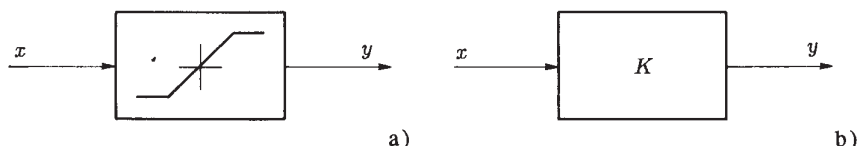
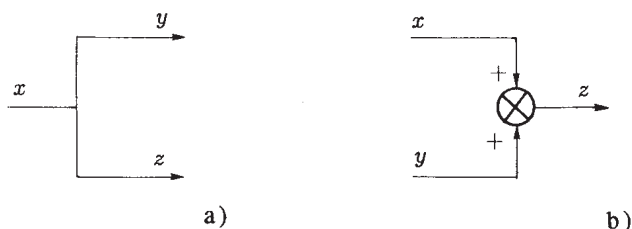


# Riduzione degli schemi a blocchi

- Spesso i sistemi complessi vengono rappresentati con *schemi a blocchi*, i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.
- I blocchi elementari per la rappresentazione di sistemi puramente algebrici sono:



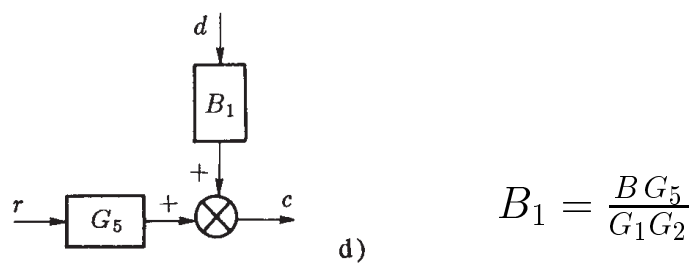
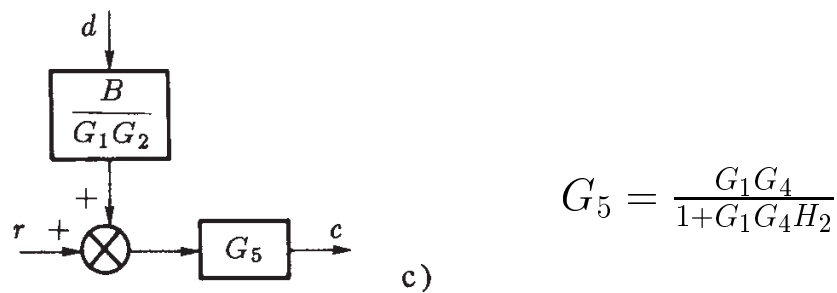
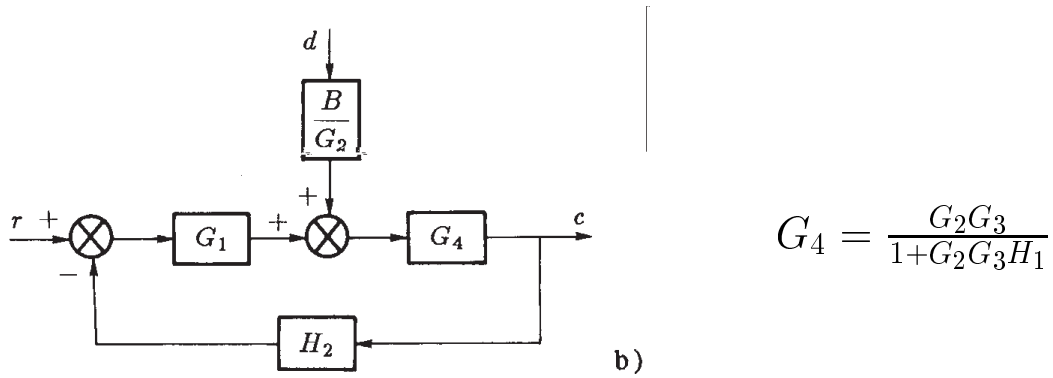
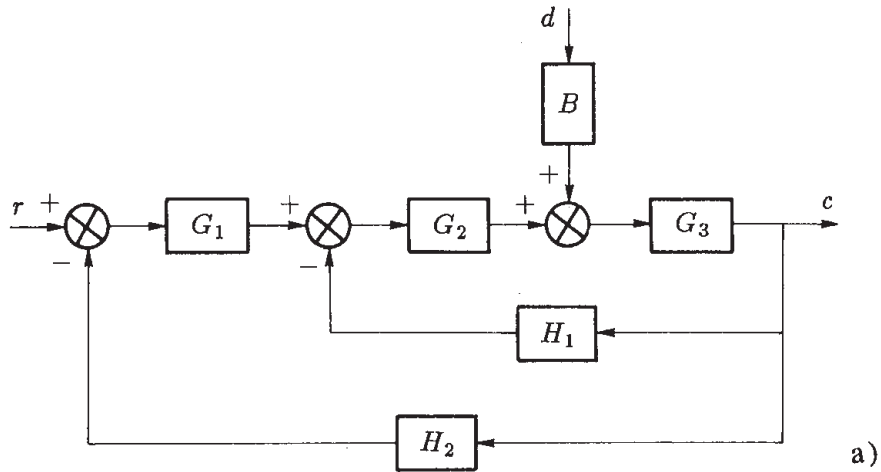
- Negli schemi a blocchi i diversi elementi sono collegati fra loro mediante i *punti di diramazione* e le *giunzioni sommanti*:



