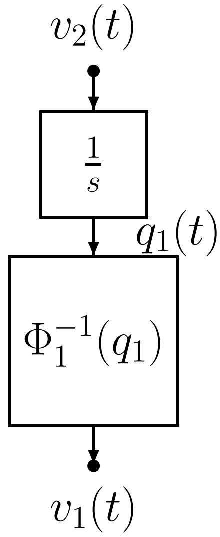
Modellistica dinamica di sistemi fisici

- Nella realtà fisica esistono vari ambiti energetici, per esempio:
  - meccanico (traslazionale e rotazionale)
  - elettrico-magnetico
  - idraulico
  - termico ($\simeq$)
- Pur essendo molto diversi fra loro, questi ambiti energetici hanno una struttura dinamica molto simile. Infatti, ogni ambito energetico è essenzialmente caratterizzato da:
  - **2 elementi "dinamici"** $\mathcal{D}_1$ **e** $\mathcal{D}_2$ che accumulano energia;
  - **1 elemento "statico"** $\mathcal{R}$ che dissipa (o genera) energia;
  - **2 variabili "energia"** $q_1(t)$ **e** $q_2(t)$ che caratterizzano completamente l'energia accumulata nei due elementi dinamici;
  - **2 variabili "di potenza"** $v_1(t)$ **e** $v_2(t)$ che permettono all'energia di spostarsi all'interno del sistema dinamico;
- Il prodotto $p(t) = v_1(t)v_2(t)$ ha il significato fisico di "potenza istantanea" che attraversa la "porta energetica" caratterizzata dalle 2 variabili di potenza $v_1(t)$ e $v_2(t)$.
- Gli elementi dinamici $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono "duali" fra di loro: le loro equazioni dinamiche differiscono solamente per una inversione dei pedici "1" e "2" che le caratterizzano.

- L'elemento dinamico $\mathcal{D}_1$ è caratterizzato:



  1) dalla variabile interna $q_1(t)$;
  2) dalla variabile di ingresso $v_2(t)$;
  3) dalla variabile di uscita $v_1(t)$;
  4) da una *relazione costitutiva* $\Phi_1(v_1)$ che lega la variabile interna q_1 alla variabile di uscita v_1:

$$q_1 = \Phi_1(v_1) \qquad \leftrightarrow \qquad v_1 = \Phi_1^{-1}(q_1)$$

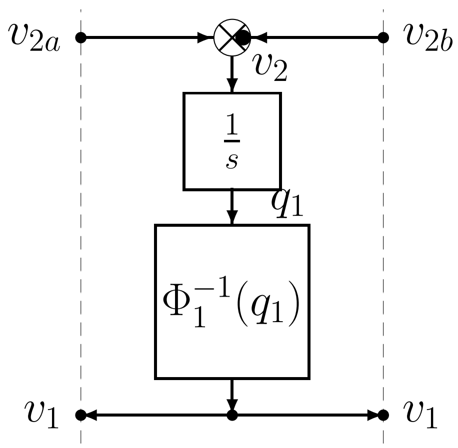
  5) da un'equazione differenziale che lega la variabile interna q_1 alla variabile di ingresso v_2:

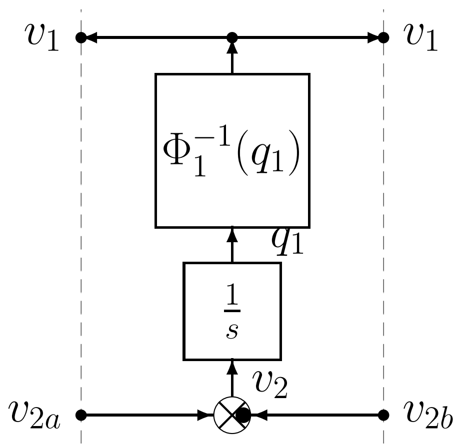
$$\frac{dq_1}{dt} = v_2 \qquad \leftrightarrow \qquad dq_1 = v_2\, dt$$

