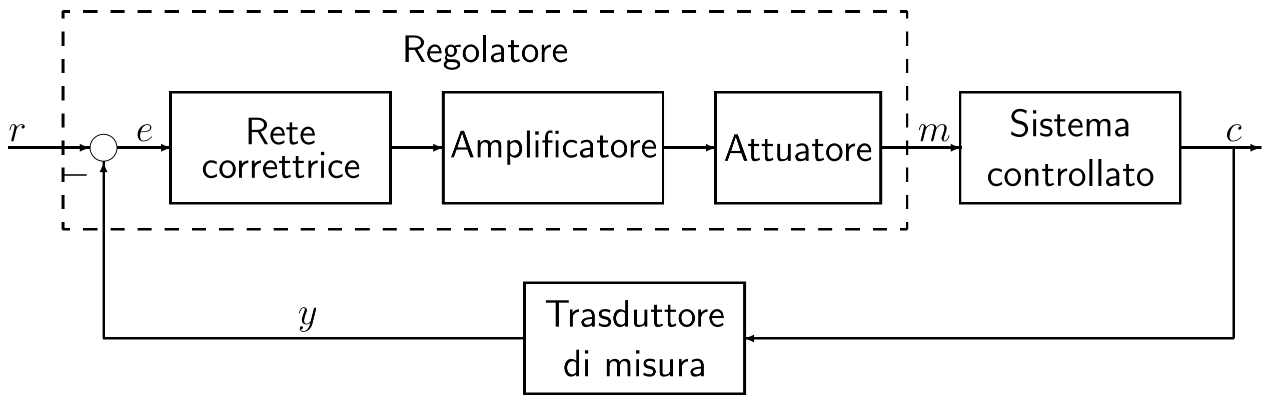
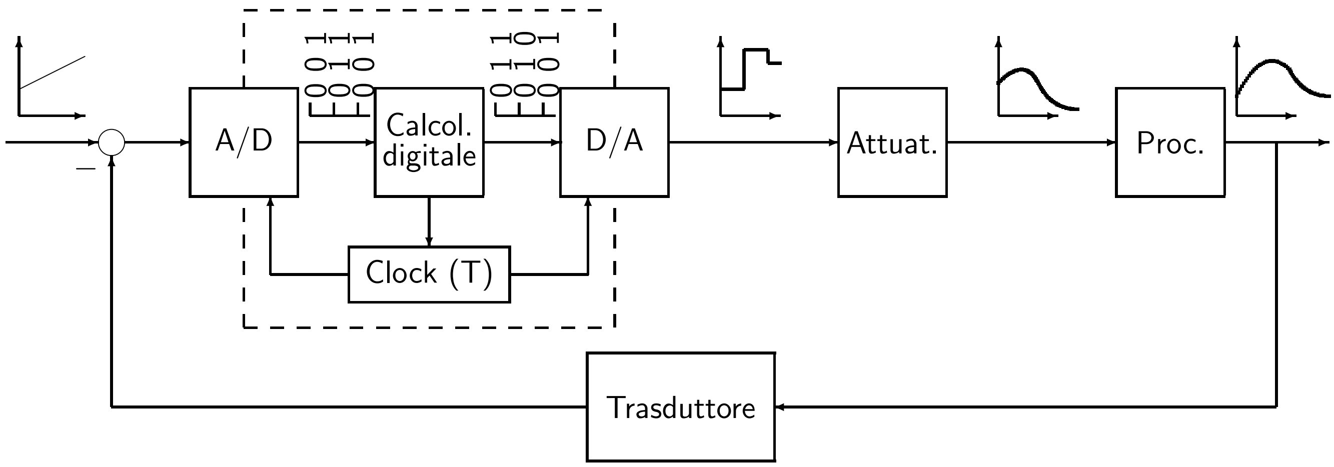
CENNI SUL CONTROLLO DIGITALE

- SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE: sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo
- SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO:

