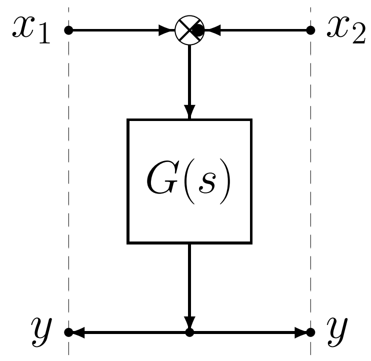
Power-Oriented Graphs (POG)

- Blocco di elaborazione (caso scalare):



$$y(s) = G(s)[x_1(s) - x_2(s)]$$

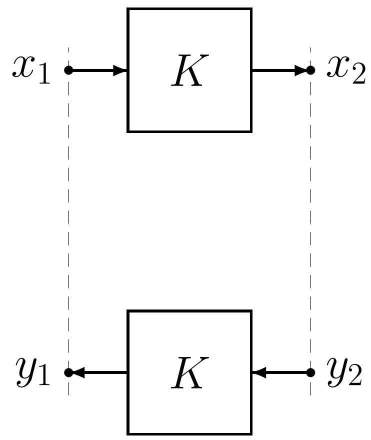
$$G(s) = \frac{1}{b + a\,s}$$

$x_1 y$ $\quad$ $x_2 y$: *Potenza che fluisce*

$b\,y^2$: *Potenza dissipata*

$\frac{1}{2} a\,y^2$: *Energia accumulata*

- Blocco di connessione (caso scalare):



$$\begin{cases} x_2 = K\,x_1 \\ y_1 = K\,y_2 \end{cases}$$

$$x_1\,y_1 = x_2\,y_2$$

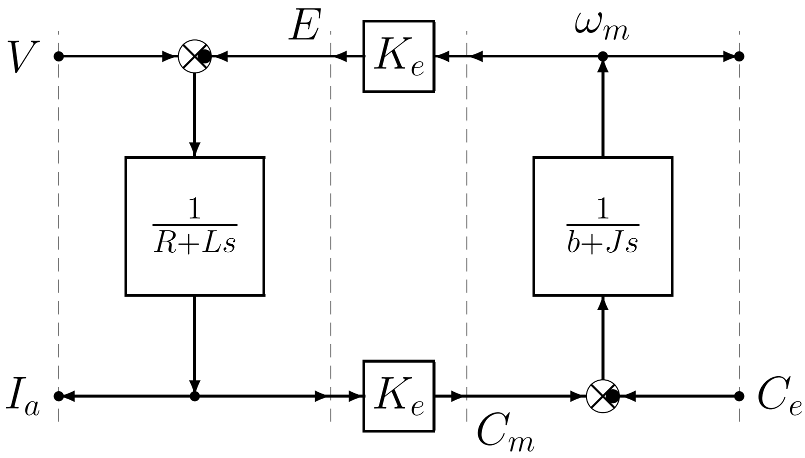
$x_1 y_1$ $\quad$ $x_2 y_2$: *Potenza che fluisce*

0 : *Potenza dissipata*

0 : *Energia accumulata*

- Il prodotto delle variabili accoppiate dalle linee verticali a tratteggio deve avere il significato fisico di una potenza.

