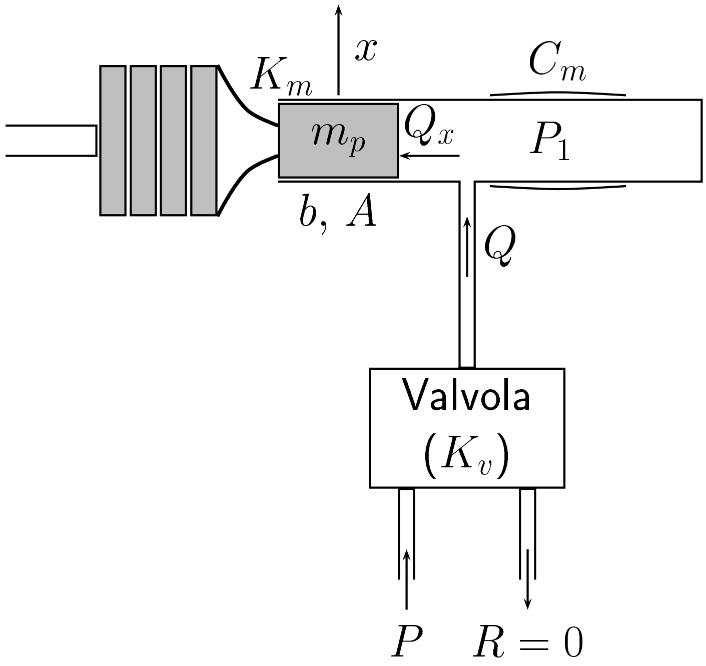
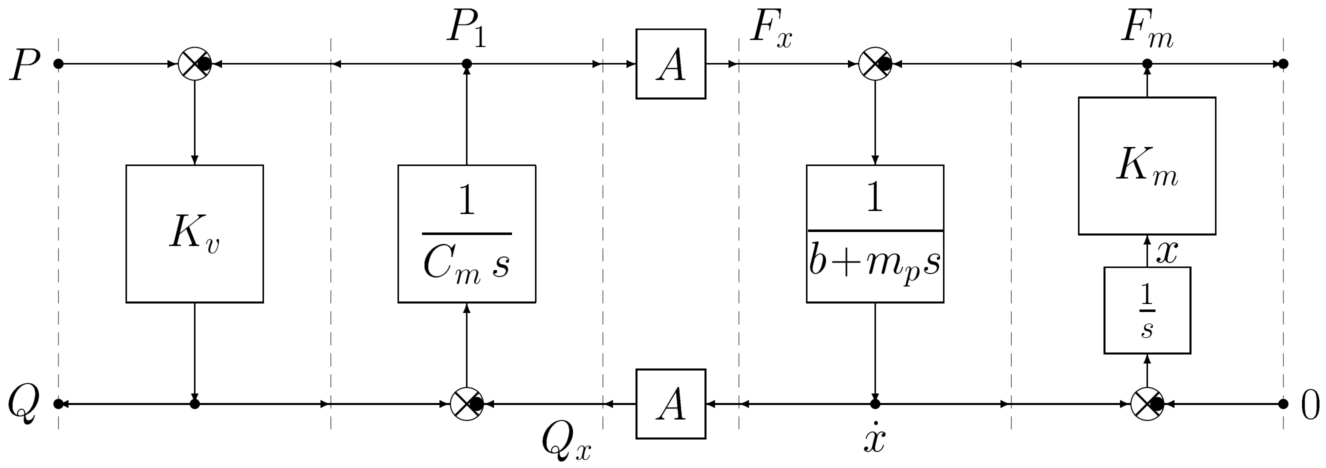
Frizione idraulica

Si consideri il seguente modello idraulico semplificato di una frizione:

P	Pressione di alimentazione
Q	Portata volumetrica nella valvola
K_v	Costante di prop. della valvola
C_m	Capacità idraulica del cilindro
P_1	Pressione all'interno del cilindro
A	Sezione del pistone
x	Posizione del pistone
$\dot{x}$	Velocità del pistone
m_p	Massa del pistone
b	Attrito lineare del pistone
K_m	Rigidità della molla
F_m	Forza della molla sul pistone



Il corrispondente modello dinamico POG è il seguente:



Utilizzando la formula di Mason e le seguenti variabili ausiliarie

$$G_1 = K_v, \qquad G_2 = \frac{1}{C_m s}, \qquad G_3 = \frac{1}{b + m_p s}, \qquad G_4 = \frac{K_m}{s}$$

si ottiene la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema:

