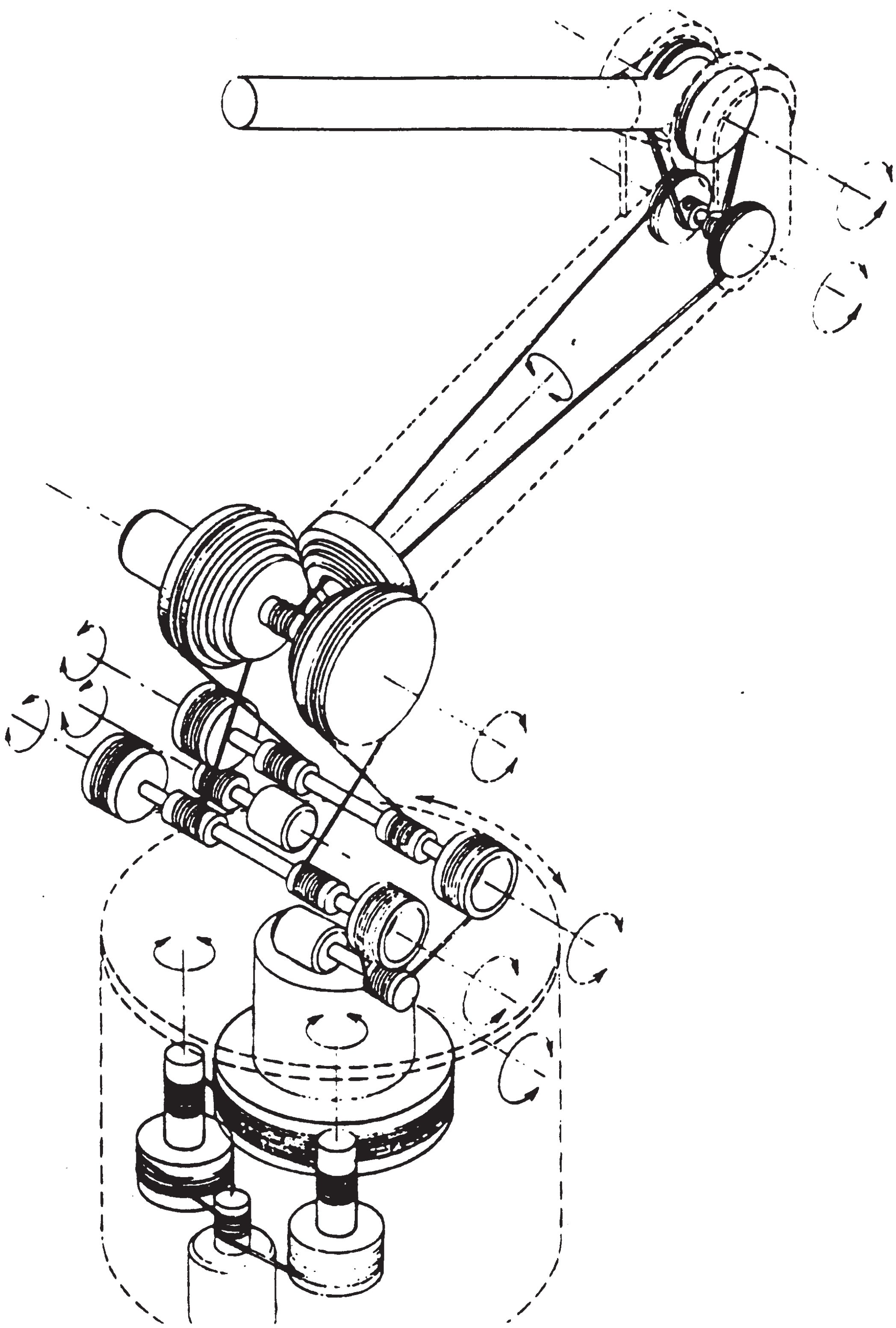
- Esempio: il sistema robotico Whole Arm Manipulator (WAM)



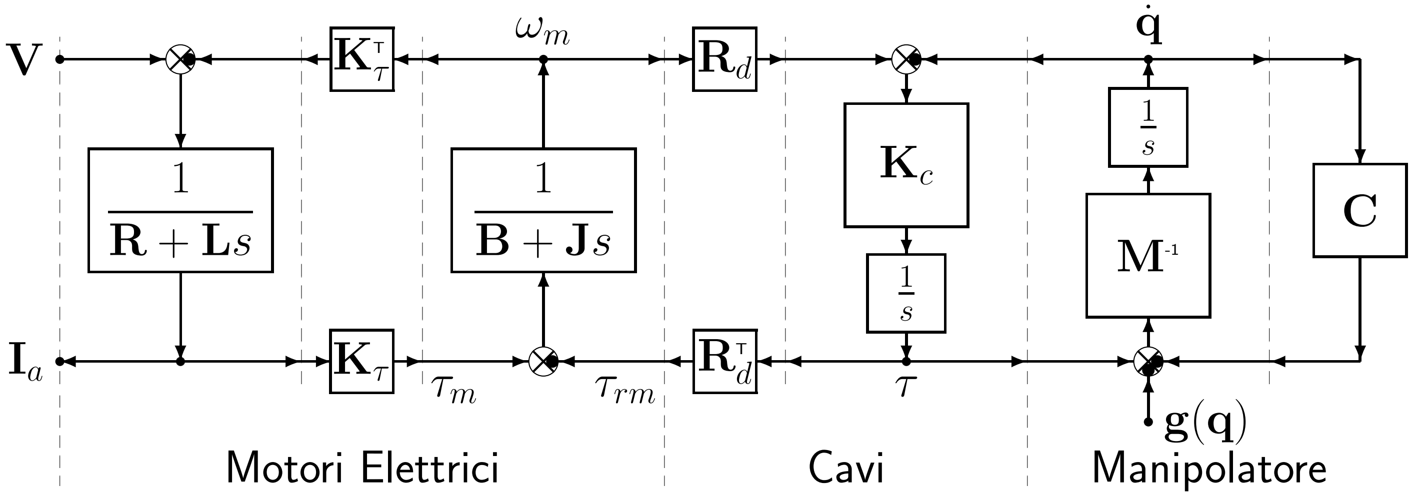
- Quattro motori elettrici movimentano un sistema robotico a quattro gradi di libertà. Le coppie dei motori vengono trasmesse ai giunti tramite un sistema di cavi che possiedono una propria elasticità residua.

