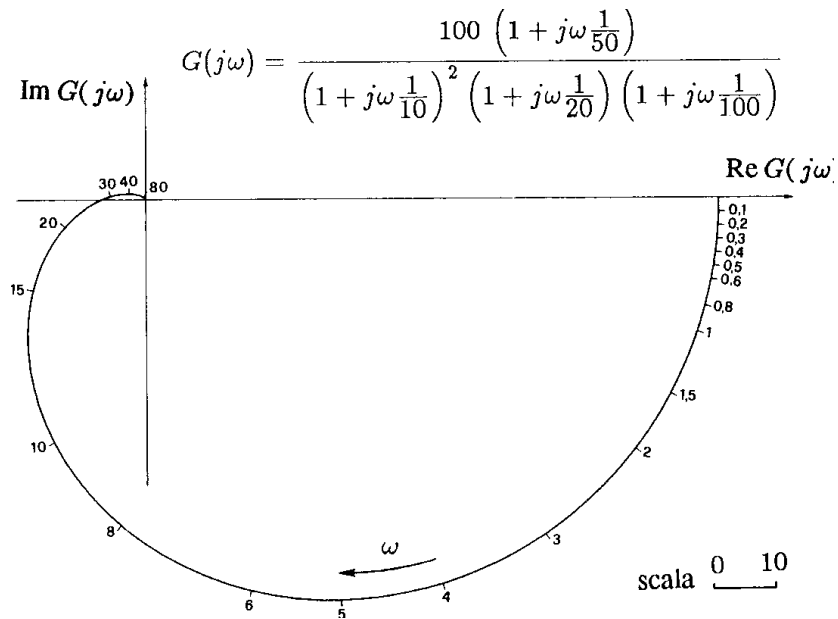
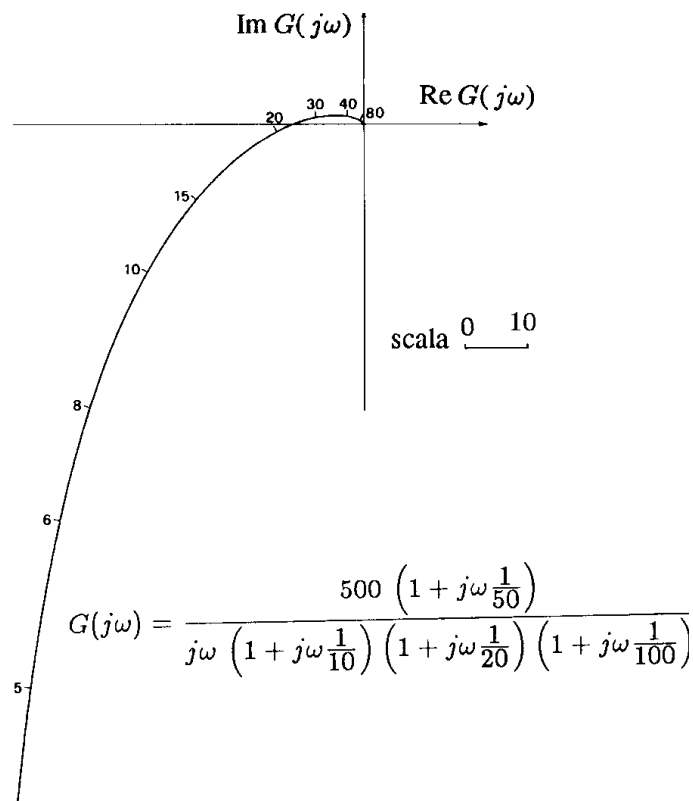


Diagrammi di Nyquist o polari

- Esempio di diagramma polare senza poli nell'origine:



- Esempio di diagramma polare con un polo nell'origine:



- I diagrammi di Nyquist mostrano, sul piano complesso di Gauss, come varia il numero complesso $G(j\omega)$ al variare della pulsazione ω ;