  6) da una funzione di energia $E_1(q_1)$ che è funzione della sola variabile interna q_1:

$$E_1 = \int_0^t p(t)\, dt = \int_0^t v_1\, v_2\, dt = \int_0^{q_1} \Phi_1^{-1}(q_1)\, dq_1 = E_1(q_1)$$

- Per mettere in evidenza gli scambi di potenza con gli altri elementi fisici, spesso verrà utilizzata una delle due seguenti rappresentazioni grafiche:



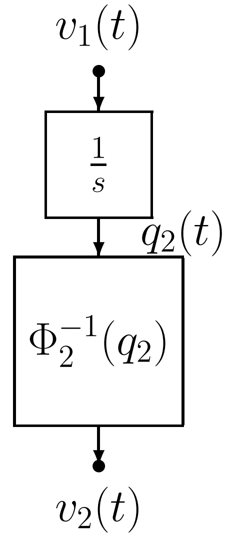


In questo caso la potenza entrante è $p_e(t) = v_{2a}\, v_1$ e la potenza uscente è $p_u(t) = v_{2b}\, v_1$.

- L'elemento dinamico $\mathcal{D}_2$ è caratterizzato:

  1) dalla variabile interna $q_2(t)$;
  2) dalla variabile di ingresso $v_1(t)$;
  3) dalla variabile di uscita $v_2(t)$;
  4) da una *relazione costitutiva* $\Phi_2(v_2)$ che lega la variabile interna q_2 alla variabile di uscita v_2:

$$q_2 = \Phi_2(v_2) \qquad \leftrightarrow \qquad v_2 = \Phi_2^{-1}(q_2)$$



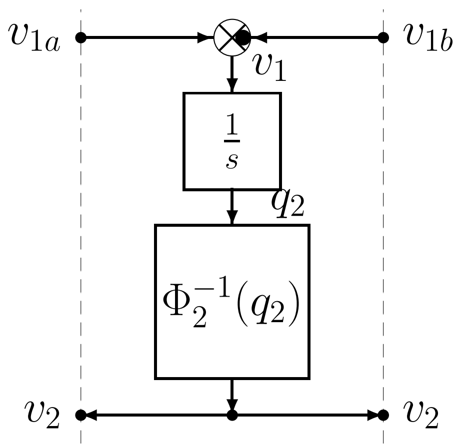
  5) da un'equazione differenziale che lega la variabile interna q_2 alla variabile di ingresso v_1:

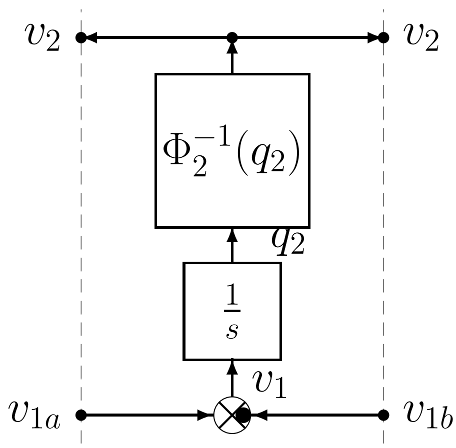
$$\frac{dq_2}{dt} = v_1 \qquad \leftrightarrow \qquad dq_2 = v_1\,dt$$

  6) da una funzione di energia $E_2(q_2)$ che è funzione della sola variabile interna q_2:

$$E_2 = \int_0^t p(t)\,dt = \int_0^t v_1\,v_2\,dt = \int_0^{q_2} \Phi_2^{-1}(q_2)\,dq_2 = E_2(q_2)$$

- Per mettere in evidenza gli scambi di potenza con gli altri elementi fisici, spesso verrà utilizzata una delle due seguenti rappresentazioni grafiche:





In questo caso la potenza entrante è $p_e(t) = v_{2a}\,v_1$ e la potenza uscente è $p_u(t) = v_{2b}\,v_1$.

