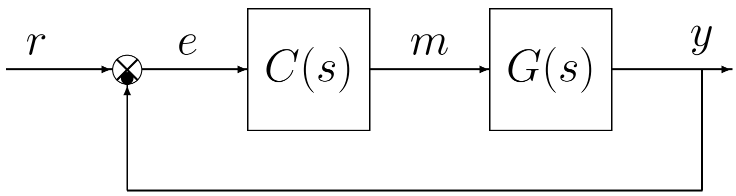
Progetto delle reti correttrici

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



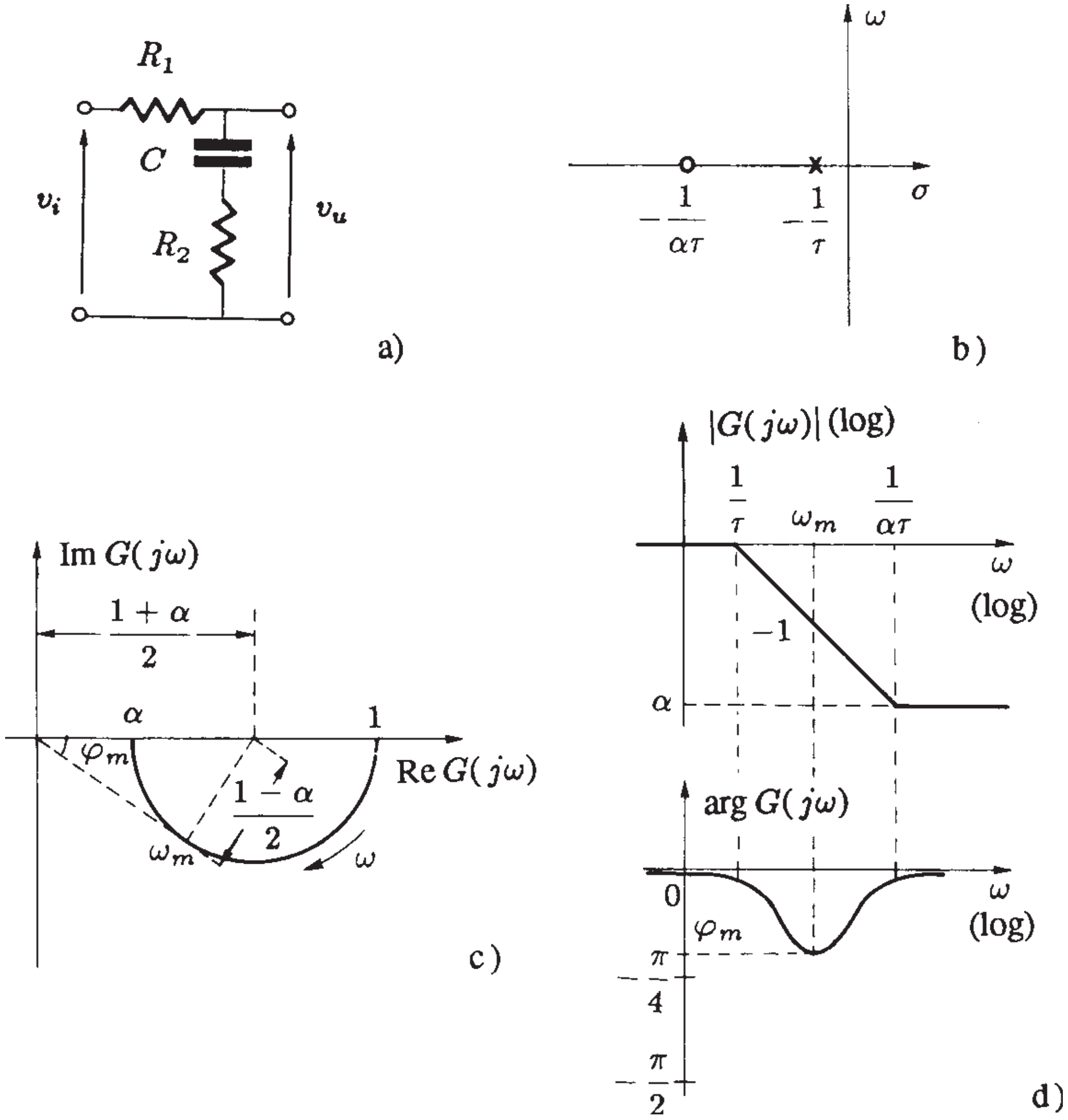
- I dati di specifica sui quali si basa il progetto del controllore $C(s)$ riguardano:
  - la **precisione**: gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di disturbi e di variazioni parametriche;
  - la **stabilità** ("comportamento dinamico soddisfacente"): massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti;
  - **velocità di risposta**: il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante.
- Poiché il progetto del sistema di controllo si effettua normalmente considerando la risposta armonica, **occorre convertire i parametri "temporali" in parametri "frequenziali"**: tale operazione non è in generale possibile in modo rigoroso e tipicamente si basa sull'ipotesi che il sistema in retroazione si comporti approssimativamente come un sistema del secondo ordine a poli dominanti.
- **Il primo parametro che si determina** in fase di progetto, **è la costante di guadagno**: guadagno statico nei sistemi di tipo 0, costante di velocità nei sistemi di tipo 1.
- **Successivamente si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche di stabilità e di velocità di risposta.** Se tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare una opportuna **rete correttrice** che modifichi le caratteristiche dinamiche del sistema.