- Principali regole per la riduzione degli schemi a blocchi:

	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1		
2		
3		
4		
5		

## Esempio di riduzione di schema a blocchi

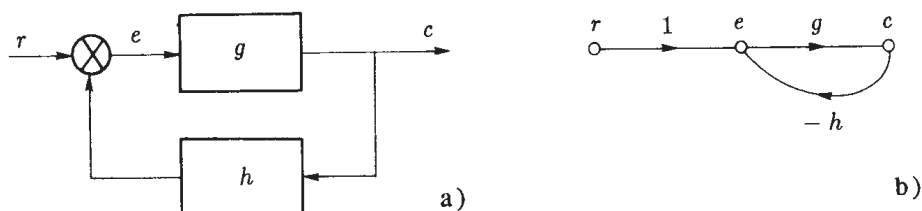


- Forma minima:

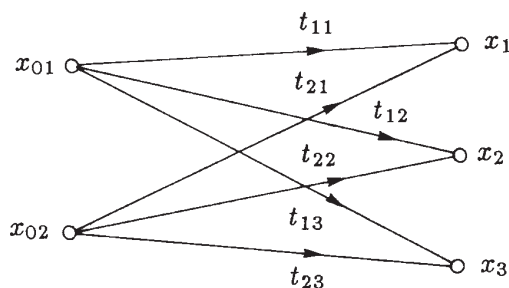
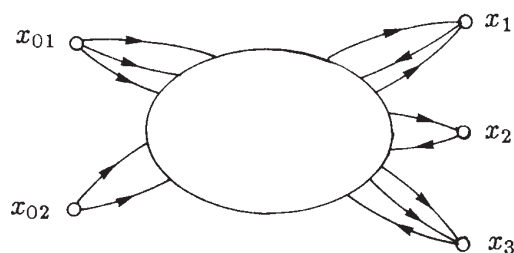
$$c = \frac{G_1 G_2 G_3 r + B G_3 d}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

## I grafi di flusso di segnale

- I *grafi di flusso di segnale* sono un mezzo, alternativo agli schemi a blocchi, per la rappresentazione grafica dei sistemi complessi. Esempio:



- Rispetto agli schemi a blocchi, essi forniscono una più semplice rappresentazione grafica del sistema.
- Un grafo di flusso di segnale è una rete composta di *nodi* e di *rami orientati*. I *nodi indipendenti* (o *nodi sorgente*) sono nodi a cui non giunge nessun ramo. I *nodi dipendenti* sono nodi ai quali giunge almeno un ramo. Ogni ramo è caratterizzato da un *coefficiente* o *trasmissione*.
- Per i grafi di flusso di segnale esistono regole di riduzione che sono simili a quelle degli schemi a blocchi. Mediante riduzione, ogni grafo di flusso di segnale può essere portato in *forma minima*:



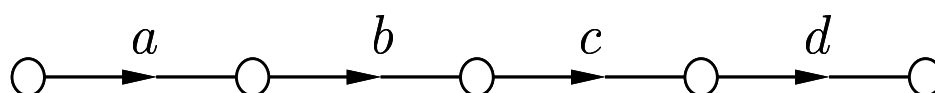
- Per calcolare la forma minima si utilizza la *Formula di Mason*

## Formula di Mason - Determinante di un grafo

La formula di Mason permette di calcolare la trasmittanza  $T$  di ogni singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) di un grafo in forma minima. Essa utilizza il concetto di determinante  $\Delta$  di un grafo.