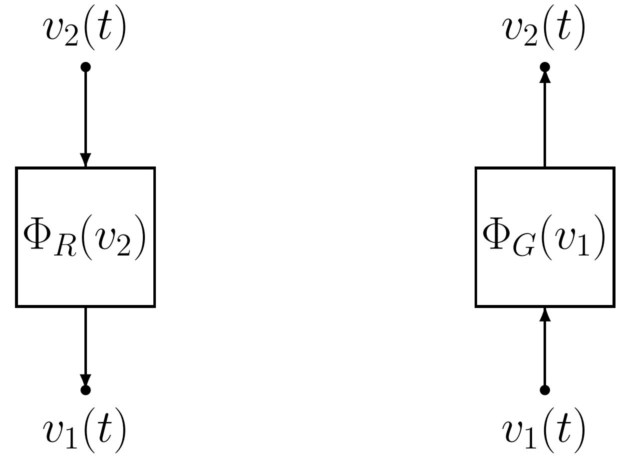
- <u>L'elemento statico $\mathcal{R}$</u> è caratterizzato solamente da una *relazione costitutiva* Φ_R che lega fra loro le variabili di potenza v_1 e v_2:

$$v_1 = \Phi_R(v_2) \qquad \leftrightarrow \qquad v_2 = \Phi_G(v_1)$$

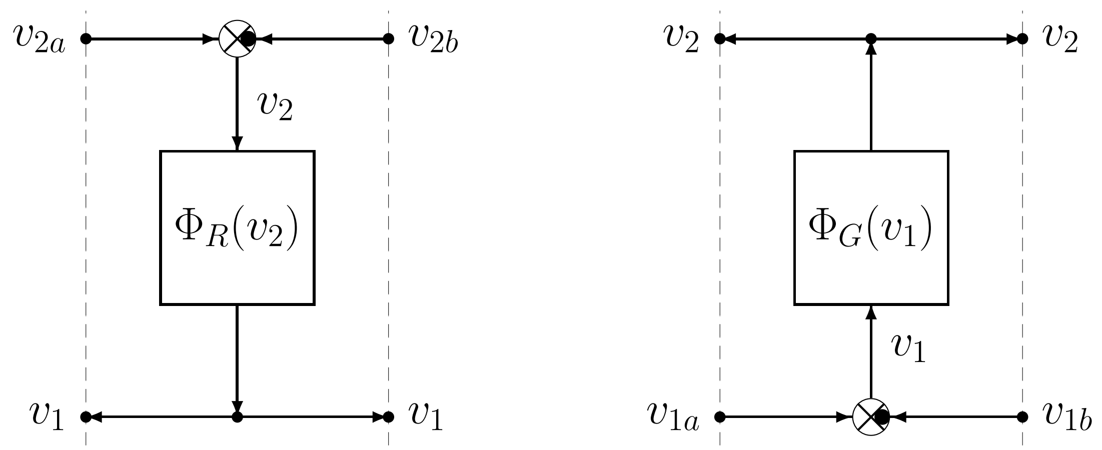
Le funzioni $\Phi_R(\cdot)$ e $\Phi_G(\cdot)$ sono una l'inverso dell'altra:

$$\Phi_G(v_1) = \Phi_R^{-1}(v_1) \qquad \leftrightarrow \qquad \Phi_R(v_2) = \Phi_G^{-1}(v_2)$$

Questo elemento può essere orientato in entrambi i modi:



- Per mettere in evidenza gli scambi di potenza con gli altri elementi fisici, spesso verrà utilizzata una delle due seguenti rappresentazioni grafiche:



- La potenza istantanea $p(t)$ dissipata (o generata) dall'elemento statico $\mathcal{R}$ è data semplicemente dal prodotto delle due variabili di potenza:

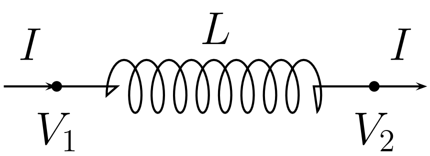
$$p(t) = v_1(t)v_2(t) = \Phi_R(v_2)\, v_2 = v_1\, \Phi_R^{-1}(v_1)$$