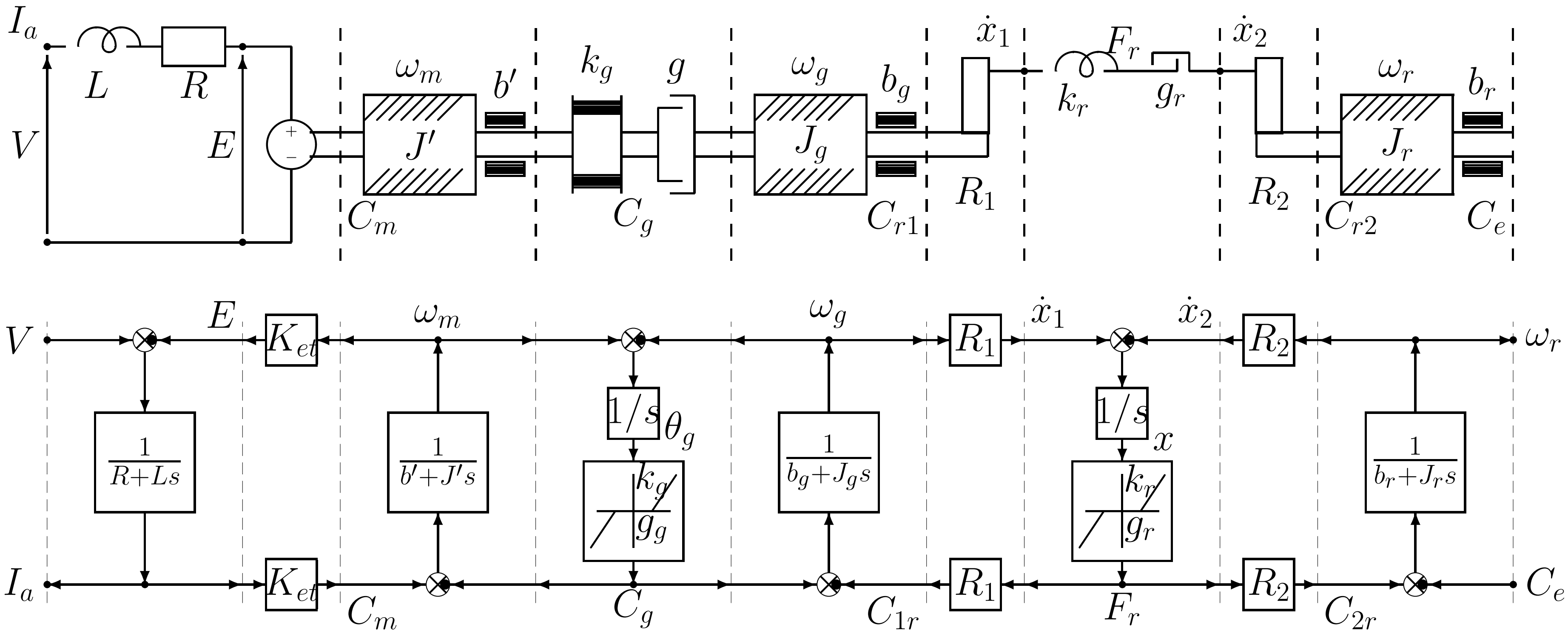
- Esempio: motore elettrico in corrente continua:



$V\,I_a$	$E\,I_a$ $\;C_m\,\omega_m$	$C_e\,\omega_m$	: *Potenza che fluisce*
$R\,I_a^2$	/	$b\,\omega_m^2$	: *Potenza dissipata*
$\frac{1}{2}L\,I_a^2$	/	$\frac{1}{2}J\,\omega_m^2$	: *Energia accumulata*

- Il prodotto delle variabili accoppiate ha il significato fisico di una potenza.
- In ogni blocco di elaborazione l'energia viene immagazzinata e/o la potenza viene dissipata (generata).
- Nel blocco di connessione l'energia non viene né accumulata, né dissipata.

Esempio: motore elettrico + giunto elastico/inerziale + ruota dentata + carico inerziale



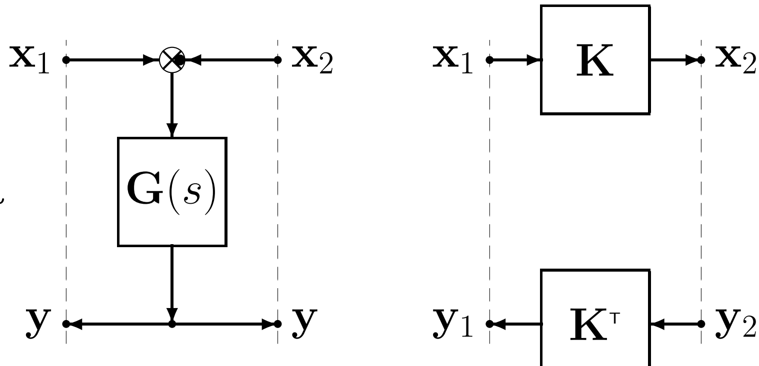
$V\,I_a$ $\quad E\,I_a$ $\quad C_m\,\omega_m$ $\quad C_g\,\omega_m$ $\quad C_g\,\omega_r$ $\quad C_e\,\omega_r$ $\quad F_r\,\dot{x}_1$ $\quad F_r\,\dot{x}_2$ $\quad C_{r2}\,\omega_r$ $\quad C_e\,\omega_r$

$R\,I_a^2$	/	$b'\,\omega_m^2$	/	$b_g\,\omega_r^2$	/	/	/	$b_r\,\omega_r^2$
$\frac{1}{2}L\,I_a^2$	/	$\frac{1}{2}J'\,\omega_m^2$	$f_g(\theta_g, g_g, k_g)$	$\frac{1}{2}J_g\,\omega_r^2$	/	$f_r(x, g_r, k_r)$	/	$\frac{1}{2}J_r\,\omega_r^2$