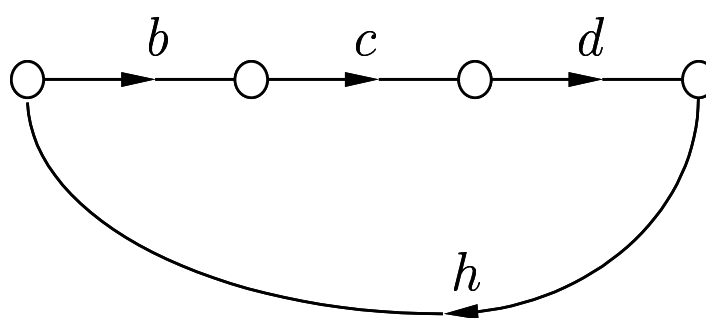
Alcune definizioni:

- **Percorso**: successione di rami e nodi adiacenti senza anelli, ogni nodo viene attraversato una sola volta. Il coefficiente  $P$  del percorso è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:



$$P = abcd$$

- **Anello**: percorso chiuso. Il coefficiente  $A$  dell'anello è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:

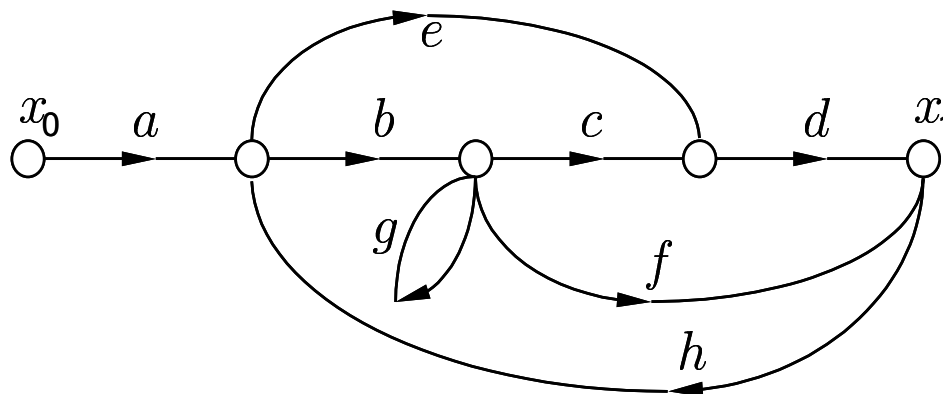


$$A = bcdh$$

- Due percorsi o due anelli non si toccano quando non hanno nessun nodo in comune.

## Formula di Mason - Determinante di un grafo

Per calcolare il determinante  $D$  di un grafo è necessario individuare alcuni insiemi di indici. Consideriamo come esempio il seguente grafo:  $\mathcal{P}$ ) Insieme



degli indici di tutti i percorsi del grafo dal nodo sorgente  $x_0$  a quello dipendente (uscita)  $x_1$ . Ad ogni indice si associa il coefficiente  $P_i$  del corrispondente percorso. Esempio ( $\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$ ):

$$\begin{aligned} i = 1 & \text{ percorso: } a \ b \ c \ d \quad P_1 = abcd \\ i = 2 & \text{ percorso: } a \ e \ d \quad P_2 = aed \\ i = 3 & \text{ percorso: } a \ b \ f \quad P_3 = abf \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_1$ ) Insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo. Ad ogni indice si associa il coefficiente  $A_i$  del corrispondente anello. Esempio ( $\mathcal{I}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ):

$$\begin{aligned} i = 1 & \text{ anello: } e \ d \ h \quad A_1 = edh \\ i = 2 & \text{ anello: } b \ c \ d \ h \quad A_2 = bcdh \\ i = 3 & \text{ anello: } b \ f \ h \quad A_3 = bfh \\ i = 4 & \text{ anello: } g \quad A_4 = g \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_2$ ) Insieme delle COPPIE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a due a due. Esempio:

$$\text{anelli 1 e 4} \rightarrow \mathcal{I}_2 = \{(1, 4)\}$$

$\mathcal{I}_n$ ) Insieme delle N-PLE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a N a N. Esempio:

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_4 = \dots = \mathcal{I}_n = \{ \}$$

**Formula di Mason - Determinante di un grafo**

Dati gli insiemi di indici  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n$  e noti i coefficienti  $A_i$  di tutti gli anelli, per determinante  $\Delta$  dell'intero grafo si intende la quantità:

$$\Delta \stackrel{def}{=} 1 - \sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_3} A_i A_j A_k + \dots$$