- Ambito energetico: **elettromagnetico**

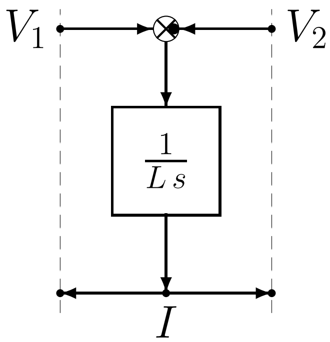
	Simboli	Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$ q_1 v_1	C Capacità Q carica V tensione	$Q = \Phi_C(V)$	$Q = C\,V$	$\frac{d\,Q}{dt} = I$
$\mathcal{D}_2$ q_2 v_2	L Induttanza ϕ flusso I corrente	$\phi = \Phi_L(I)$	$\phi = L\,I$	$\frac{d\,\phi}{dt} = V$
$\mathcal{R}$	R Resistenza	$V = \Phi_R(I)$	$V = R\,I$	

Elementi dinamici lineari

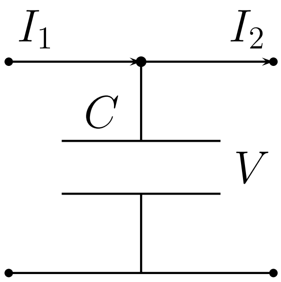
- Induttanza ($\phi = L\,I$):



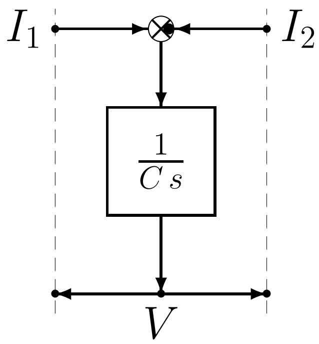
$$\frac{d}{dt}[L\,I] = V_1 - V_2$$



- Capacità ($Q = C\,V$):



$$\frac{d}{dt}[C\,V] = I_1 - I_2$$



- Ambito energetico: **meccanico traslazionale**:

	Simboli	Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$ q_1 v_1	M Massa P quantità di moto $\dot{x}$ velocità	$P = \Phi_M(\dot{x})$	$P = M\,\dot{x}$	$\dfrac{d\,P}{dt} = F$
$\mathcal{D}_2$ q_2 v_2	E Elasticità x spostamento F forza	$x = \Phi_E(F)$	$x = E\,F$	$\dfrac{d\,x}{dt} = \dot{x}$
$\mathcal{R}$	b Dissipatore	$F = \Phi_b(\dot{x})$	$F = b\,\dot{x}$	

- Ambito energetico: **meccanico rotazionale**:

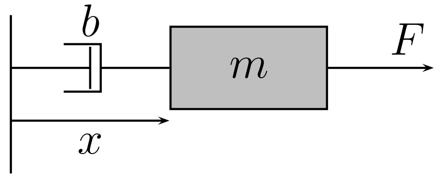
	Simboli	Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$ q_1 v_1	J Inerzia P momento ang. ω velocità ang.	$P = \Phi_J(\omega)$	$P = J\,\omega$	$\dfrac{d\,P}{dt} = \tau$
$\mathcal{D}_2$ q_2 v_2	E Elasticità tors. θ spostamento ang. τ coppia	$\theta = \Phi_E(\tau)$	$\theta = E\,\tau$	$\dfrac{d\,\theta}{dt} = \omega$
$\mathcal{R}$	b Dissipatore	$\tau = \Phi_b(\omega)$	$\tau = b\,\omega$	