$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{A\,G_1\,G_1\,G_3\,G_4}{1 + G_1\,G_2 + A^2\,G_2\,G_3 + G_3\,G_4 + G_1\,G_2\,G_3\,G_4}$$

che sostituendo diventa:

$$G(s) = \frac{A K_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m\,b + K_v m_p)s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v\,b)s + K_m K_v}$$

Le equazioni che caratterizzano il sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} Q = K_v(P - P_1) \\ C_m \dot{P}_1 = Q - Q_x \\ m_p \ddot{x} = F_x - b\,\dot{x} - F_m \end{cases} \qquad \begin{cases} F_m = K_m\, x \\ F_x = A\, P_1 \\ Q_x = A\,\dot{x} \end{cases}$$

Quando le equazioni vengono scritte in modo "non organizzato" non è facile capire qual è l'ordine dinamico del sistema e se sono state scritte tutte le equazioni necessarie per la completa definizione del sistema. Se si introduce il seguente "vettore di stato"

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 & \dot{x} & x \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

le equazioni del sistema possono essere strutturate nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_m\,\dot{P}_1 \\ m_p\,\ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -K_v & -A & 0 \\ A & -b & -K_m \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} P \\ \mathbf{y} &= F_m \end{aligned}$$

dove P è la pressione di controllo in ingresso e $\mathbf{y} = F_m$ è la forza misurata in uscita. Tale sistema di equazioni può essere riscritto nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{K_v}{C_m} & -\frac{A}{C_m} & 0 \\ \frac{A}{m_p} & -\frac{b}{m_p} & -\frac{K_m}{m_p} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_v}{C_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{P}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} \end{aligned}$$

che in forma compatta diventa (descrizione nello spazio degli stati):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} \end{cases}$$

dove
$\mathbf{A}$ è la matrice di sistema
$\mathbf{B}$ è la matrice degli ingressi
$\mathbf{C}$ è la matrice delle uscite

Il sistema è lineare, perciò ammette un unico punto di lavoro $\mathbf{x}_0$ ogni qual volta l'ingresso è costante $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Tale punto di lavoro $\mathbf{x}_0$ si determina imponendo

$\dot{\mathbf{x}} = 0$ e $\mathbf{u}_0 = P$:

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{u}_0, \qquad \mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_0$$

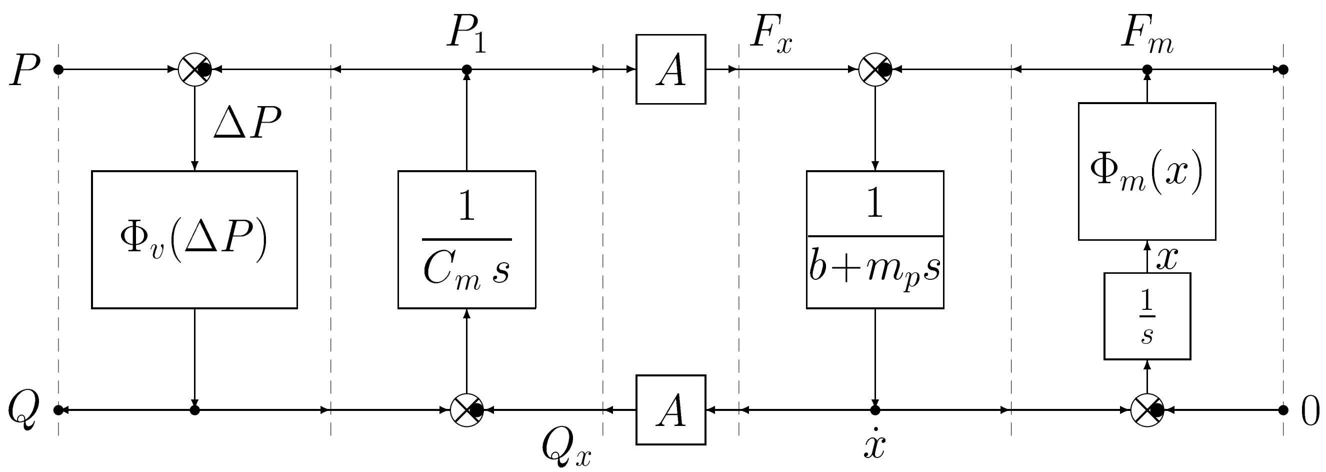
Nel caso in oggetto si ottiene:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ x \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ \frac{A\,P}{K_m} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_0 = [F_m]_0 = A\,P$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare descritto nello spazio degli stati si ottiene anche utilizzando la seguente relazione:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Il risultato che si ottiene è identico a quello ottenuto con la formula di Mason. Se il sistema è non lineare si deve procedere in modo diverso. Supponiamo, per esempio, che nel caso in esame sia la valvola che la molla siano elementi non lineari: $\Phi_v(\Delta P)$ e $\Phi_m(x)$.



