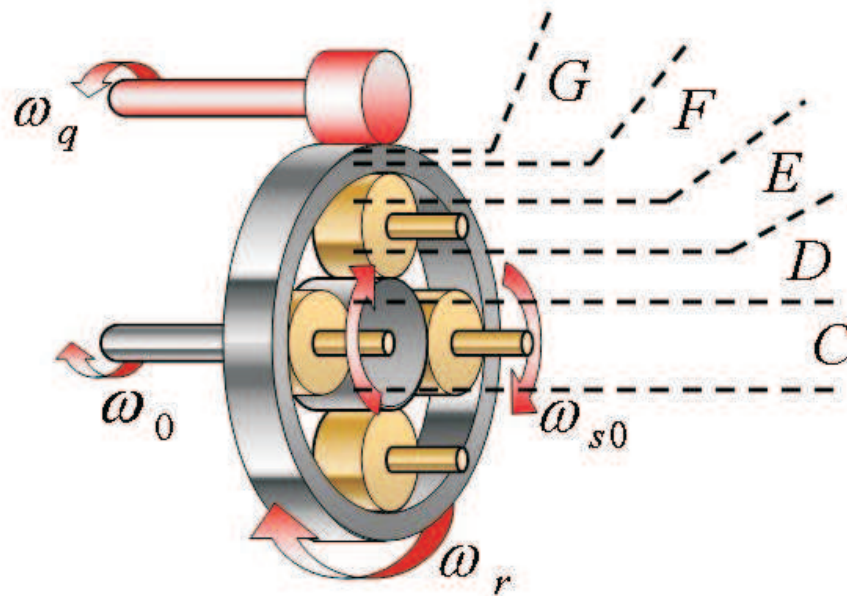


Figura 2.6: Gruppo epicicloidale del sistema CVT

Il caso in esame cade nella tipologia dei rotismi epicicloidali. Il gruppo di ingranaggi che trasmette il moto alle ruote, chiamato gruppo epicicloidale, è composto da una serie di ruote dentate accoppiate come da Fig. 2.6. L'ingranaggio al centro è chiamato "solare" o "sun" e in questo caso è direttamente connesso con l'albero motore. La corona esterna è detta "ring" ed è collegata al motore idraulico. Infine sono presenti quattro "satelliti" i cui assi di rotazione non sono fissi e sono saldamente connessi tra loro tramite un portasatelliti. Ricevendo il moto sia dal solare che dal ring compiono, oltre che una rotazione sul proprio asse, un moto di rivoluzione attorno all'asse dell'ingranaggio cen-

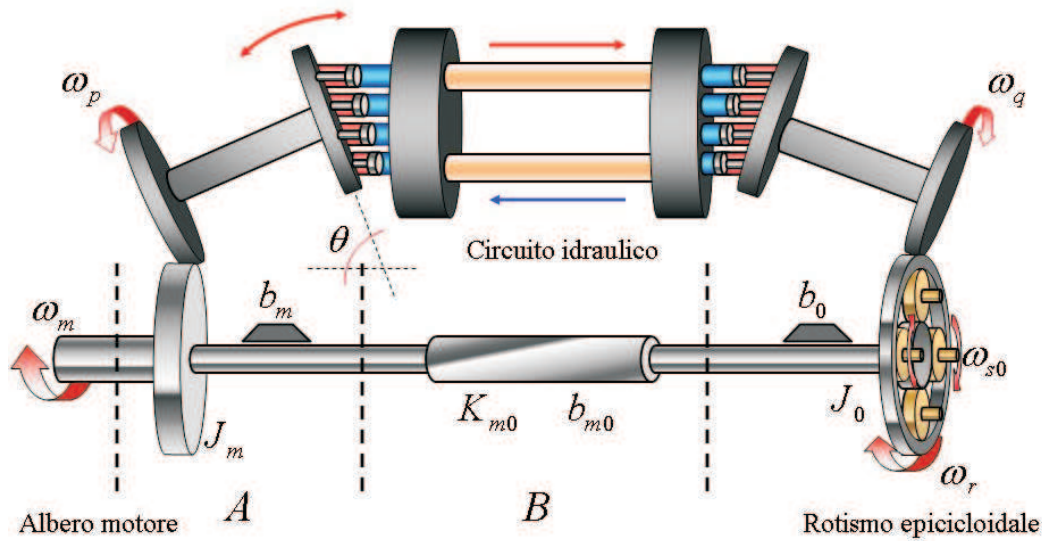


Figura 2.7: Schema del sistema CVT completo.

trale. Per questo motivo possiamo affermare che il sistema ha due gradi di libertà.