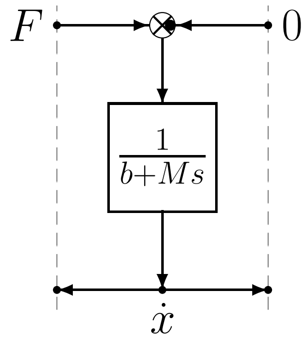
- Ambito energetico: **idraulico**

	Simboli	Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$ q_1 v_1	C_I Capacità idrau. V volume P pressione	$V = \Phi_C(P)$	$V = C_I\,P$	$\dfrac{dV}{dt} = Q$
$\mathcal{D}_2$ q_2 v_2	L_I Induttanza idrau. ϕ_I flusso idrau. Q portata volumetrica	$\phi_I = \Phi_L(Q)$	$\phi_I = L_I\,Q$	$\dfrac{d\,\phi_I}{dt} = P$
$\mathcal{R}$	R Resistenza idrau.	$P = \Phi_R(Q)$	$P = R_I\,Q$	

Esempi

- Sistema massa-smorzatore.



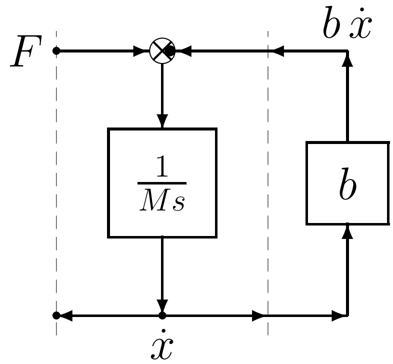


- Infatti, dal modello dinamico si ricava:

$$M\frac{d\dot{x}}{d\,t} = F - b\,\dot{x}$$

da cui

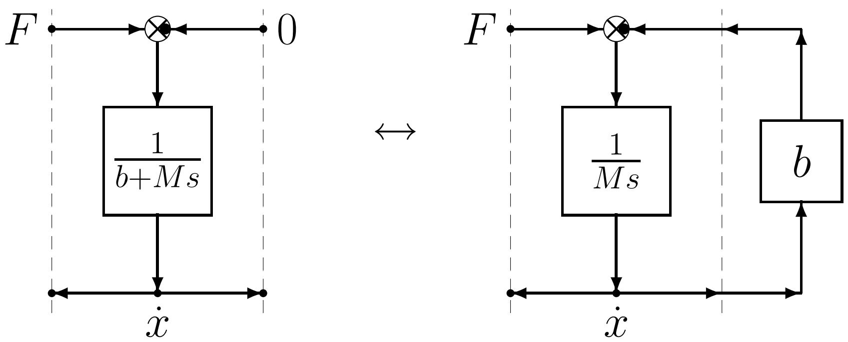
$$\dot{X}(s) = \frac{1}{M\,s + b}\,F(s)$$



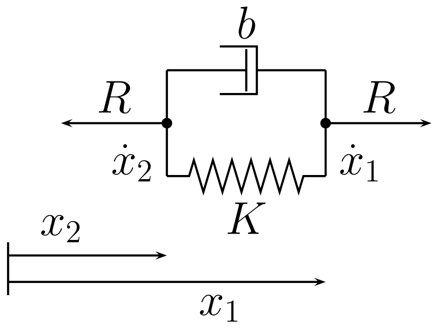
- Oppure applicando la formula di Mason si ha che:

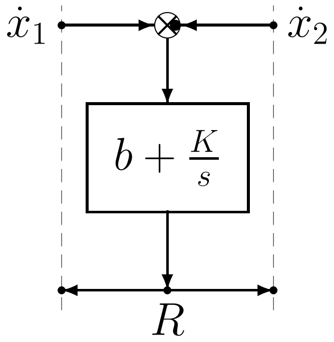
$$G(s) = \frac{\dot{X}(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{Ms}}{1 + \frac{b}{Ms}} = \frac{1}{b + Ms}$$

- Quindi i due seguenti schemi sono equivalenti:



- Sistema molla-smorzatore (parallelo):