Esempio:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i &= edh + bcdh + bfh + g \\ \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j &= edhg \\ \Delta &= 1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg \end{aligned}$$

**Formula di Mason:** *permette di calcolare la trasmittanza  $T$  di ogni singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) del grafo in forma minima. La formula da utilizzare è la seguente:*

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$$

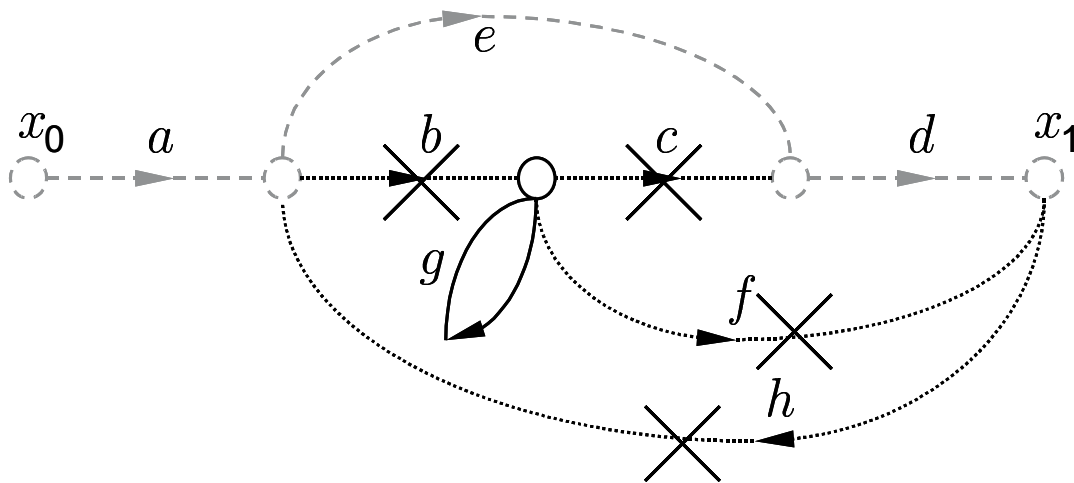
dove:  $\mathcal{P}$  è l'insieme degli indici di tutti i percorsi fra i due nodi considerati,  $P_i$  è il coefficiente del percorso  $i$ -esimo,  $\Delta_i$  è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e tutti i rami appartenenti al percorso  $i$ -esimo.

Osservazioni:

- Il determinante di un grafo dipende SOLO dalla struttura degli anelli, non dal particolare percorso tra due nodi. Esso è dunque una proprietà del grafo.
- Per quanto detto, tutti i rami del grafo in forma minima sono caratterizzati dallo stesso determinante  $\Delta$ .

## Formula di Mason - Determinante di un grafo

Esempio, calcolo del determinante  $\Delta_2$  relativo al percorso 2 (a, e, d). I rami e i nodi appartenenti al percorso 2 devono essere eliminati dal grafo. Successivamente si cancellano tutti i rami che partono o arrivano in un nodo precedentemente eliminato (rami b, c, f, h).  $\Delta_2 = 1 - g$  è il determinante del grafo rimanente (anello g).



$$i = 1 \quad P_1 = abcd \quad \Delta_1 = 1$$

$$i = 2 \quad P_2 = aed \quad \Delta_2 = 1 - g$$

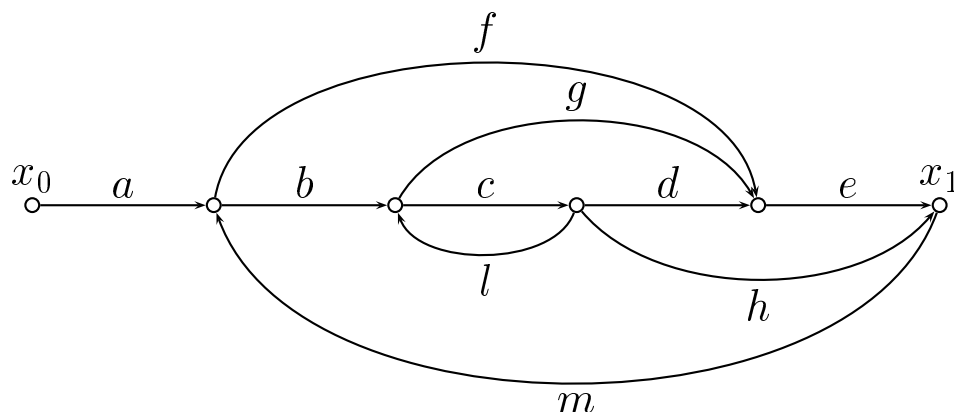
$$i = 3 \quad P_3 = abf \quad \Delta_3 = 1$$

