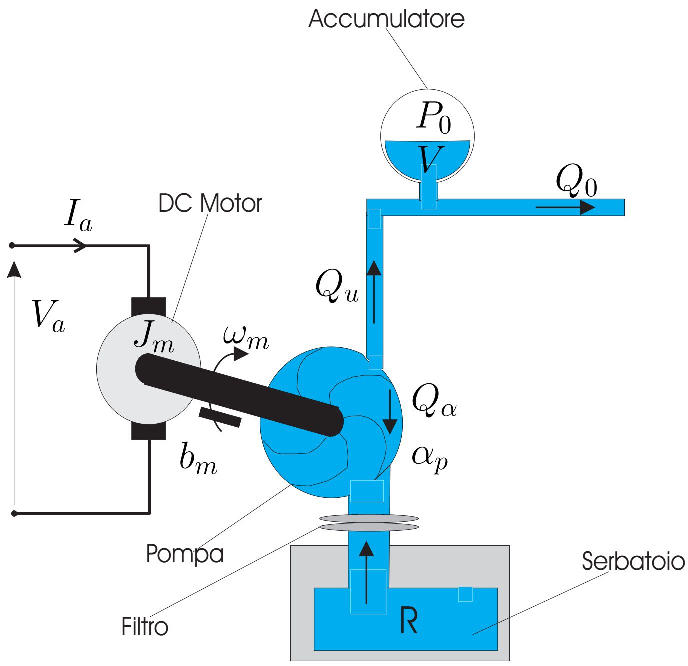
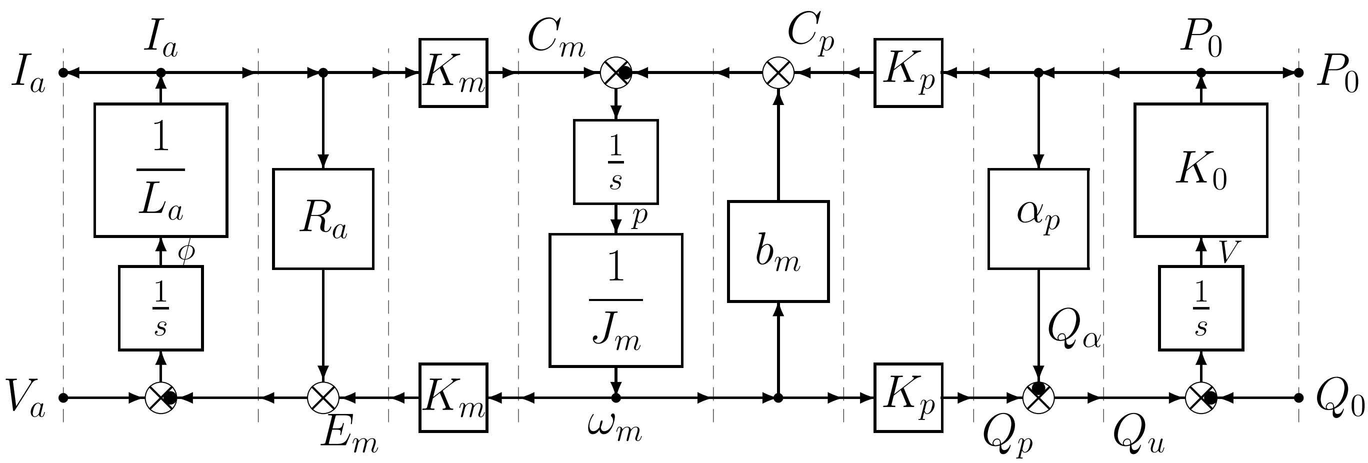
Pompa ad ingranaggi

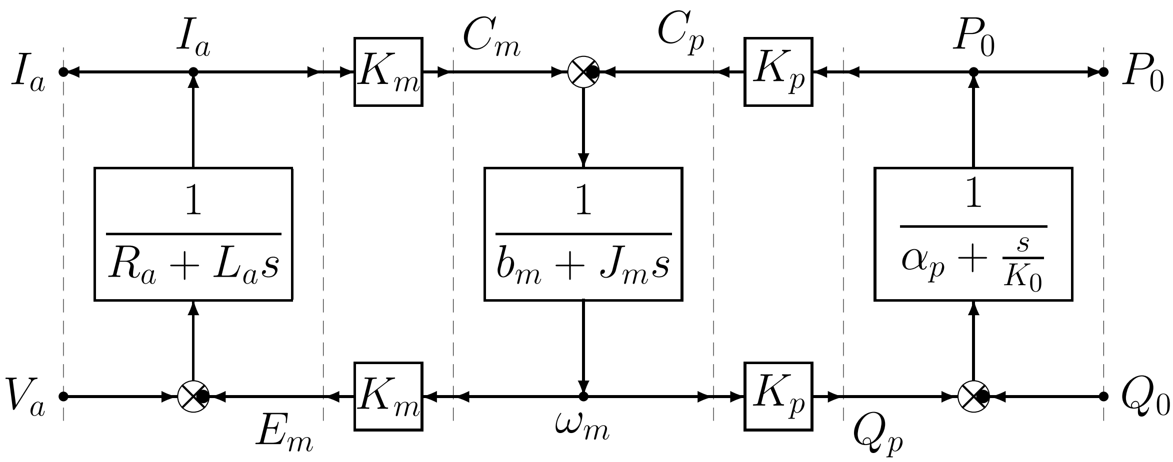
Si consideri il sistema elettro-meccanico mostrato a fianco costituito da un motore elettrico in corrente continua (L_a, R_a, J_m, b_m, K_m) collegato ad una pompa ad ingranaggi (K_p, α_p) e ad un accumulatore idraulico (K_0). Si trascuri la presenza del filtro e si consideri alche la parte elettrica del motore.



Un possibile modello P.O.G. del sistema elettro-meccanico è il seguente:



Lo stesso schema può essere disegnato anche in forma "compatta":



Il vettore di stato da considerare è il seguente:

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{ccc} I_a & \omega_m & V_0 \end{array}\right]^T$$

Le matrici $\mathbf{L}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_a & 0 & 0 \\ 0 & J_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_a & -K_m & 0 \\ K_m & -b_m & -K_p \\ 0 & K_p & -\alpha_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il modello dinamico del sistema nello spazio degli stati è quindi il seguente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_a & 0 & 0 \\ 0 & J_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{P}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_a & -K_m & 0 \\ K_m & -b_m & -K_p \\ 0 & K_p & -\alpha_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ \omega_m \\ P_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ Q_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

oppure, in modo equivalente, il seguente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{P}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} & 0 \\ \frac{K_m}{J_m} & -\frac{b_m}{J_m} & -\frac{K_p}{J_m} \\ 0 & K_p K_0 & -\alpha_p K_0 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ \omega_m \\ P_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -K_0 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ Q_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso V_a all'uscita P_0 si calcola facilmente utilizzando la formula di Mason:

$$G(s) = \frac{P_0(s)}{V_a(s)} = \frac{K_0 K_m K_p}{a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_3 &= J_m L_a \\ a_2 &= b_m L_a + \alpha_p J_m K_0 L_a + J_m R_a \\ a_1 &= K_m^2 + \alpha_p b_m K_0\, L_a + K_0 K_p^2 L_a + b_m R_a + \alpha_p J_m K_0 R_a \\ a_0 &= K_0(\alpha_p K_m^2 + \alpha_p b_m R_a + K_p^2 R_a) \end{aligned}$$