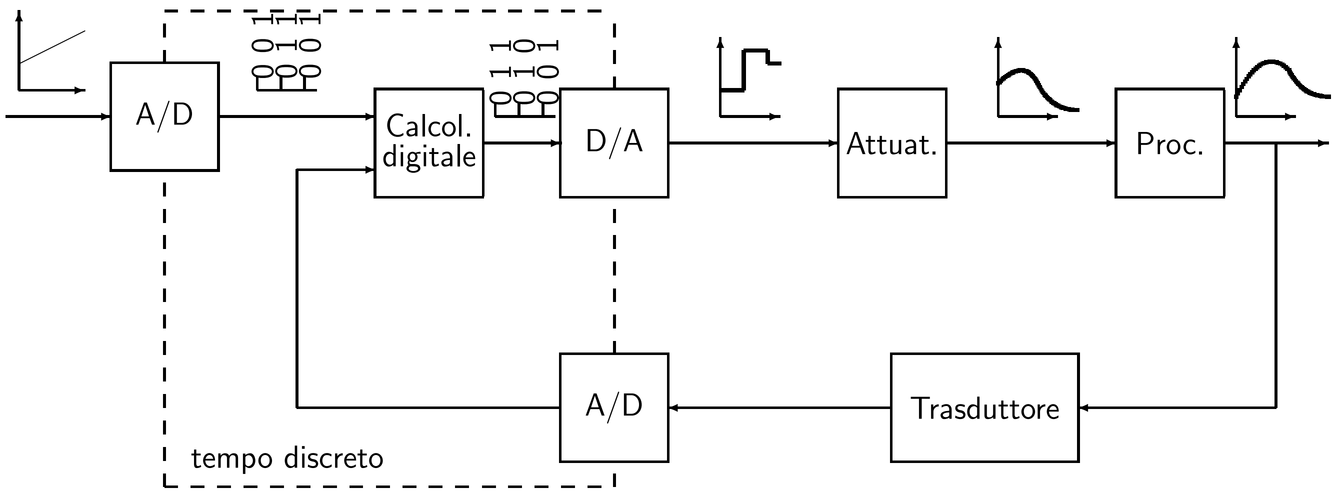


SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE

- Campionamento del segnale errore:

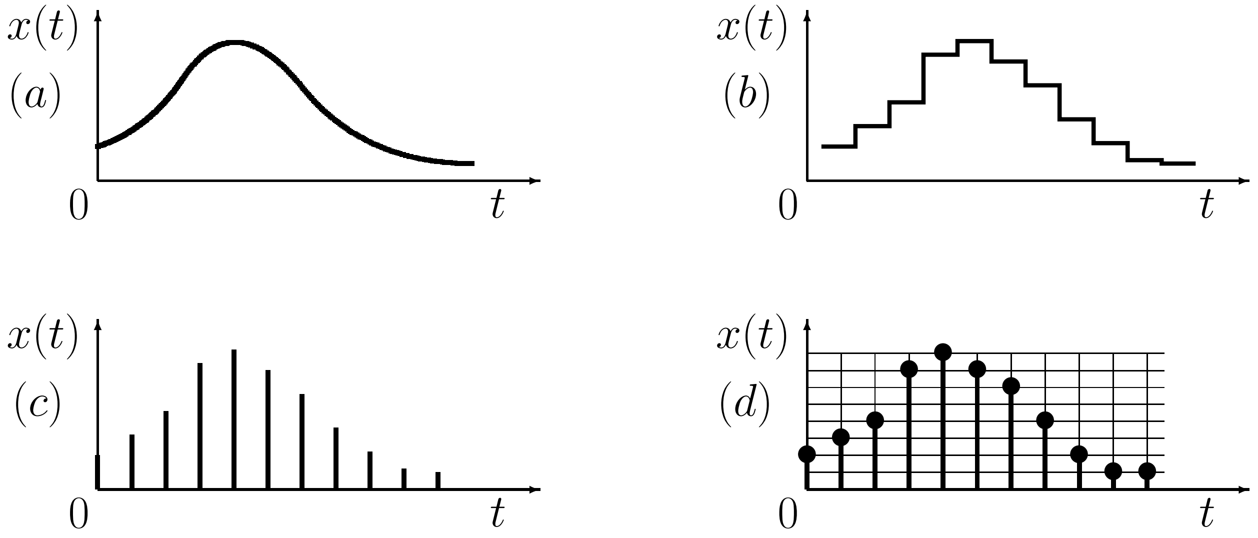


- Campionamento del segnale retroazionato:



- CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO:
  + Maggiore capacità e precisione di elaborazione
  + Maggiore flessibilità
  + Maggiore affidabilità e ripetibilità
  + Maggiore trasmissibilità dei segnali
  - Progettazione più difficile e articolata
  - Stabilizzabilità più precaria
  - Possibilità di arresti non previsti
  - Necessità di utilizzare energia elettrica

SEGNALI DI INTERESSE: a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale;

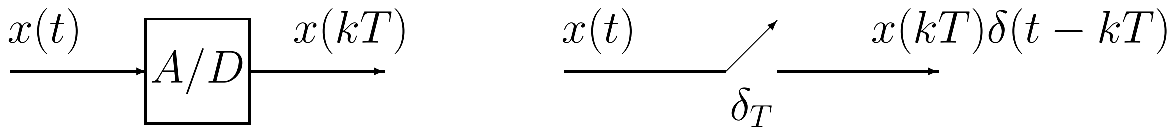


DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

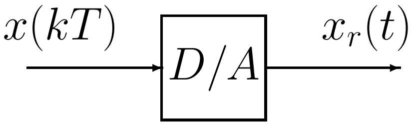
- A/D: convertitore Analogico/Digitale. Due possibili descrizioni:

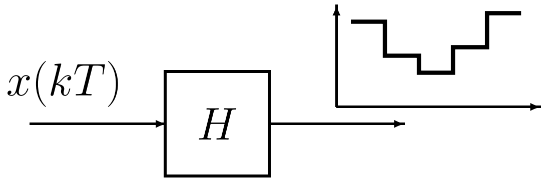
  1) Generazione di una sequenza di valori numerici:

  2) Campionamento ad impulsi di Dirac:

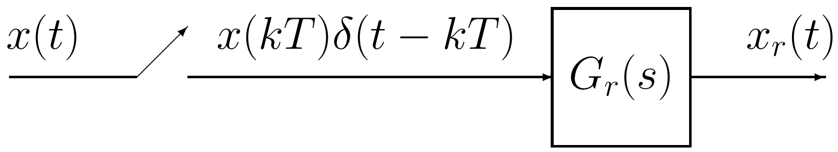


- D/A, convertitore Digitale/Analogico





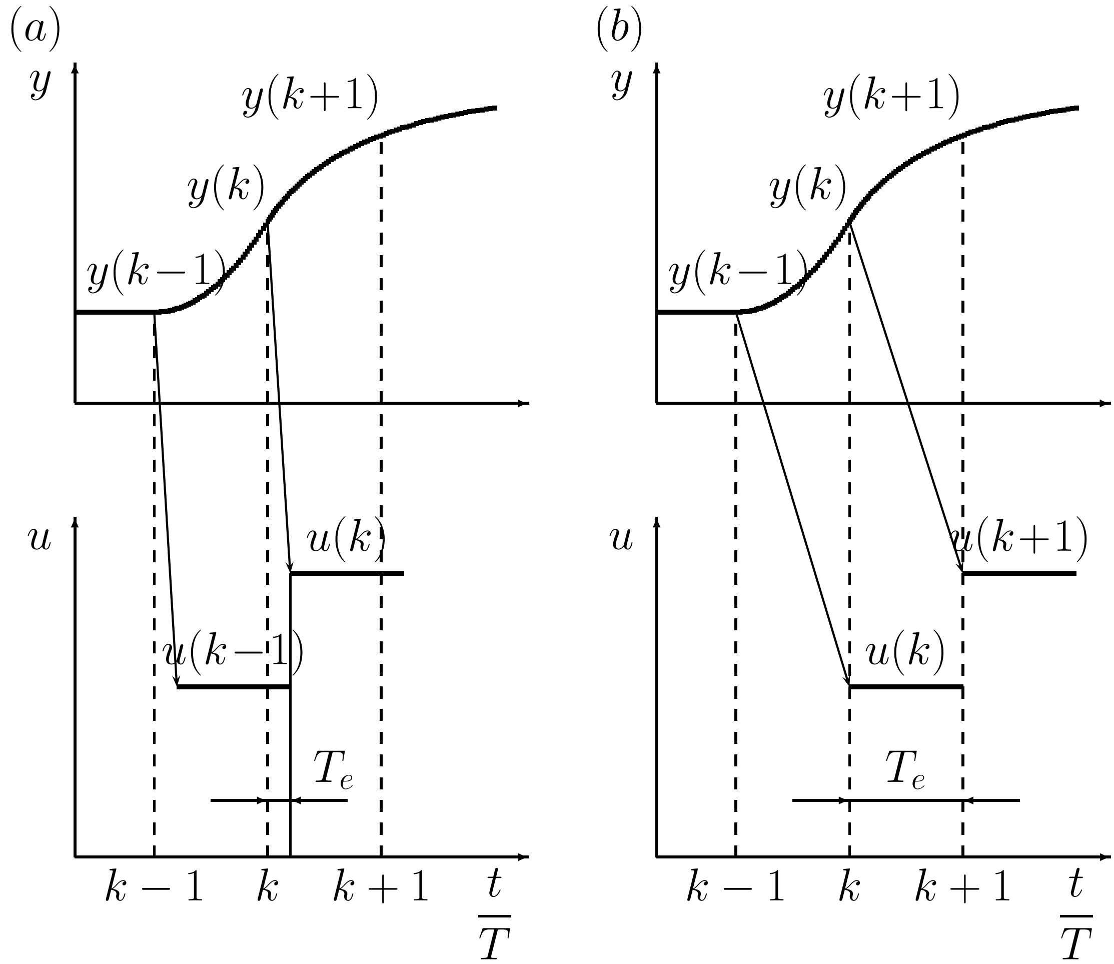
Se si usa il campionatore ad impulsi di Dirac, il ricostruttore (cioè il convertitore D/A) può essere rappresentato da una semplice funzione di trasferimento $G_r(s)$:



Ricostruttore di ordine zero:

$$\boxed{G_r(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}}$$

TEMPO DI ELABORAZIONE E SINCRONIZZAZIONE



Trasformata Z

- Una sequenza di valori x_k ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo $x(t)$, $t \geq 0$, ($x_k = x(kT)$) può essere rappresentata utilizzando la seguente funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \\ &= x_0 + x_1\, z^{-1} + \cdots + x_k\, z^{-k} + \cdots \end{aligned}$$

- La Z-trasformata svolge nei confronti delle equazioni alle differenze lo stesso ruolo che la trasformata di Laplace svolge per le equazioni differenziali.
- La variabile z^{-1} ha il significato fisico di ritardo puro pari al periodo di campionamento T:

$$\boxed{z^{-1} \qquad \leftrightarrow \qquad \text{ritardo puro}}$$

- Qualsiasi equazione alle differenze, lineare e a costanti concentrate può essere trasformata in una funzione di trasferimento discreta $G(z)$:

$$y_k + 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = x_{k-1} + 5x_{k-2}$$

$$Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) = X(z)z^{-1} + 5z^{-2}X(z)$$

$$Y(z)(1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}) = X(z)(z^{-1} + 5z^{-2})$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z + 5}{z^2 + 3z + 2}$$

- Viceversa, qualsiasi funzione di trasferimento discreta $G(z)$ può essere trasformata in una equazione alle differenze, lineare e a costanti concentrate (percorso inverso nel precedente esercizio).