Rete ritardatrice

La funzione di trasferimento di una **rete ritardatrice** è:

$$G(s) = \frac{1+\alpha\,\tau\,s}{1+\tau\,s} \qquad \text{oppure} \qquad G(s) = \frac{1+\tau_1\,s}{1+\tau_2\,s}$$

dove $\alpha < 1$ oppure $\tau_1 < \tau_2$. Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



La rete attenua il modulo e ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. Il massimo ritardo di fase φ_m si ottiene in corrispondenza della pulsazione ω_m, media geometrica delle pulsazioni $1/\tau$ e $1/(\alpha\,\tau)$:

$$\varphi_m = -\text{arcsen}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \qquad \omega_m = \frac{1}{\tau\,\sqrt{\alpha}}$$

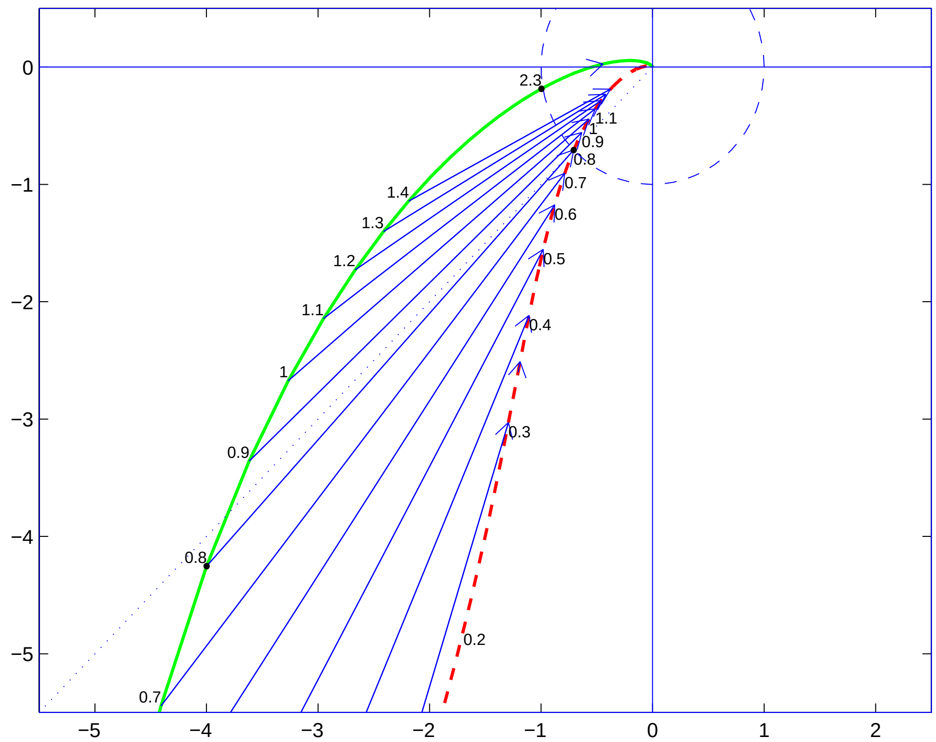
Azione stabilizzante di una rete ritardatrice

- Una rete ritardatrice **attenua e sfasa** a tutte la pulsazioni

$$C(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} \qquad \text{con} \qquad \tau_1 < \tau_2$$

- Azione stabilizzante di una rete ritardatrice è essenzialmente data dall'attenuazione alle alte pulsazioni.

- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



- L'attenuazione alle alte frequenze ha come effetto negativo la riduzione della banda passante del sistema.

- Nell'esempio riportato sopra, il sistema senza rete correttrice ha larghezza di banda $\omega_f = 2.3$, quello con rete correttrice $\omega_f = 0.8$. Il sistema retroazionato avrà un tempo di salita più lungo.