Per creare una continuità con le sezioni modellate nel paragrafo precedente il modello POG del rotismo epicicloidale è stato realizzato tenendo conto anche delle interconnessioni con le parti restanti del sistema. Infatti come si può vedere in Fig. 2.7 le due parti contrassegnate con le lettere A e B svolgono per l'appunto questa funzione. La prima sezione modella la ruota dentata che collega l'albero motore con l'ingresso del circuito idraulico considerandone l'inerzia, mentre la seconda rappresenta l'elasticità posseduta dall'albero di trasmissione. In ingresso al modello creato, come si può vedere in Fig. 2.8, ci sono le coppie applicate all'ingranaggio nella sezione A che risultano essere T_m e T_{mp} , ovvero quelle relative al motore e alla sezione della pompa del circuito idraulico, la coppia trasmessa al ring tramite il motore idraulico precedentemente modellato T_r ed infine T_{0s} e T_w che rappresentano la coppia resistente

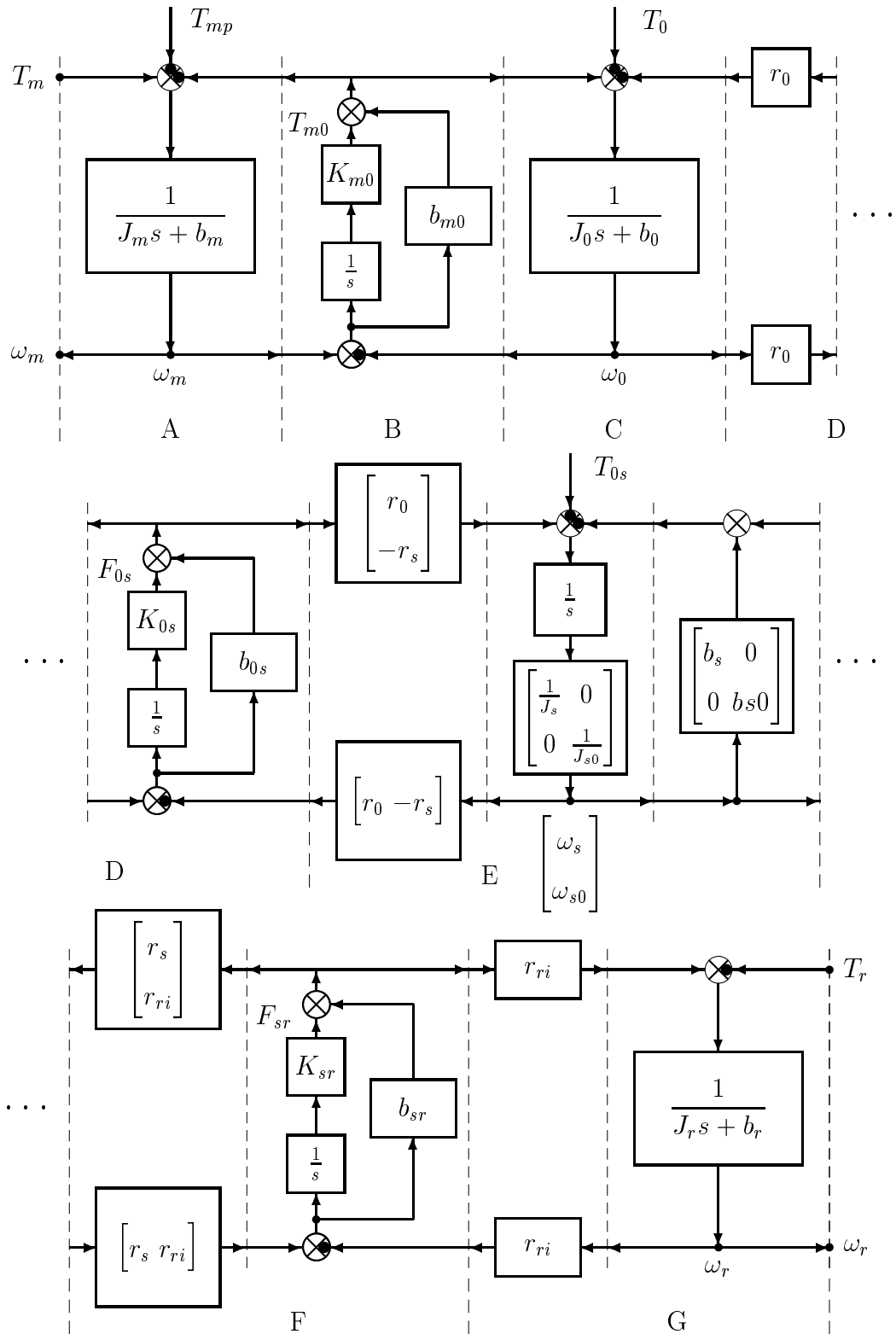


Figura 2.8: Schema POG della sezione relativa al rotismo epicicloidale e alla sua connessione con l'albero motore e con il circuito idraulico.