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i = abcd(1) + aed(1 - g) + abf(1)$$

La trasmittanza  $T$  del ramo  $x_0 - x_1$  nel grafo in forma minima risulta quindi:

$$T = \frac{abcd + aed(1 - g) + abf}{1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg}$$

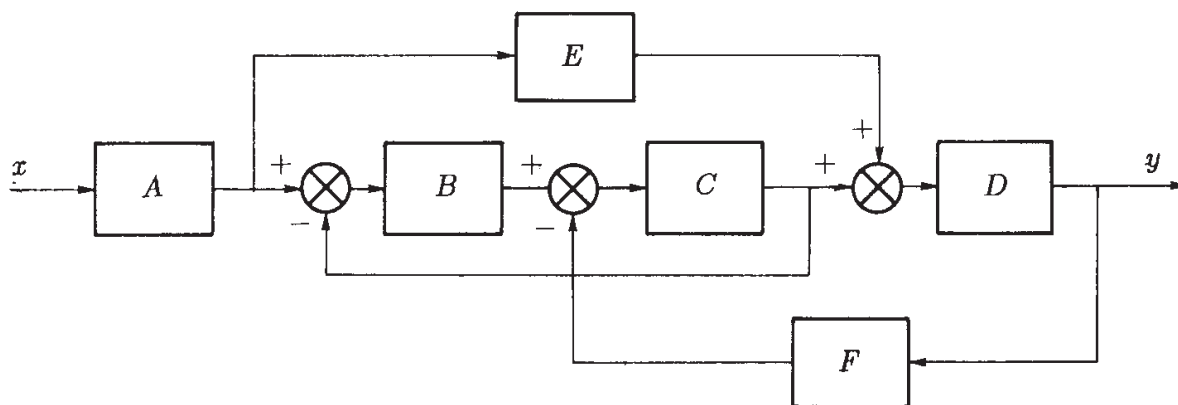
• Esempio 1:



- Nel grafo sono presenti quattro percorsi di segnale  $P_1 = a f e$ ,  $P_2 = a b g e$ ,  $P_3 = a b c h$ ,  $P_4 = a b c d e$  e i cinque anelli  $A_1 = f e m$ ,  $A_2 = b g e m$ ,  $A_3 = b c h m$ ,  $A_4 = b c d e m$ ,  $A_5 = c l$
- Trasmittanza:

$$T = \frac{a f e(1 - c l) + a b g e + a b c h + a b c d e}{1 - f e m - b g e m - b c h m - b c d e m - c l + f e m c l}$$

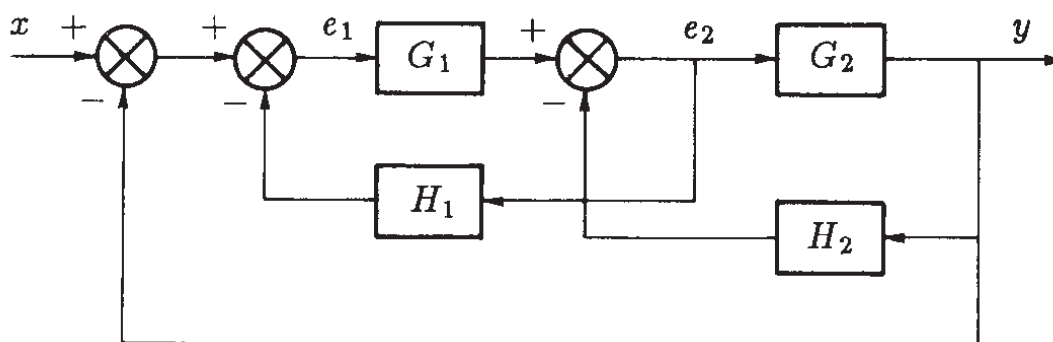
• Esempio 2:



- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = A D \frac{B C + E (1 + B C)}{1 + B C + C D F}$$