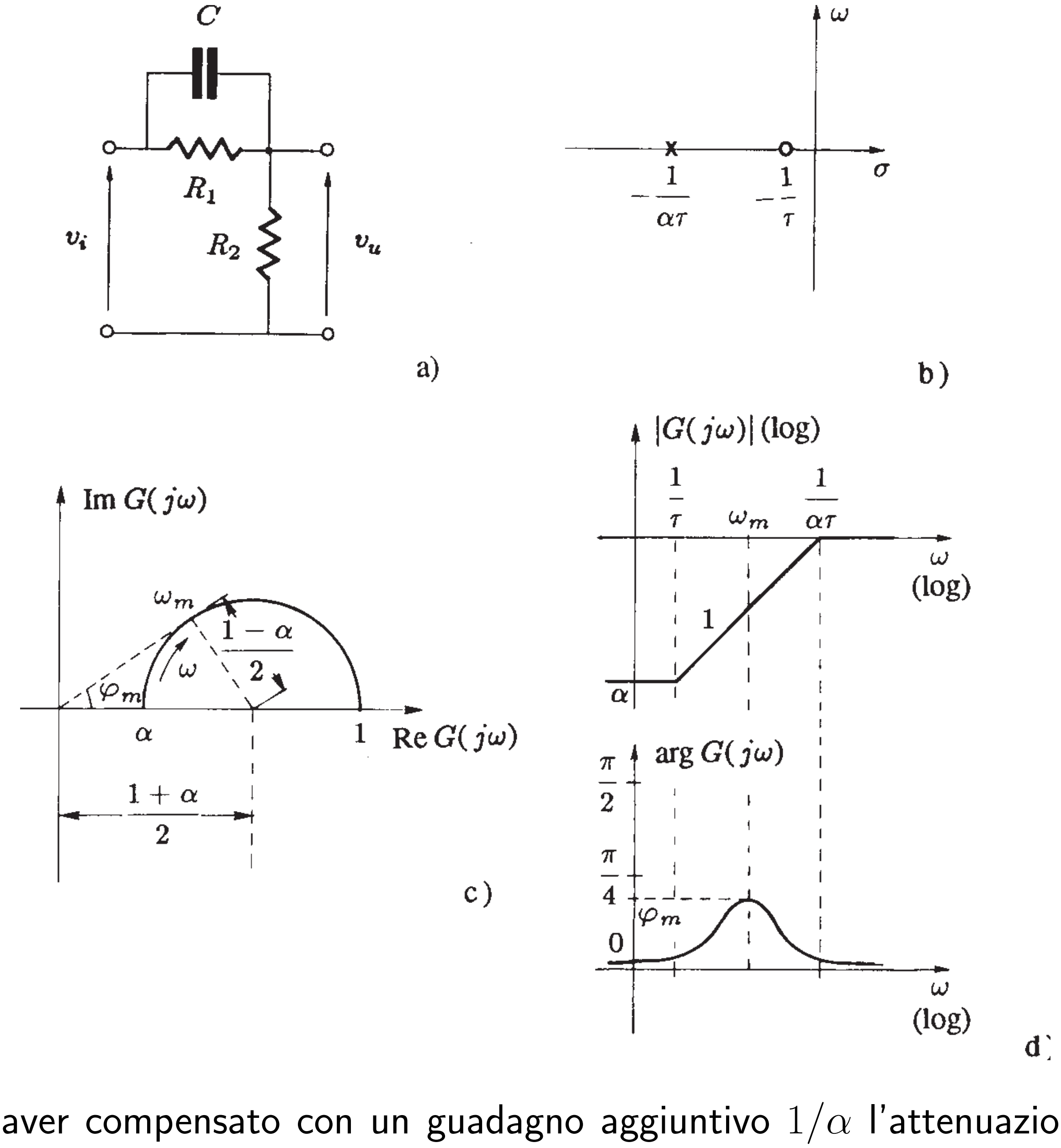
- Un vantaggio della rete ritardatrice rispetto a quella anticipatrice è la sua capacità di poter stabilizzare anche sistemi con margini di fase fortemente negativi.

Rete anticipatrice

La funzione di trasferimento di una **rete anticipatrice** è:

$$G(s) = \alpha \, \frac{1 + \tau\, s}{1 + \alpha\, \tau\, s} \qquad \text{oppure} \qquad G(s) = \alpha \, \frac{1 + \tau_1\, s}{1 + \tau_2\, s}$$

dove $\alpha < 1$ oppure $\tau_1 > \tau_2$. Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



Dopo aver compensato con un guadagno aggiuntivo $1/\alpha$ l'attenuazione α a basse frequenze, si ottiene una rete che **amplifica il modulo e anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite.** Il massimo anticipo di fase φ_m si ottiene in corrispondenza della pulsazione ω_m:

$$\varphi_m = \text{arcsen}\, \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \qquad \omega_m = \frac{1}{\tau\, \sqrt{\alpha}}$$