proveniente dalle ruote del mezzo agricolo che a seconda della marcia e dell'utilizzo viene a trovarsi applicata al portasatelliti o direttamente al solare. Continuando nell'analisi si trova la sezione C che rappresenta l'inerzia del sun

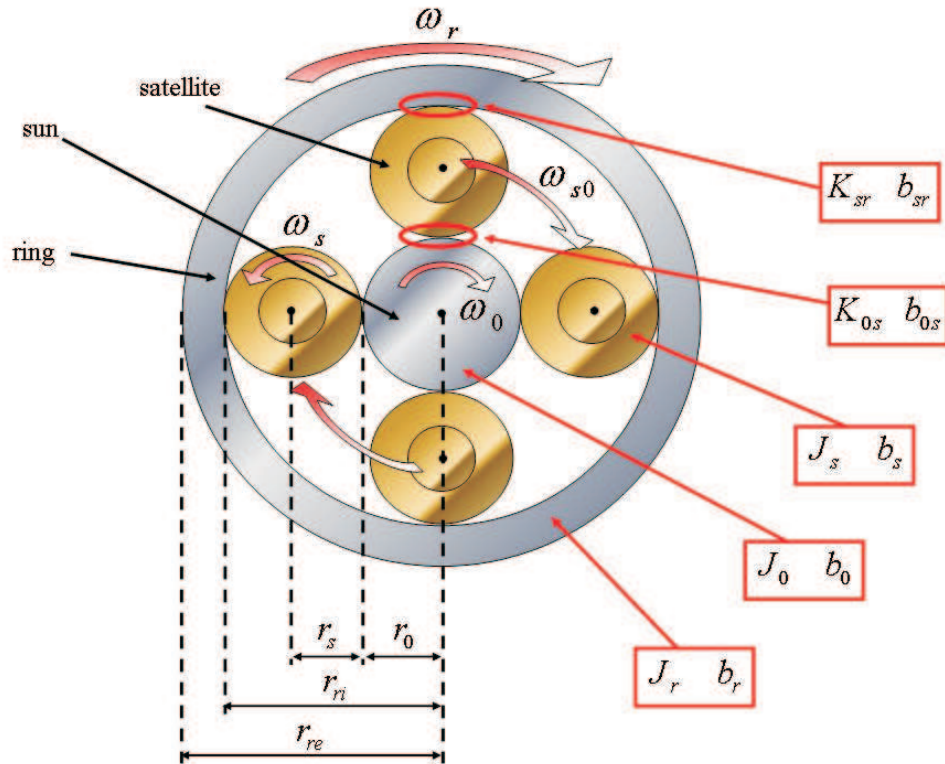


Figura 2.9: Visuale frontale del gruppo epicicloidale con definizione grandezze di sistema.

e la sezione D che modella l'elasticità della connessione del sun con i satelliti. Come si può vedere tutti i blocchi di connessione, ovvero quelli orizzontali, servono per trasformare una forza in una coppia oppure per convertire una velocità angolare in una tangenziale. Tutte le variabili che riguardano il gruppo epicicloidale si possono vedere in Fig. 2.9. Nel blocco E si passa a modellare l'inerzia dei satelliti passando però a lavorare in due dimensioni perché i satelliti possiedono due gradi di libertà. Infatti, come detto in precedenza,

i satelliti oltre a ruotare intorno a se stessi compiono un moto di rivoluzione intorno alla ruota centrale. Assumendo ragionevolmente che i quattro satelliti siano tutti uguali tra di loro e volendo semplificare la modellazione, si può considerare un unico ingranaggio con massa quattro volte più grande. All'interno del blocco F vi è l'elasticità del collegamento tra il ring e i satelliti mentre nell'ultima sezione dello schema si ritorna a lavorare con una variabile sola e si descrive l'inerzia posseduta dalla ruota dentata esterna ovvero il ring. L'uscita del sistema consiste nella velocità angolare del sun ω_0 e in quella dei satelliti ω_{s0} perchè come detto in precedenza le ruote possono essere connesse sia al portasatelliti che al sun.

2.3 Descrizione nello spazio degli stati

Ora viene presentata una rappresentazione del modello POG di Fig. 2.8 riguardante il rotismo epicicloidale e la sua connessione con il motore con la metodologia dello spazio degli stati. Questo sarà un esempio di come una volta descritto un sistema nello spazio degli stati è possibile trasformarlo e ridurlo fino a giungere ad una forma più compatta e comprensibile. Successivamente si procederà ad implementare e a ridurre con la stessa tecnica il sistema completo ovvero comprensivo anche della parte idraulica di Fig. 2.5 per ottenere il sistema completo finale ridotto.