POG: caso multi-dimensionale

- Le variabili scalari x e y vengono sostituite da vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

$$\mathbf{G}^{-1}(s) = \mathbf{M}\, s + \mathbf{R}$$



Potenza che fluisce (P_f) :	$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$	$\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$	$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_1$	$\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_2$
potenza dissipata (P_d) :	$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\,\mathbf{y}$		0	
Energia accumulata (E_s) :	$\frac{1}{2}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{y}$		0	

- Il prodotto scalare $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ deve avere il significato fisico di una potenza.
- La matrice $\mathbf{G}(s)$ è sempre una matrice quadrata e simmetrica.
- La matrice $\mathbf{K}$ può anche essere una matrice rettangolare.
- Il blocco di connessione non dissipa né accumula energia, semplicemente "trasforma" le variabili di potenza del sistema da un campo energetico all'altro:

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_2) = (\mathbf{K}\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_2.$$

- Il blocco di elaborazione immagazzina energia e dissipa potenza.
- Per sistemi lineari, energia accumulata E_s e la potenza dissipata P_d sono forme quadratiche, rispettivamente, delle matrici $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{R}$.
- Energia accumulata:

$$E_s = \frac{1}{2}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{y}$$

- Potenza dissipata:

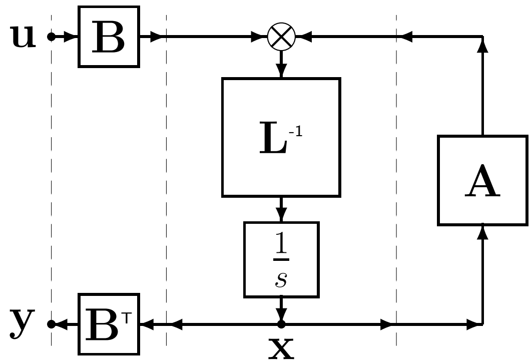
$$P_d = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\,\mathbf{y}.$$

Descrizione nello spazio degli stati

- Equazioni dinamiche di un sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \end{cases}$$

- Rappresentazione POG:

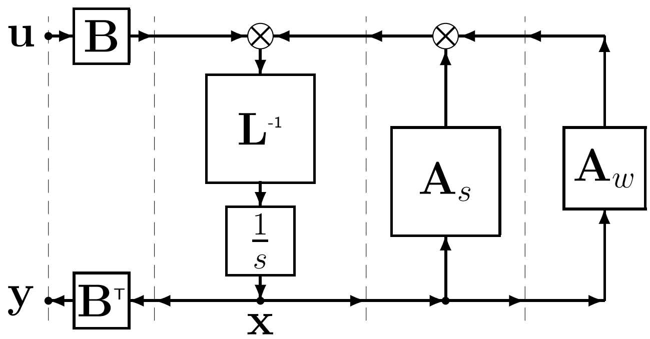


- La tipica forma dei sistemi descritti nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}. \end{cases}$$

- La matrice $\mathbf{A}$ può sempre essere espressa come somma di una matrice simmetrica e di una matrice emisimmetrica:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_w.$$



- Teorema: se la parte simmetrica $\mathbf{A}_s$ della matrice di sistema $\mathbf{A}$ è definita negativa, allora il moto libero ($\mathbf{u} = 0$) del sistema è asintoticamente stabile.

Trasformazioni di congruenza nello spazio degli stati

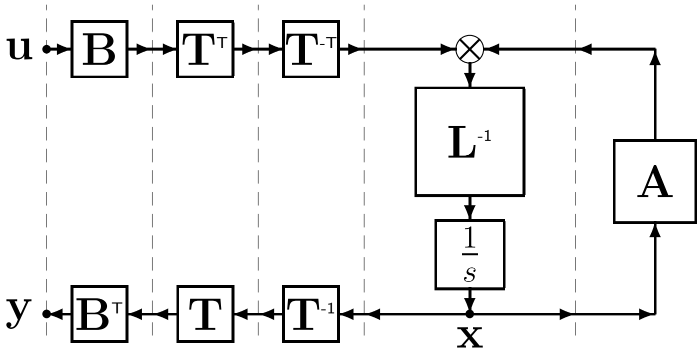
- Cambio di coordinate:

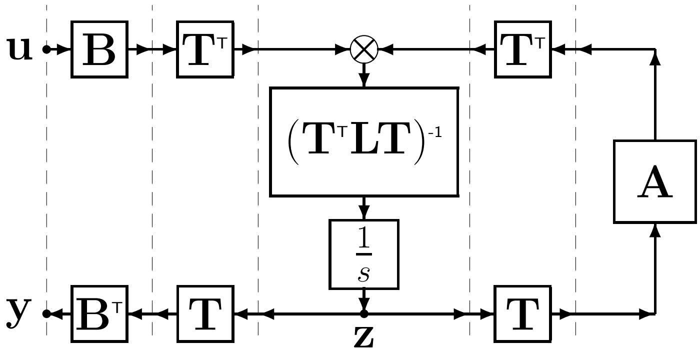
$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \qquad\qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}}$$