- Una rete correttrice tempo-continua $D(s)$ può essere trasformata nella corrispondente rete tempo discreta $D(z)$ utilizzando vari metodi approssimati. Due tra i più semplici metodi di discretizzazione sono i seguenti.

- **Metodo delle differenze all'indietro**. Esempio: Discretizzare il seguente regolatore:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2\frac{s+2}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.
Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro

$$\boxed{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} D(z) &= 2\frac{s+2}{s+5} = \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = 2\frac{\frac{1-z^{-1}}{T}+2}{\frac{1-z^{-1}}{T}+5} \\ &= 2\frac{1+2T-z^{-1}}{1+5T-z^{-1}} = 2\frac{1.2-z^{-1}}{1.5-z^{-1}} = \frac{M(z)}{E(z)} \end{aligned}$$

Il calcolo della corrispondente equazione alle differenze è immediato:

$$M(z)[1.5 - z^{-1}] = E(z)2[1.2 - z^{-1}]$$

$$1.5M(z) - z^{-1}M(z) = 2[1.2E(z) - z^{-1}E(z)]$$

$$1.5m(k) - m(k-1) = 2[1.2e(k) - e(k-1)]$$

da cui

$$m(k) = \frac{1}{1.5}\left[m(k-1) + 2.4e(k) - 2e(k-1)\right]$$

- **Metodo della trasformazione bilineare.** Esempio: Discretizzare il seguente regolatore:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 30\,\frac{s+20}{s+50}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare

$$\boxed{s = \frac{2}{T}\,\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} D(z) &= D(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{M(z)}{E(z)} \\ &= 30\;\frac{2(1-z^{-1})+20T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})+50T(1+z^{-1})}\bigg|_{T=0.2} \\ &= 30\frac{6+2z^{-1}}{12+8z^{-1}} \end{aligned}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(12+8z^{-1}) = 30E(z)(6+2z^{-1})$$

da cui

$$m(k) = \frac{1}{12}[-8\,m(k-1) + 180e(k) + 60e(k-1)]$$

cioè

$$m(k) = \frac{1}{3}[-2\,m(k-1) + 45e(k) + 15e(k-1)]$$

Confronto tra i due metodi di descritizzazione

- Si consideri il seguente sistema:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

e per esso si progetti una opportuna rete correttrice (anticipatrice):

$$D(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} = \frac{1+0.806\, s}{1+0.117\, s}$$

che migliori la risposta al gradino del corrispondente sistema retroazionato.

- La funzione di trasferimento $D(s)$ può essere discretizzata utilizzando diversi metodi approssimati:

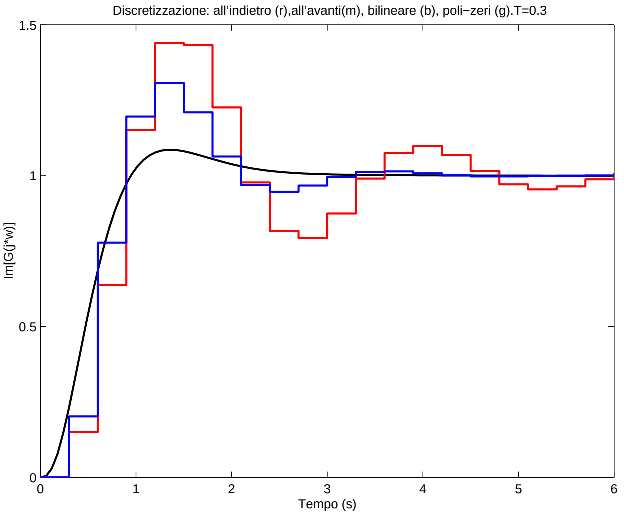
1) differenze all'indietro:

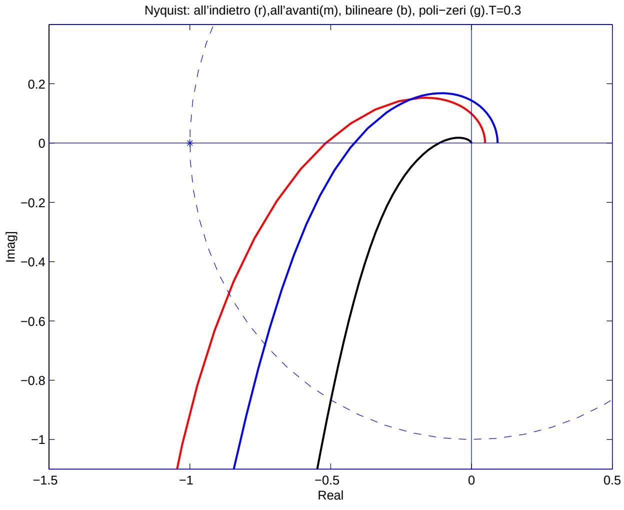
$$D_1(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T+\tau_1 - \tau_1\, z^{-1}}{T+\tau_2-\tau_2\, z^{-1}}$$

2) trasformazione bilineare:

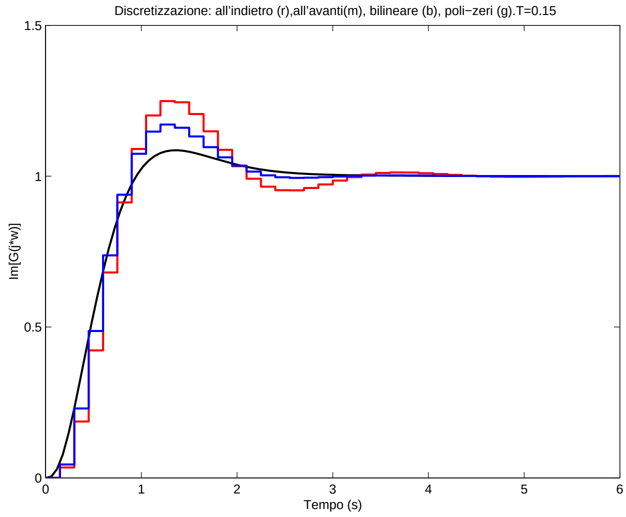
$$D_3(z) = D(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T+2\,\tau_1 + (T-2\,\tau_1)\, z^{-1}}{T+2\,\tau_2+(T-2\,\tau_2)\, z^{-1}}$$

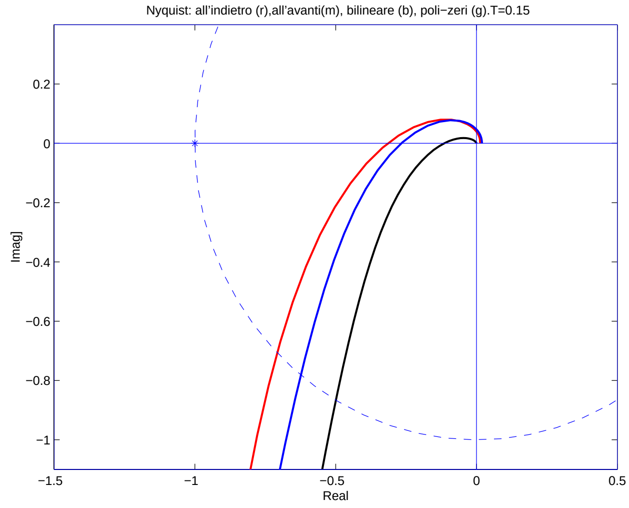
- Risposte al gradino del sistema retroazionato e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.3$ e utilizzando i vari metodi di discretizzazione:



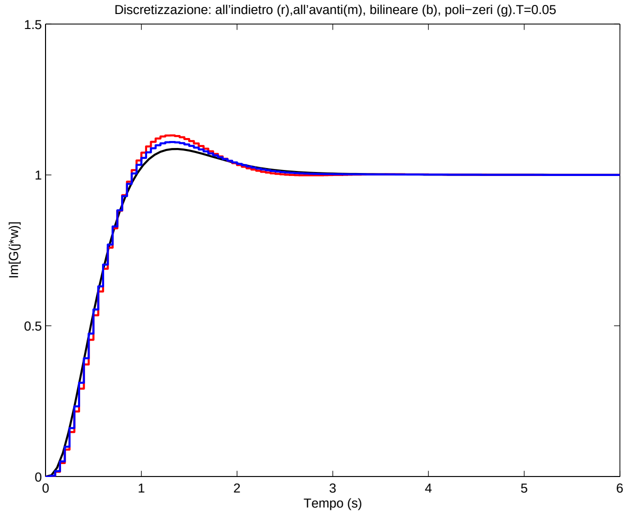


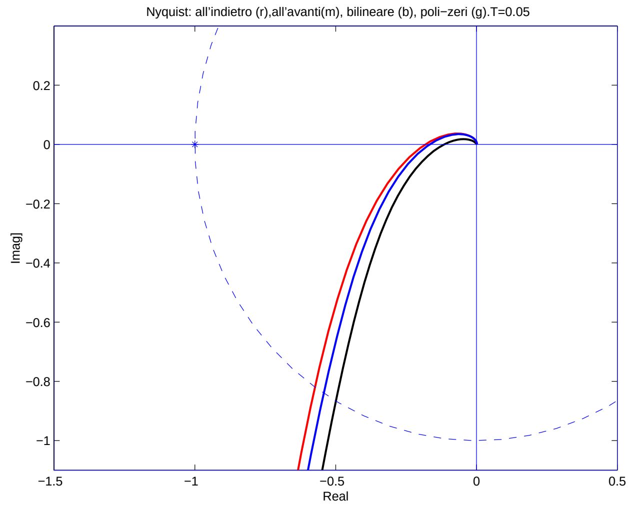
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.15$:



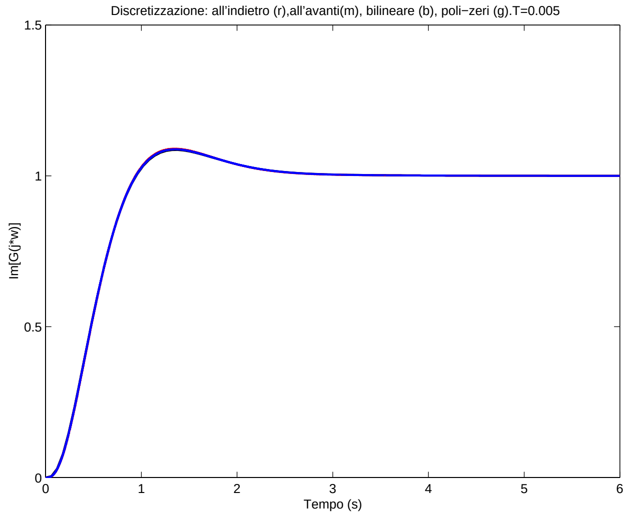


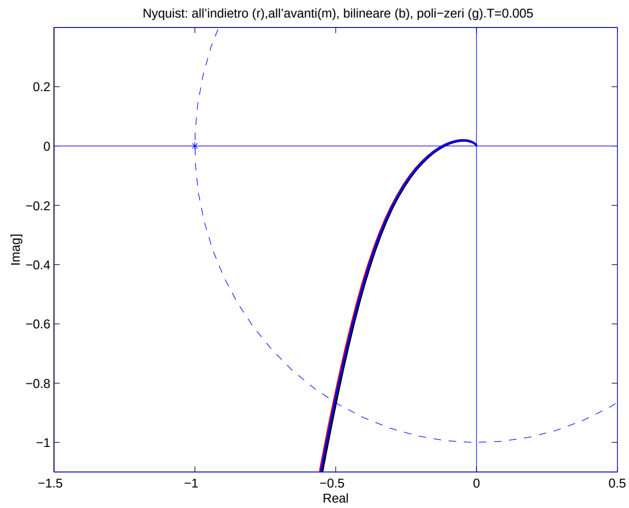
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.05$:





- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.005$:





- Per T molto piccolo i regolatori $D(z)$ hanno un comportamento equivalente.