Modello dinamico dell'intero sistema robotico

- Dinamica del manipolatore ad n gradi di libertà (n-link):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau$$

- Modello POG dell'intero sistema robotico:



- Equazioni dinamiche nello spazio degli stati:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}}^{\mathbf{P}} \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{\tau} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}^{\dot{\mathbf{x}}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{R} & -\mathbf{K}_\tau^{\mathsf{T}} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_\tau & -\mathbf{B} & -\mathbf{R}_d^{\mathsf{T}} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_d & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{C} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \omega_m \\ \tau \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{g} \end{bmatrix}}^{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}.$$

- La matrice $\mathbf{P}$ è simmetrica, definita positiva e rappresenta l'energia accumulata:

$$E_s = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}$$

- Le dinamiche associate all'elasticità dei cavi di trasmissione sono spesso trascurabili. In questi casi sarebbe utile poter ottenere il modello "ridotto".

- Quando $\mathbf{K}_c^{-1} \to 0$, le variabili di stato ω e $\dot{\mathbf{q}}$ risultano legate dalla seguente equazione algebrica:

$$\mathbf{R}_d\,\omega_m - \dot{\mathbf{q}} = 0, \qquad \to \qquad \omega_m = \mathbf{R}_d^{-1}\dot{\mathbf{q}}$$

- Quando la rigidità $\mathbf{K}_c \to \infty$, le variabili ω_m e τ possono essere eliminate dal modello utilizzando la seguente "trasformazione di congruenza":

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \omega_m \\ \tau \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_d^{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\,\mathbf{z}$$

- Le equazioni dinamiche del sistema ridotto sono le seguenti:

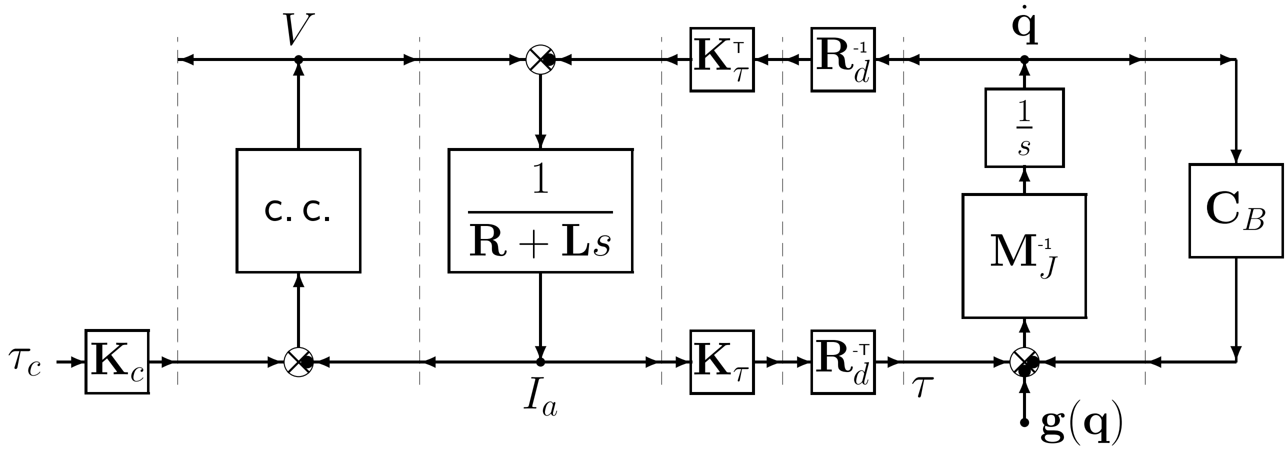
$$\bar{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{G}}$$

dove $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{G}$. In forma espansa si ha che:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{J}\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & -\mathbf{K}_\tau^{\mathsf{T}}\mathbf{R}_d^{-1} \\ \mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{K}_\tau & -\mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{R}_d^{-1} - \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\mathbf{g} \end{bmatrix}$$

- Si noti che il momento di inerzia $\mathbf{J}$ dei motori elettrici è stato trasformato e sommato alla matrice di inerzia $\mathbf{M}$ del manipolatore: $\mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{J}\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{M}$.

- Sistema dinamico ridotto con l'aggiunta di un controllore di coppia (c.c.):



dove per brevità di notazione si è indicato:

$$\mathbf{M}_J = \mathbf{M}(\mathbf{q}) + \mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{J}\mathbf{R}_d^{-1}, \qquad \mathbf{C}_B = \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{R}_d^{-1}.$$

- Se il controllore garantisce un inseguimento perfetto della coppia si ha:

$$\mathbf{K}_c = [\,\mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{K}_\tau\,]^{-1} \quad \to \quad \tau = \mathbf{R}_d^{-\mathsf{T}}\mathbf{K}_\tau\mathbf{I}_a = \tau_c$$

cioè "scompare" la dinamica elettrica più interna al sistema.

- Considerando $\tau = \tau_c$ come nuovo ingresso, si ottiene:

$$\mathbf{M}_J(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_B(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau$$