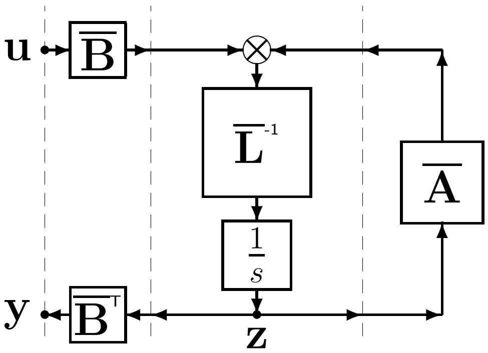
- Sistema trasformato:

$$\begin{cases} \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{L}\mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{T}\mathbf{z} \end{cases}$$

- Rappresentazione POG:

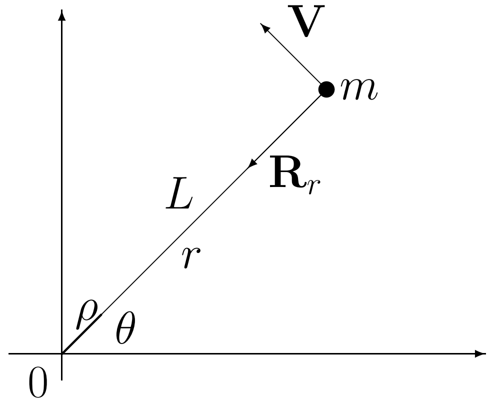




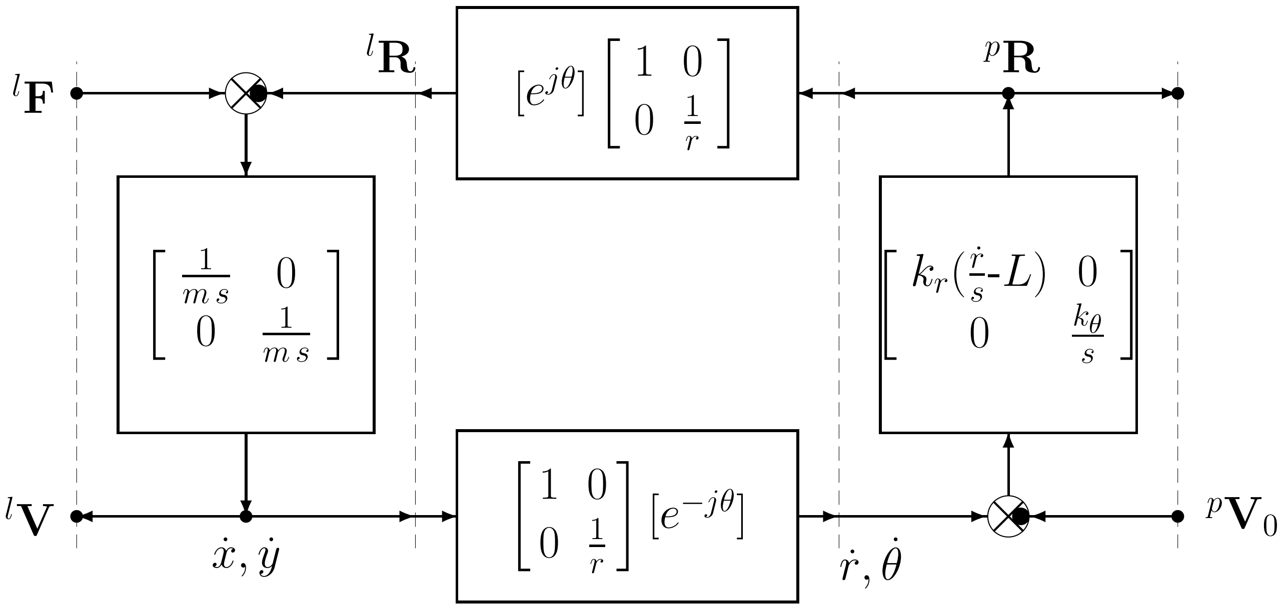


Dinamica nel piano di un punto di massa m

- Il sistema



- La rappresentazione POG:



dove

$$[e^{j\theta}] = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta.$$

- La matrice

$${}^p\mathbf{T}_l = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{r}\end{bmatrix}[e^{-j\theta}].$$

è la matrice di trasformazione dello spazio delle velocità lineari $(\dot{x}, \dot{y})$ nello spazio delle velocità polari $(\dot{r}, \dot{\theta})$.