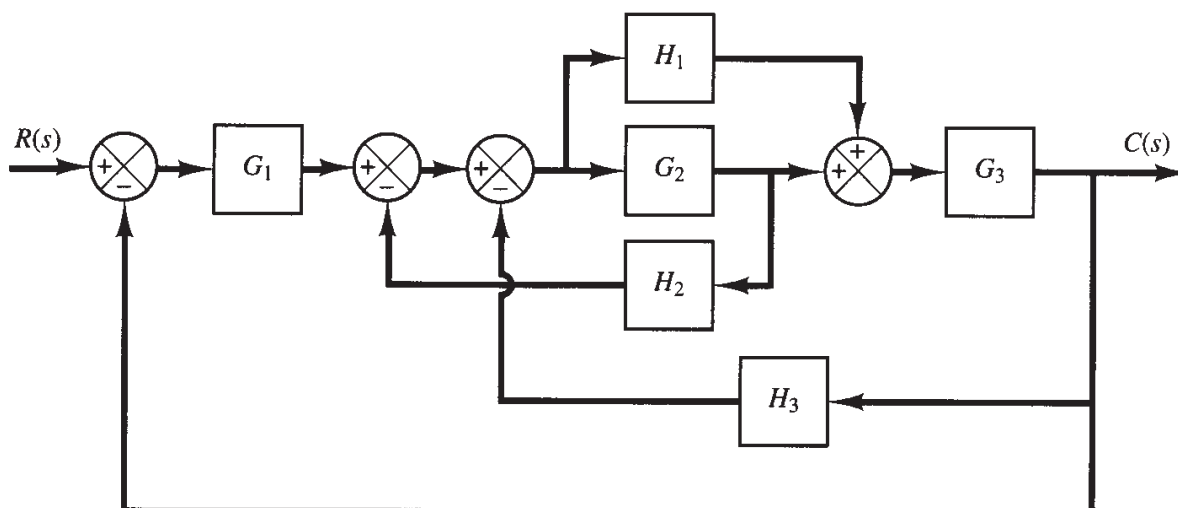
- Esempio 3:



- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2}$$

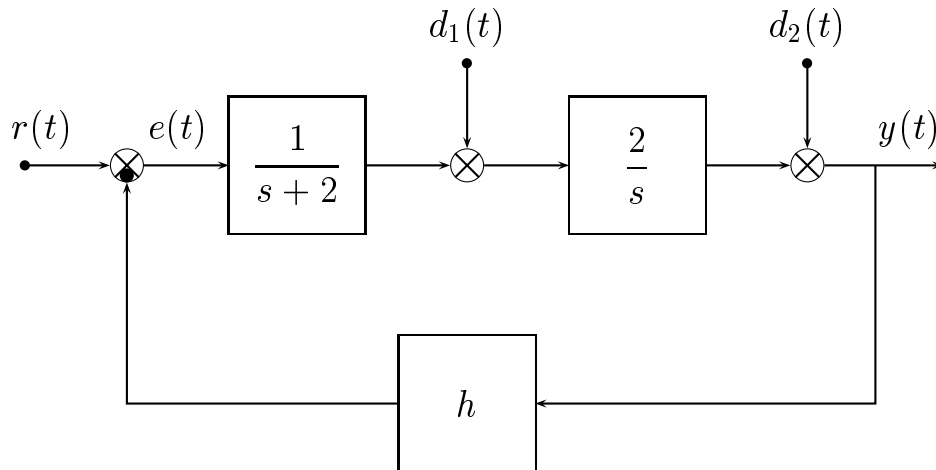
- Esempio 4:



- Trasmittanza:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 H_1 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 H_1 G_3 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + H_1 G_3 H_3}$$

- **Esempio.** Sia dato il seguente sistema dinamico retroazionato:



- Calcolare il valore a regime della variabile  $e(t)$  in presenza dei seguenti segnali:  $r(t) = t$ ,  $d_1(t) = 1$  e  $d_2(t) = 1$ .

Si opera con le trasformate di Laplace e si applica la sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= \frac{R(s) - \frac{2h}{s}D_1(s) - hD_2(s)}{1 + \frac{2h}{s(s+2)}} \\
 &= \frac{s(s+2)R(s) - 2h(s+2)D_1(s) - hs(s+2)D_2(s)}{s^2 + 2s + 2h}
 \end{aligned}$$

Essendo  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  e  $D_1(s) = D_2(s) = \frac{1}{s}$ , si ha che:

$$E(s) = \frac{(s+2) - 2h(s+2) - hs(s+2)}{s(s^2 + 2s + 2h)} = \frac{(s+2)(1 - 2h - hs)}{s(s^2 + 2s + 2h)}$$

Applicando il teorema del valore finale si ricava:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1 - 2h}{h} = \frac{1}{h} - 2$$