La struttura del primo sistema in esame nello spazio degli stati è la seguente:

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Vettore di stato \mathbf{x} e matrice \mathbf{L} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \omega_m \\ T_{m0} \\ \omega_0 \\ F_{0s} \\ \omega_s \\ \omega_{s0} \\ F_{sr} \\ \omega_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} J_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_{m0}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{0s}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{sr}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

Matrice \mathbf{A} ($r_{ri} = r_0 + 2r_s$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -b_m - b_{m0} - 1 & b_{m0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{m0} & 1 & -b_0 - b_{m0} - r_0^2 b_{0s} - r_0 & b_{0s} r_0^2 & -b_{0s} r_0 r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 & 0 & -r_0 & r_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{0s} r_0^2 & r_0 & -b_s - r_0^2 b_{0s} - r_s^2 b_{sr} & r_0 r_s b_{0s} - r_s r_{ri} b_{sr} & -r_s & r_{ri} r_s b_{sr} \\ 0 & 0 & -b_{0s} r_0 r_s & -r_s & r_0 r_s b_{0s} - r_s r_{ri} b_{sr} & -b_{s0} - r_s^2 b_{0s} - r_{ri}^2 b_{sr} & -r_{ri} & r_{ri}^2 b_{sr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_s & r_{ri} & 0 & -r_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{ri} r_s b_{sr} & r_{ri}^2 b_{sr} & r_r & -b_r - b_{sr} r_{ri}^2 \end{bmatrix}$$

Vettore degli ingressi \mathbf{u} e matrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_m - T_{p1} \\ T_{w0} \\ T_w \\ T_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{A} la si può vedere come formata da due parti ben distinte; da un punto di vista geometrico si può dire che vi è una parte simmetrica ed una

emisimmetrica, mentre da un punto di vista modellistico si può affermare che la parte simmetrica rappresenta le parti dinamiche del sistema mentre quella emisimmetrica le connessioni tra le diverse parti.

Parte simmetrica della matrice \mathbf{A} ($r_{ri} = r_0 + 2r_s$):

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} -b_m - b_{m0} & 0 & b_{m0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{m0} & 0 & -b_0 - b_{m0} - r_0^2 b_{0s} & 0 & b_{0s} r_0^2 & -b_{0s} r_0 r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{0s} r_0^2 & 0 & -b_s - r_0^2 b_{0s} - r_s^2 b_{sr} & r_0 r_s b_{0s} - r_s r_{ri} b_{sr} & 0 & r_{ri} r_s b_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{0s} r_0 r_s & 0 & r_0 r_s b_{0s} - r_s r_{ri} b_{sr} & -b_{s0} - r_s^2 b_{0s} - r_{ri}^2 b_{sr} & 0 & r_{ri}^2 b_{sr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{ri} r_s b_{sr} & r_{ri}^2 b_{sr} & 0 & -b_r - b_{sr} r_{ri}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Parte emisimmetrica della matrice \mathbf{A} ($r_{ri} = r_0 + 2r_s$):

$$\mathbf{A}(e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 & 0 & -r_0 & r_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & -r_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_s & 0 & 0 & -r_{ri} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_s & r_{ri} & 0 & -r_{ri} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{ri} & 0 \end{bmatrix}$$

Per semplificare il sistema si può assumere la rigidità dell'albero di trasmissione rappresentato dalla lettera B e le due rigidità di connessione tra le ruote dentate nelle sezioni D ed F infinite. Così facendo si ottiene una riduzione del sistema originale. Attraverso la matrice \mathbf{T}_1 si spostano le colonne e le righe

Nuova matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -b_m - b_{m0} & 0 & b_{m0} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_s - b_{0s}r_0^2 - b_{sr}r_s^2 & b_{0s}r_0^2 & b_{0s}r_0r_s - b_{sr}r_{ri}r_s & b_{sr}r_{ri}r_s & 0 & r_0 & -r_s \\ b_{m0} & b_{0s}r_0^2 & -b_0 - b_{m0} - b_{0s}r_0^2 & -b_{0s}r_0r_s & 0 & 1 & -r_0 & 0 \\ 0 & b_{0s}r_0r_s - b_{sr}r_{ri}r_s & -b_{0s}r_0r_s & -b_{s0} - b_{sr}r_{ri}^2 - b_{0s}r_s^2 & b_{sr}r_{ri}^2 & 0 & -r_s & -r_{ri} \\ 0 & b_{sr}r_{ri}r_s & 0 & b_{sr}r_{ri}^2 & -b_r - b_{sr}r_{ri}^2 & 0 & 0 & r_{ri} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_0 & r_0 & r_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 & r_{ri} & -r_{ri} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nuova matrice \tilde{B} :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come si può notare in Fig. 2.10 la matrice di stato \tilde{x} e la matrice \tilde{A} possono essere viste come divise in sezioni ben distinte.