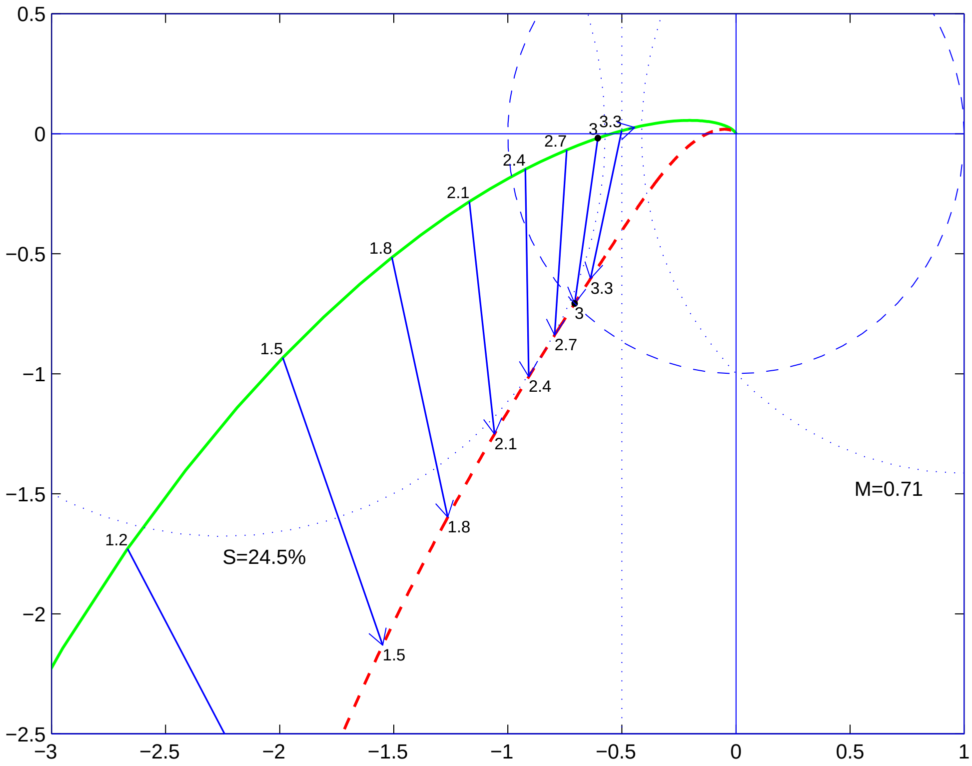
Azione stabilizzante di una rete anticipatrice

- Una rete anticipatrice amplifica e anticipa a tutte la pulsazioni

$$C(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} \qquad \text{con} \qquad \tau_1 > \tau_2$$

- Azione stabilizzante di una rete anticipatrice è essenzialmente data dall'anticipo di fase.

- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



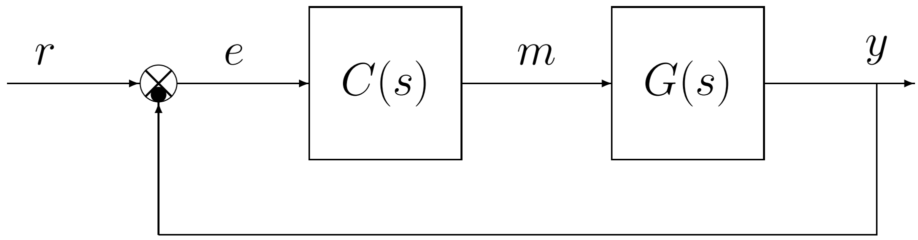
- L'azione amplificatrice ha come effetto positivo l'allargamento della banda passante.

- Nell'esempio riportato sopra, il sistema senza rete correttrice ha larghezza di banda $\omega_f = 2.3$, quello con rete correttrice $\omega_f = 3$.

- Il massimo anticipo di fase φ_m che può essere fornito da una rete anticipatrice è $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$, per cui una rete anticipatrice può essere utilizzata solamente per migliorare il transitorio di sistemi già stabili o per stabilizzare sistemi con margini di fase negativi ma piccoli.

Sintesi di reti correttrici: formule di inversione

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove $G(s)$ è il sistema da controllare e $C(s)$ è un'opportuna rete correttrice aventi la seguente struttura:

$$\boxed{C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}}$$

- Si ha una rete <u>anticipatrice</u> quando $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \qquad \text{dove} \qquad \tau = \tau_1, \quad \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1$$

- Si ha una rete <u>ritardatrice</u> quando $\tau_1 < \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \qquad \text{dove} \qquad \tau = \tau_2, \quad \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} < 1$$