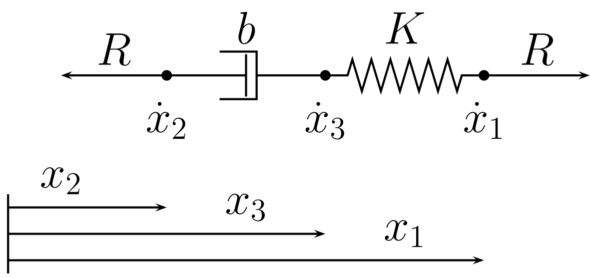


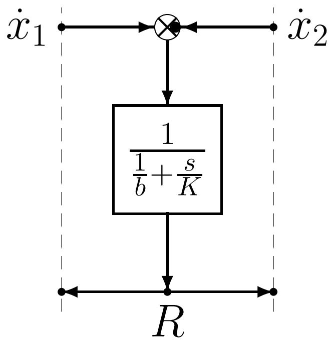


- Infatti, in questo caso, il modello dinamico è:

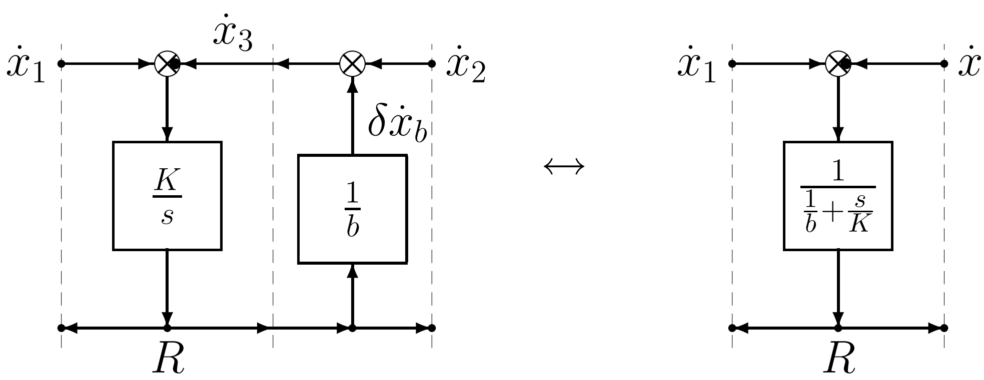
$$R = K(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad \rightarrow \quad R(s) = \left(\frac{K}{s} + b\right)[\dot{X}_1(s) - \dot{X}_2(s)]$$

- Sistema molla-smorzatore (serie):



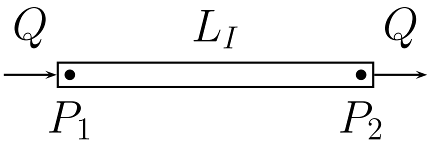


- Infatti, i due seguenti schemi sono equivalenti:

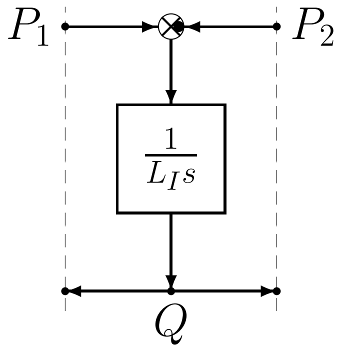


Idraulica: elementi dinamici lineari

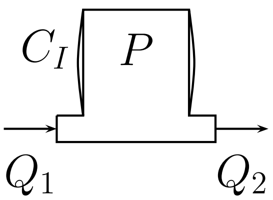
- Induttanza idraulica:



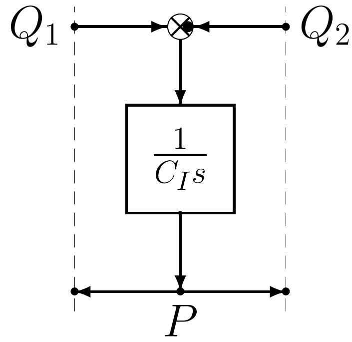
$$\frac{d}{dt}[L_I Q] = P_1 - P_2$$



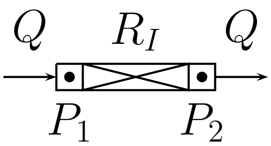
- Capacità idraulica:



$$\frac{d}{dt}[C_I P] = Q_1 - Q_2$$



- Resistenza idraulica:



$$P_1 - P_2 = R_I Q$$

oppure

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R_I}$$