$$\tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_s \end{bmatrix} \quad \tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_{s0} \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r_0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} \quad \tilde{A}_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ r_0 & r_s & 0 \\ 0 & r_{ri} & -r_{ri} \end{bmatrix}$$

Quindi sapendo che

$$\tilde{A}_{31}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{32}\tilde{x}_2 = 0 \quad (2.4)$$

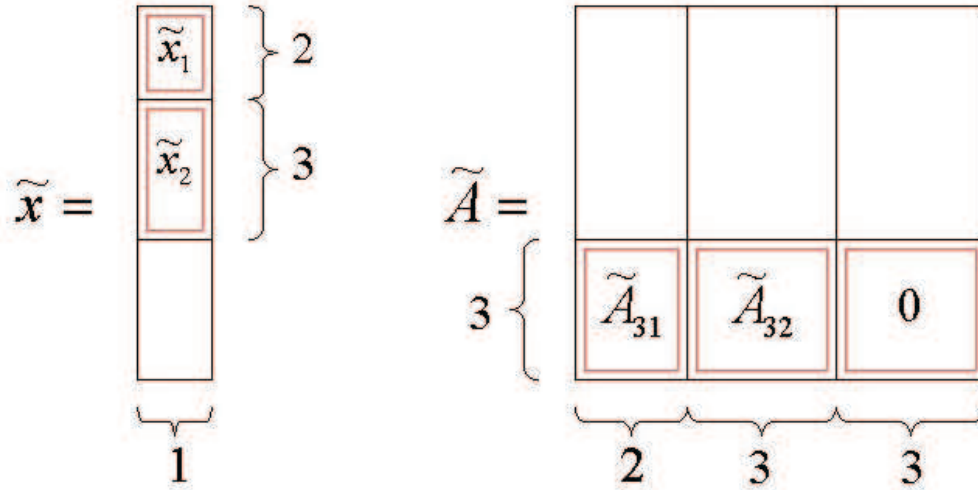


Figura 2.10: Scomposizione delle due matrici \tilde{x} e \tilde{A} .

$$\tilde{A}_{32}\tilde{x}_2 = -\tilde{A}_{31}\tilde{x}_1 \quad (2.5)$$

$$\tilde{x}_2 = -\tilde{A}_{32}^{-1}\tilde{A}_{31}\tilde{x}_1 \quad (2.6)$$

possiamo creare la matrice \tilde{A}_{X21} applicando la formula (2.7)

$$\tilde{A}_{X21} = -\tilde{A}_{32}^{-1}\tilde{A}_{31}. \quad (2.7)$$

$$\tilde{A}_{X21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{r_0}{r_s} & \frac{r_0}{r_s} \\ -\frac{r_0}{r_s} & \frac{r_0}{r_s} + \frac{r_s}{r_{ri}} \end{bmatrix}$$

La nuova matrice di trasformazione T_2 sarà formata da una matrice identità 2×2 , dalla \tilde{A}_{X21} e da una matrice 3×2 di zeri. La matrice che si ottiene da

queste unioni è la seguente:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -\frac{r_0}{r_s} & \frac{r_0}{r_s} \\ -\frac{r_0}{r_s} & \frac{r_0}{r_s} + \frac{r_s}{r_{ri}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando questa nuova trasformazione si ottiene un sistema ridotto che è tutto in funzione delle due variabili di stato che abbiamo scelto come riferimento.

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} J_0 + J_m + \frac{(J_r + J_{s0})r_0^2}{r_s^2} & r_0 \left(-\frac{J_r}{r_{ri}} - \frac{(J_r + J_{s0})r_0}{r_s^2} \right) \\ r_0 \left(-\frac{J_r}{r_{ri}} - \frac{(J_r + J_{s0})r_0}{r_s^2} \right) & J_s + \frac{J_{0s}r_0^2}{r_s^2} + J_r \left(\frac{r_0}{r_s} + \frac{r_s}{r_{ri}} \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -b_0 - b_m + \frac{(b_r + b_{s0})r_0^2}{r_s^2} & r_0 \left(\frac{b_r}{r_{ri}} + \frac{(b_r + b_{s0})r_0}{r_s^2} \right) \\ r_0 \left(\frac{b_r}{r_{ri}} + \frac{(b_r + b_{s0})r_0}{r_s^2} \right) & -\frac{b_r(r_0 r_{ri} + r_s^2)^2 + r_{ri}^2(b_{s0}r_0^2 + b_s r_s^2)}{r_{ri}^2 r_s^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{r_0}{r_s} & \frac{r_0}{r_s} \\ 0 & 0 & -\frac{r_0}{r_s} & -\frac{r_0}{r_s} - \frac{r_s}{r_{ri}} \end{bmatrix}$$