La descrizione nello spazio degli stati è ora la seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\Phi_v(P_1 - P)}{C_m} - \dfrac{A\,\dot{x}}{C_m} \\ \dfrac{A\,P_1}{m_p} - \dfrac{b\,\dot{x}}{m_p} - \dfrac{\Phi_m(x)}{m_p} \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \qquad F_m = \Phi_m(x)$$

Posto $x_1 = P_1$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = x$, $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^T$, $\mathbf{u} = u = P$ e $\mathbf{y} = F_m$, la descrizione nello spazio degli stati è ora la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\Phi_v(u-x_1)}{C_m} - \frac{A\,x_2}{C_m} \\ \frac{A\,x_1}{m_p} - \frac{b\,x_2}{m_p} - \frac{\Phi_m(x_3)}{m_p} \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})} \\ \mathbf{y} = \underbrace{\left[\, \Phi_m(x_3) \,\right]}_{\mathbf{h}(\mathbf{x})} \end{array} \right. \qquad \leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}} & = & \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

In questo caso $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ è funzione del solo vettore di stato $\mathbf{x}$. Nel caso più generale la funzione $\mathbf{h}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})$ dipende anche dal vettore degli ingressi $\mathbf{u}$. Anche in questo caso il punto di lavoro $\bar{\mathbf{x}}$ associato all'ingesso $\mathbf{u} = \bar{u}$ si determina imponendo $\dot{\mathbf{x}} = 0$:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\, \mathbf{u}) = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Phi_v(\bar{u}-\bar{x}_1)}{C_m} = 0 \\ \frac{A\,\bar{x}_1}{m_p} - \frac{\Phi_m(\bar{x}_3)}{m_p} = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 = \bar{u} - \Phi_v^{-1}(0) \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = \Phi_m^{-1}(A\,\bar{x}_1) \end{array} \right.$$

Nel caso di sistemi non lineari possono esistere più punti di lavoro associati alo stesso valore del vettore di ingresso $\mathbf{u}$.

La linearizzazione del sistema nell'intorno del punto di lavoro si opera nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}} & = & \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}^T}\right|_{(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}^T}\right|_{(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{y} & = & \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial\, \mathbf{x}^T}\right|_{(\bar{\mathbf{x}})} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \end{array} \right.$$

Posto $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, si ottiene il sistema linearizzato

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} & = & \mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{C}\,\tilde{\mathbf{x}} \end{array} \right.$$

dove

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}^T}\right|_{(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})}, \qquad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}^T}\right|_{(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})}, \qquad \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial\, \mathbf{x}^T}\right|_{(\bar{\mathbf{x}})}$$

Nel vaso in esame si ha:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{K_v}{C_m} & -\frac{A}{C_m} & 0 \\ \frac{A}{m_p} & -\frac{b}{m_p} & -\frac{K_m}{m_p} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{K_v}{C_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_m \end{bmatrix}$$

dove

$$K_v = -\frac{\partial \Phi_v(u-x_1)}{\partial\, x_1}\bigg|_{(\bar{x}_1,\bar{u})} = \frac{\partial \Phi_v(u-x_1)}{\partial\, u}\bigg|_{(\bar{x}_1,\bar{u})} = \frac{\partial \Phi_v(w)}{\partial\, w}\bigg|_{w=\Phi_v^{-1}(0)}$$

$$K_m = \frac{\partial \Phi_m(x_3)}{\partial\, x_3}\bigg|_{x_3=\bar{x}_3} \qquad \text{dove} \qquad \bar{x}_3 = \Phi_m^{-1}(A\,(\bar{u} - \Phi_v^{-1}(0)))$$

In questo modo si ottiene formalmente lo stesso modello dinamico lineare considerato inizialmente.