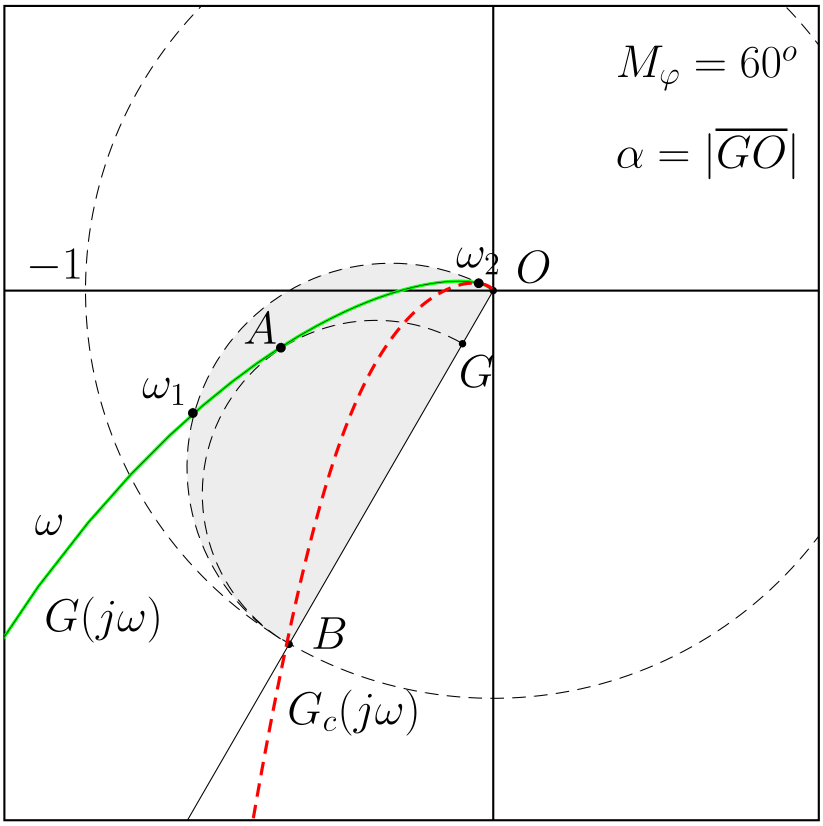
- Le specifiche dinamiche relative ad un sistema retroazionato vengono date in termini di margine di fase M_φ e di margine di ampiezza M_α.

- I parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttrice che introduce una amplificazione M ed un anticipo di fase φ in corrispondenza della pulsazione ω si determinano utilizzano le seguenti <u>*formule di inversione*</u>:

$$\boxed{\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\sin\varphi}}$$

Sintesi sul piano di Nyquist

a) Sintesi di una rete anticipatrice. Specifica: margine di fase $M_\varphi = 60^o$.



- Sistema $G(s)$ e rete correttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}, \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{(1+0.806s)}{(1+0.117s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \qquad \rightarrow \qquad M_A = 0.538 \qquad \varphi_A = 194.9^o$$

nel punto B

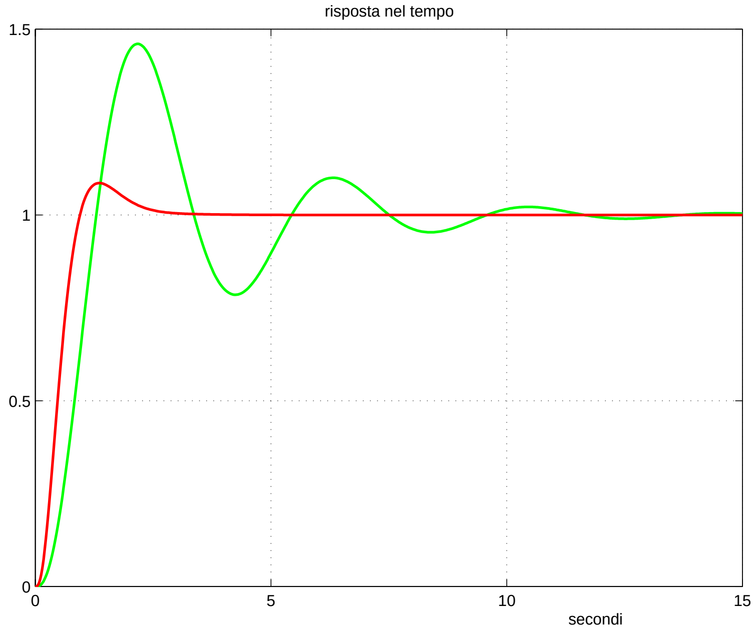
$$B = e^{j(\pi + M_\varphi)} \qquad \rightarrow \qquad M_B = 1, \qquad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^o$$

la rete anticipatrice deve amplificare e anticipare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A} = 1.8587, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 45.1^o$$

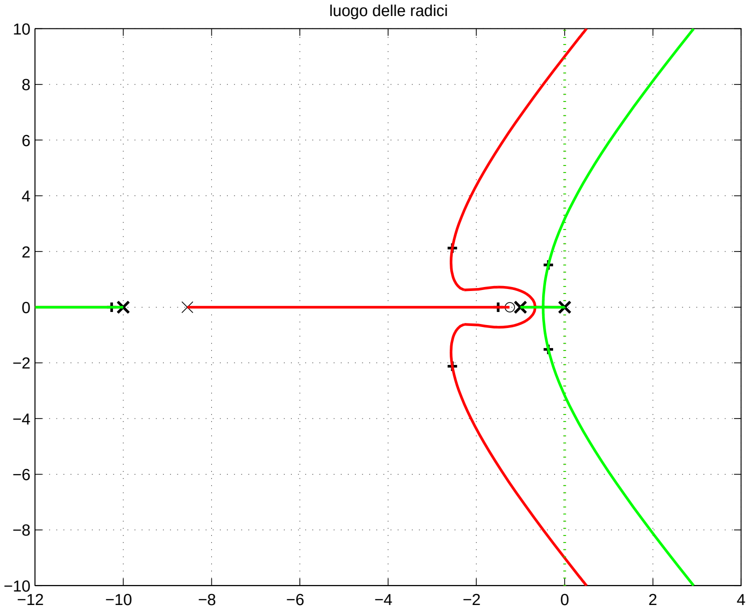
- Sostituendo i parametri M, φ e $\omega_A = 2.02$ nelle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 0.806$ e $\tau_2 = 0.117$.