Dopo questo esempio di trasformazione e riduzione si può passare a descrivere nello spazio degli stati il sistema completo. Per farlo è necessario riprendere le matrici x , L ed A dell'esempio appena descritto e chiamarle x' , L' ed A' . La creazione del nuovo sistema complessivo necessita però della descrizione nello spazio degli stati di quella parte di circuito non ancora analizzata con questa tecnica. La descrizione nello spazio degli stati di questa nuova parte segue il modello usato per la precedente:

$$\mathbf{L} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Il vettore di stato \mathbf{x}'' e matrice \mathbf{L}'' :

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} T_{mp} \\ \omega_p \\ P_{pq} \\ \omega_q \\ T_{qr} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}'' = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{mp}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{pq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_{qr}} \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{A}'' :

$$\mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 0 & -r_p & b_{m0} & 0 & 0 \\ r_p & -b_p - b_{mp}r_p^2 - (h_p(\theta))^2 R_p & -h_p(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & h_p(\theta) & 0 & -h_q & 0 \\ 0 & 0 & h_q & -b_q - b_{qr}r_q^2 - h_q^2 R_q & -r_q \\ 0 & 0 & 0 & r_q & 0 \end{bmatrix}$$

Vettore degli ingressi \mathbf{u}'' e matrice \mathbf{B}'' :

$$\mathbf{u}'' = \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} r_m & 0 \\ b_{mp}r_mr_p & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{qr}r_qr_{re} \\ 0 & -r_{re} \end{bmatrix}$$

Ora avendo a disposizione entrambe le descrizioni nello spazio degli stati è possibile definire il sistema completo finale come:

Vettore di stato \mathbf{x}_{tot} :

$$\mathbf{x}_{tot} = \begin{bmatrix} \omega_m \\ T_{m0} \\ \omega_0 \\ F_{0s} \\ \omega_s \\ \omega_{s0} \\ F_{sr} \\ \omega_r \\ T_{mp} \\ \omega_p \\ F_{pq} \\ \omega_q \\ T_{qr} \end{bmatrix}$$

Le composizioni della nuova matrice \mathbf{L}_{tot} a partire da L' e da L'' è della nuova matrice A_{tot} partendo da A' e da A'' sono visibili in Fig. 2.11.

La matrice A_{tot} avra però cambiati i termini visibili nella $A_{tot}(U)$ che servono per tener conto della connessione tra i due sistemi:

$$A_{tot}(U) = \begin{bmatrix} -b_{mp}r_m^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_m & r_m b_{mp}r_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{re}r_q b_{qr} & -r_{re} \\ r_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_m b_{mp}r_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{re}r_q b_{qr} & 0 & 0 & 0 & -r_{re}^2 b_{qr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{re} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{tot} = \begin{bmatrix} L' & 0 \\ 0 & L'' \end{bmatrix} \quad A_{tot} = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{bmatrix}$$

Figura 2.11: Visualizzazione grafica della composizione della nuove matrici L_{tot} e A_{tot} .

$$B_{tot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Attraverso la matrice T_{tot1} si spostano le righe e le colonne che non interessano nella parte in basso a destra della matrice \mathbf{L}_{tot} . Queste righe e colonne descrivono fenomeni che si è deciso considerare nulli. Questo perchè per ottenere un risultato finale che dipenda solo da una variabile è necessario che tutte le masse siano considerate come una unica. Per raggiungere questo obiettivo le rigidità degli alberi in rotazione e delle connessioni ad ingranaggi si mandano all'infinito. Infine si manda a zero la capacità idraulica visibile in Fig. 2.2.

$$T_{tot1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_{tot} = T_{tot1}^T L_{tot} T_{tot1} \quad (2.8)$$

$$\tilde{A}_{tot} = T_{tot1}^T A_{tot} T_{tot1} \quad (2.9)$$

$$\tilde{B}_{tot} = T_{tot1}^T B_{tot} \quad (2.10)$$

Applicando le formule (2.8,2.9,2.10) si ottiene un nuovo sistema descritto nella forma seguente.

La relativa matrice \tilde{A}_{tot} è formata come in Fig. 2.12.

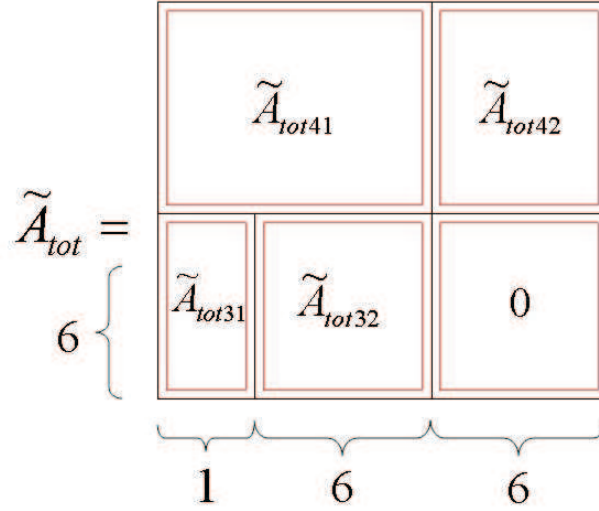


Figura 2.12: Visualizzazione grafica della composizione della nuova matrice \tilde{A}_{tot} .

Le sottomatrici che compongono la \tilde{A}_{tot} sono riportate qui di seguito.

La \tilde{A}_{tot41} sarà uguale a:

$$\begin{bmatrix} -b_{mp}r_m^2 & b_{m0} & 0 & 0 & 0 & b_{mp}r_m r_p & 0 \\ b_{m0} & -b_0 - b_{m0} - b_{os}r_0^2 & b_{os}r_0^2 & -b_{os}r_0 r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{os}r_0^2 & -b_s - b_{os}r_0^2 - b_{sr}r_s^2 & b_{os}r_0 r_s - b_{sr}r_{ri}r_s & b_{sr}r_{ri}r_s & 0 & 0 \\ 0 & -b_{os}r_0 r_s & b_{os}r_0 r_s - b_{sr}r_{ri}r_s & -b_{s0} - b_{sr}r_{ri}^2 - b_{os}r_s^2 & b_{sr}r_{ri}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{sr}r_{ri}r_s & b_{sr}r_{ri}^2 & -b_r - b_{sr}r_{ri}^2 & 0 & b_{qr}r_q r_{re} \\ b_{mp}r_m r_p & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_p - b_{mp}r_p^2 - (h_p(\theta))^2 R_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{qr}r_q r_{re} & 0 & -b_{qr}r_{re}^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{tot42} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -r_m & 0 & 0 \\ 1 & -r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & -r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_s & -r_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{ri} & 0 & 0 & -r_{re} \\ 0 & 0 & 0 & r_p & -h_p(\theta) & r_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_q & -r_q \end{bmatrix}$$

Quindi sapendo che

$$\tilde{A}_{tot31}\tilde{x}_{tot1} + \tilde{A}_{tot32}\tilde{x}_{tot2} = 0 \quad (2.11)$$

$$\tilde{A}_{tot32}\tilde{x}_{tot2} = -\tilde{A}_{tot31}\tilde{x}_{tot1} \quad (2.12)$$

$$\tilde{x}_{tot2} = -\tilde{A}_{tot32}^{-1}\tilde{A}_{tot31}\tilde{x}_{tot1} \quad (2.13)$$

$$\tilde{A}_{totX21} = -\tilde{A}_{tot32}^{-1}\tilde{A}_{tot31}. \quad (2.14)$$

si può creare la matrice \tilde{A}_{totX21} applicando la formula (2.14).

$$\tilde{A}_{totX21} = \begin{bmatrix} \frac{h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} - h_p(\theta) r_m r_q r_{ri} r_s}{h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} + h_q r_p r_{re} r_s^2} \\ \frac{h_p(\theta) r_0 r_m r_q r_{ri} + h_q r_0 r_p r_{re} r_s}{-h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} - h_q r_p r_{re} r_s^2} \\ -\frac{h_p(\theta) r_m r_q}{h_q r_p r_{re}} \\ \frac{r_m}{r_p} \\ \frac{h_p(\theta) r_m}{h_q r_p} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza utilizzando il metodo di componimento già visto nell'esempio iniziale di questo paragrafo è possibile creare la matrice di trasformazione finale \mathbf{T}_{tot2} . Questa volta però, a differenza della precedente, si vuole esprimere il sistema in funzione di un'unica variabile (ω_m) che rappresenta la velocità in uscita dal motore. Per questo motivo la \mathbf{T}_{tot2} non sarà più con due colonne bensì con una sola.

Nella parte alta si inseriscono due uno, nella parte centrale la matrice appena ricavata \tilde{A}_{totX21} e nella parte finale si inseriscono degli zero fino ad arrivare ad un numero di righe pari alle variabili del sistema. La matrice che ne risulta diventa:

$$\mathbf{T}_{tot2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{h_q r_o r_p r_{re} r_{ri} - h_p(\theta) r_m r_q r_{ri} r_s}{h_q r_o r_p r_{re} r_{ri} + h_q r_p r_{re} r_s^2} \\ \frac{h_p(\theta) r_o r_m r_q r_{ri} + h_q r_o r_p r_{re} r_s}{-h_q r_o r_p r_{re} r_{ri} - h_q r_p r_{re} r_s^2} \\ -\frac{h_p(\theta) r_m r_q}{h_q r_p r_{re}} \\ \frac{r_m}{r_p} \\ \frac{h_p(\theta) r_m}{h_q r_p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ora il sistema può essere descritto dalla seguente equazione matriciale in cui tutte le variabili si stato possono essere descritte con il solo parametro ωm .