- Risposte temporali dei sistemi $G(s)$ e $C(s)G(s)$ retroazionati:



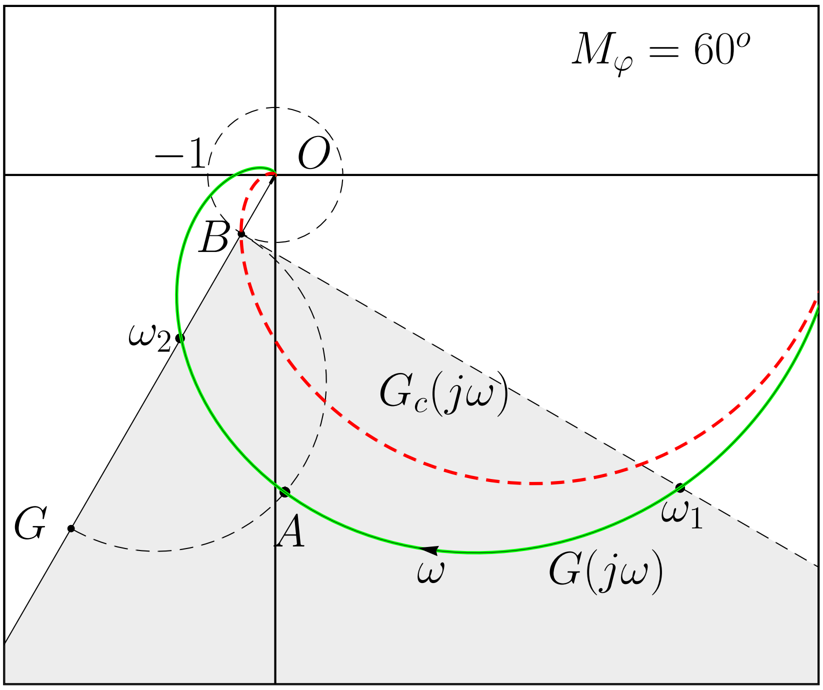
L'utilizzo di una rete anticipatrice ha migliorato sia il transitorio (diminuendo la sovraelongazione) che la prontezza del sistema (il tempo di salita è più basso).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete anticipatrice ha sensibilmente spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato.

b) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di fase: $M_\varphi = 60^o$.



- Sistema $G(s)$ e rete correttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{(1+1.04s)}{(1+6.25s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 4.672, \quad \varphi_A = 271.82^o$$

nel punto B

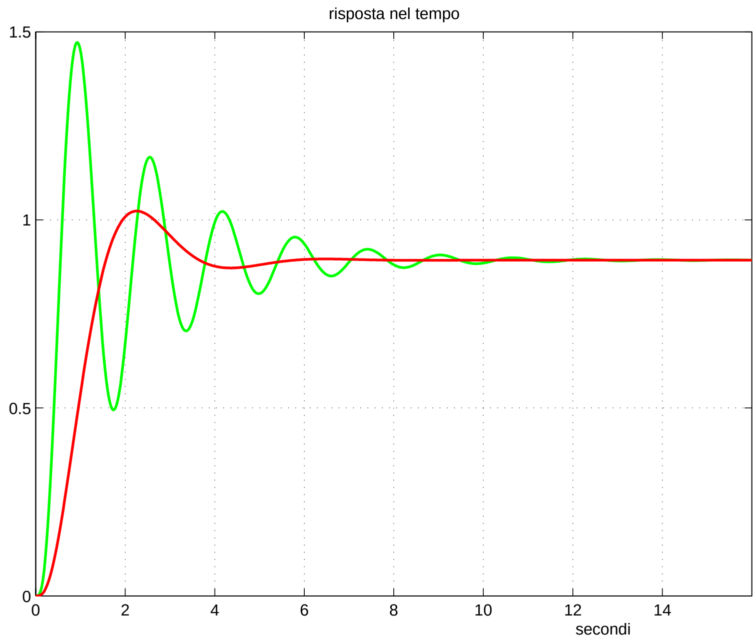
$$B = e^{j(\pi + M_\varphi)} \qquad \rightarrow \qquad M_B = 1, \qquad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^o$$

la rete correttrice deve attenuare e ritardare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A} = 0.214, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -31.82^o$$

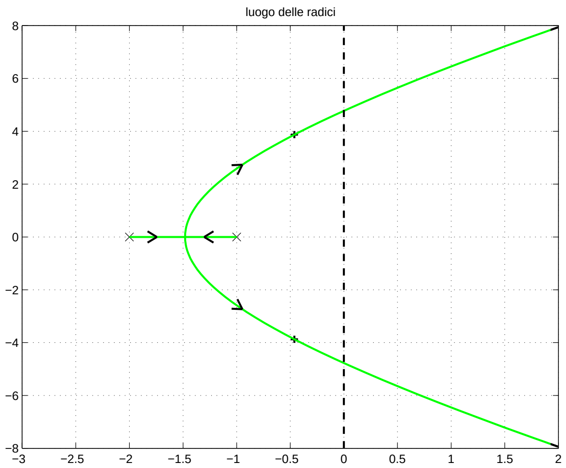
- Sostituendo i parametri M, φ e $\omega_A = 1.16$ nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 1.04$ e $\tau_2 = 6.25$.