$$\begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_0 \\ \omega_s \\ \omega_{s0} \\ \omega_r \\ \omega_p \\ \omega_q \\ T_{m0} \\ F_{s0} \\ F_{sr} \\ T_{mp} \\ P_{pq} \\ T_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} - h_p(\theta) r_m r_q r_{ri} r_s}{h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} + h_q r_p r_{re} r_s^2} \\ \frac{h_p(\theta) r_0 r_m r_q r_{ri} + h_q r_0 r_p r_{re} r_s}{-h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} - h_q r_p r_{re} r_s^2} \\ -\frac{h_p(\theta) r_m r_q}{h_q r_p r_{re}} \\ \frac{r_m}{r_p} \\ \frac{h_p(\theta) r_m}{h_q r_p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_m$$

In realtà ω_m non è l'unico parametro rimasto in gioco nel sistema perchè il rapporto di conversione $h_p(\theta)$ dipende per l'appunto da θ ovvero dall'angolo del piattello. Infatti nel sistema CVT, una volta fissata una certa velocità del motore, per variare la velocità angolare in uscita bisogna far variare l'angolo di funzionamento del piattello della pompa idraulica.

Si possono inoltre ricavare i coefficienti di inerzia J_{tot} e di attrito b_{tot} totali del sistema.

La J_{tot} che ne risulta è:

$$\begin{aligned}
 J_{tot} = J_0 + J_m + \frac{J_p r_m^2}{r_p^2} + \frac{(h_p(\theta))^2 J_q r_m^2}{h_q^2 r_p^2} + \frac{(h_p(\theta))^2 J_r r_m^2 r_q^2}{h_q^2 r_p^2 r_{re}^2} + \\
 + \frac{J_{s0} (h_p(\theta) r_0 r_m r_q r_{ri} + h_q r_0 r_p r_{re} r_s)^2}{(-h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} - h_q r_p r_{re} r_s^2)^2} + \frac{J_s (h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} - h_p(\theta) r_m r_q r_{ri} r_s)^2}{(h_q r_0 r_p r_{re} r_{ri} + h_q r_p r_{re} r_s^2)^2}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

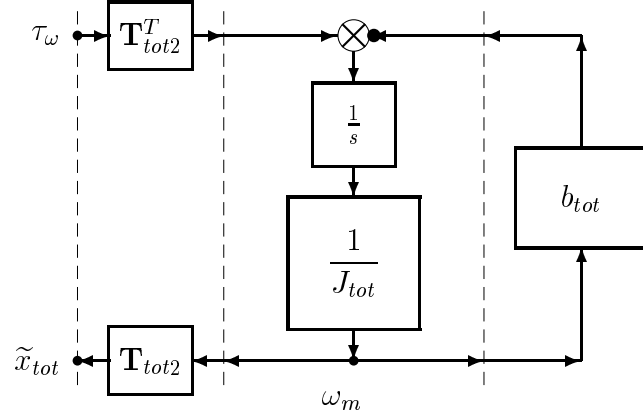


Figura 2.13: Semplificazione concettuale del sistema CVT.

Mentre la b_{tot} diventa:

$$\begin{aligned}
 b_{tot} = & -\frac{1}{h_q^2 r_p^2 r_{re}^2} (b_r (t_p(\theta))^2 r_m^2 r_q^2 + r_{re}^2 (b_p h_q^2 r_m^2 + b_0 h_q^2 r_p^2 - b_{m0} h_q^2 r_p^2 + \\
 & + (h_p(\theta))^2 h_q^2 r_m^2 R_p + 2b_{qr} (h_p(\theta))^2 r_m^2 r_q^2 + b_{qr} (h_p(\theta))^2 r_m^2 r_{re}^2) + \\
 & + \frac{1}{(r_0 r_{ri} + r_s^2)^2} (r_0 r_{ri} (b_{s0} r_0 - b_s r_{ri}) ((h_p(\theta))^2 r_m^2 r_q^2 r_{ri} + \\
 & + \frac{b_{s0} h_q^2 r_0^2 r_p^2 r_{re}^2 + b_s (h_p(\theta))^2 r_m^2 r_q^2 r_{ri}}{r_0 r_{ri} + r_s^2} + h_q r_p r_{re} (-h_q r_0 r_p r_{re} + 2h_p(\theta) r_m r_q r_s)))
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Concettualmente ora è possibile pensare il sistema come un'unica massa in movimento la cui velocità di uscita è controllata solo da ω_m e da θ avente un coefficiente di inerzia pari a J_{tot} ed un coefficiente di attrito pari a b_{tot} . Il vettore τ_ω è il vettore degli ingressi coniugati in potenza. Lo schema POG raffigurante il sistema finale dopo la trasformazione è in Fig. 2.13.