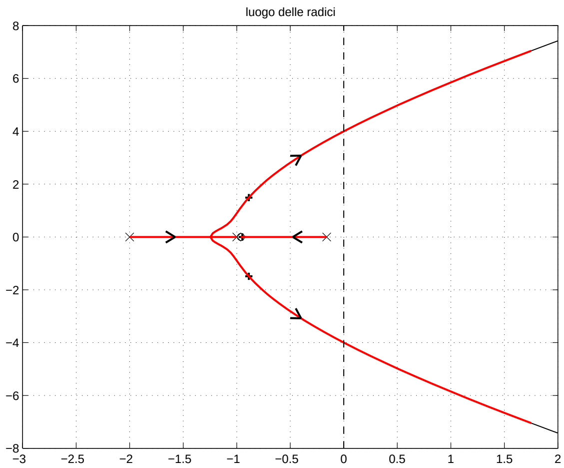
- Risposte temporali dei sistemi $G(s)$ e $C(s)G(s)$ retroazionati:



L'utilizzo di una rete ritardatrice ha migliorato il transitorio diminuendo la sovraelongazione, però ha reso il sistema meno pronto (tempo di salita più elevato).

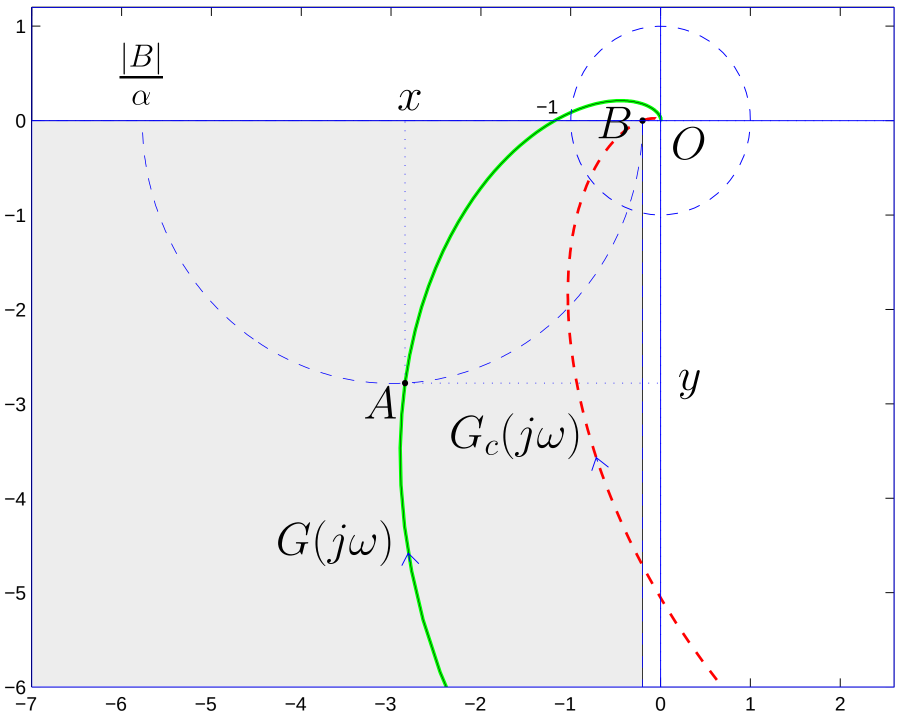
- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:





La presenza della rete correttrice ha spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato aumentando contemporaneamente il coefficiente di smorzamento δ.

c) <u>Sintesi di una rete ritardatrice</u>. Specifica: margine di ampiezza $M_\alpha = 5$.



- Sistema $G(s)$ e rete correttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{10000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{(1+0.396s)}{(1+11.42s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A} \qquad \rightarrow \qquad M_A = 3.978, \quad \varphi_A = 224.4^o$$

nel punto B

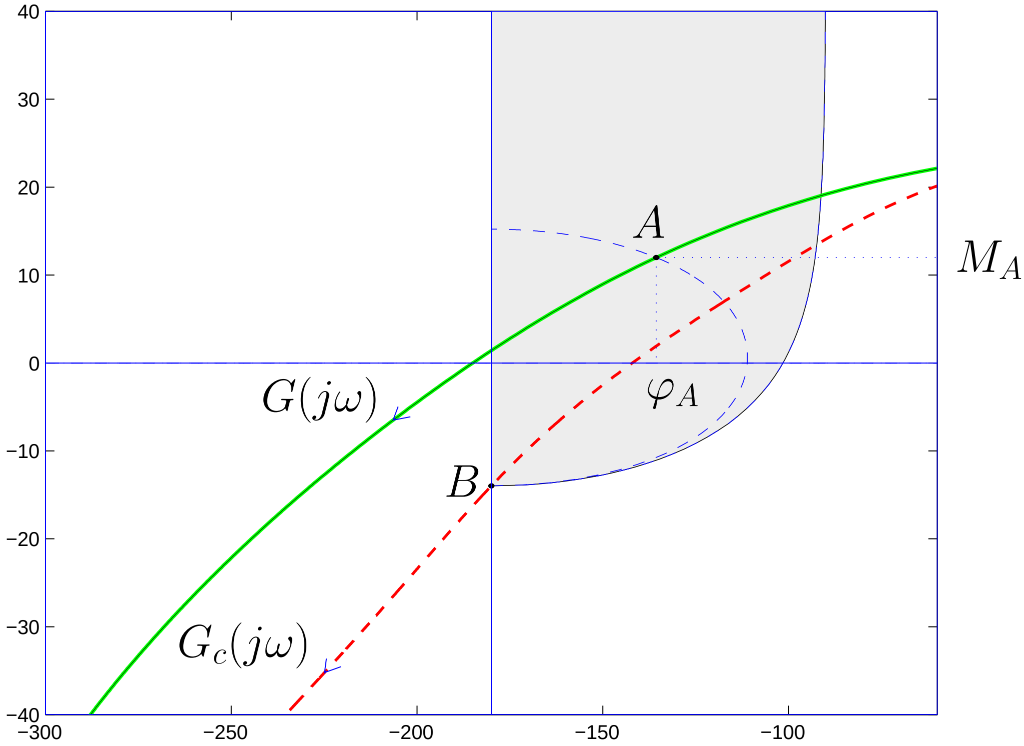
$$B = -\frac{1}{M_\alpha} \qquad \rightarrow \qquad M_B = \frac{1}{M_\alpha} = \frac{1}{5}, \qquad \varphi_B = -\pi$$

la rete correttrice deve attenuare e ritardare di

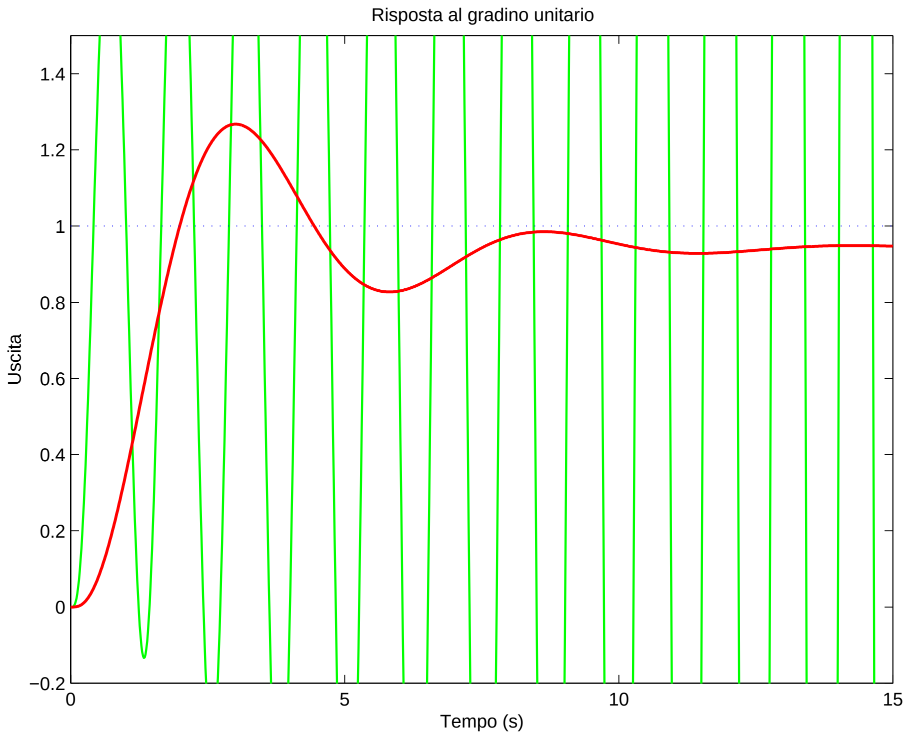
$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A M_\alpha} = 0.0503, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -44.4^o$$

- Sostituendo i parametri M, φ e $\omega_A = 2.4$ nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 0.396$ e $\tau_2 = 11.42$.

- La sintesi della stessa rete correttrice poteva essere fatto anche sul piano di Nichols:



- Le risposte al gradino unitario del sistema retroazionato senza e con rete correttrice sono le seguenti:



- Il sistema retroazionato, inizialmente instabile, viene stabilizzato utilizzando la rete correttrice.