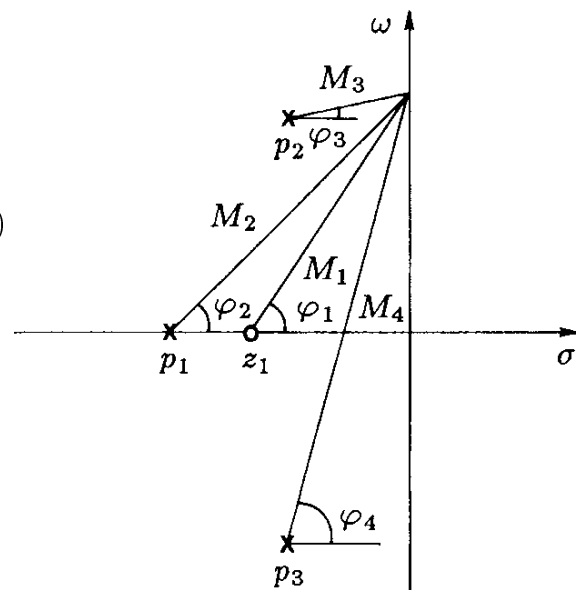
- I diagrammi di Nyquist sono graduati in funzione della pulsazione ω ;
- I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione (criterio di Nyquist);
- Nota la funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare si può tracciare per punti, separando le parti reale e immaginaria di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di ω .
- Se una funzione di trasferimento $G(s)$ è data in forma fattorizzata, la corrispondente funzione di risposta armonica è

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}$$

- Interpretazione grafica della funzione di risposta armonica (un esempio):

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} \\ &= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)} \end{aligned}$$

I moduli M_1 , M_2 , M_3 , M_4 e le fasi φ_1 , φ_2 , φ_3 e φ_4 sono facilmente determinabili per via grafica.



- In molti casi, per lo studio della stabilità di un sistema retroazionato è sufficiente la conoscenza dell'andamento *qualitativo* del suo diagramma di Nyquist.

Regole per il tracciamento dei diagrammi polari

- Si faccia riferimento ad una funzione $G(s)$ in forma polinomiale:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

oppure in forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s) (1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s) (1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- Comportamento per $\omega \rightarrow 0+$. Si distinguono due casi:

1) Se $h = 0$, il diagramma parte da un punto dell'asse reale:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K_1 \frac{b_0}{a_0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0+} G(j\omega) = K$$

Per piccoli valori di ω , si possono trascurare le potenze superiori di ω :

$$G(j\omega) \simeq K_1 \frac{b_0 + b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega} \quad \rightarrow \quad \Delta \arg G(j\omega) \simeq \underbrace{\left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}\right)}_{\Delta_\tau} \omega$$

Con $\Delta \arg G(j\omega)$ si è indicata la variazione dell'argomento di $G(j\omega)$ rispetto al valore che essa assume per $\omega = 0$.

- Nel caso della forma fattorizzata a costanti di tempo si ha:

$$\Delta \arg G(j\omega) \simeq \underbrace{\left(\tau'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - \tau_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots\right)}_{\Delta_\tau} \omega$$

- Il diagramma polare lascia l'asse reale ruotando in senso orario o antiorario a seconda che il coefficiente Δ_τ sia negativo o positivo.

2) Se $\boxed{h > 0}$, il diagramma parte da un punto all'infinito:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg G(j\omega) = -h \frac{\pi}{2} - \varphi_0$$

con $\varphi_0 = 0$ o $\varphi_0 = \pi$ a seconda che il valore di $K_1 b_0/a_h$ (o quello di K) sia positivo o negativo.

- Nel caso $\boxed{h=1}$ i diagrammi polari presentano un asintoto verticale la cui ascissa σ_a si determina calcolando il valore della parte reale di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$:

$$\sigma_a = K_1 \frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2}$$

Nel caso in cui la $G(s)$ sia data in forma fattorizzata si ha che:

$$\sigma_a = K \left(\tau'_1 + \dots + 2 \frac{\delta'_1}{\omega'_{n1}} + \dots - \tau_1 - \dots - 2 \frac{\delta_1}{\omega_{n1}} - \dots \right) = K \Delta_\tau$$

- Quando è $h > 1$, il diagramma polare inizia in un punto all'infinito, ma nel diagramma non è presente nessun asintoto.
- $\boxed{\text{Comportamento per } \omega \rightarrow \infty}$. Se è $\boxed{m=n}$, il diagramma termina in un punto dell'asse reale:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = K_1 = K \frac{\tau'_1 \tau'_2 \dots \frac{1}{\omega'_{n1}} \frac{1}{\omega'_{n2}} \dots}{\tau_1 \tau_2 \dots \frac{1}{\omega_{n1}} \frac{1}{\omega_{n2}} \dots}$$

Se è $\boxed{m < n}$, il diagramma termina nell'origine tangente ad uno degli assi coordinati:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} + (\text{sign } K_1 - 1) \frac{\pi}{2}$$

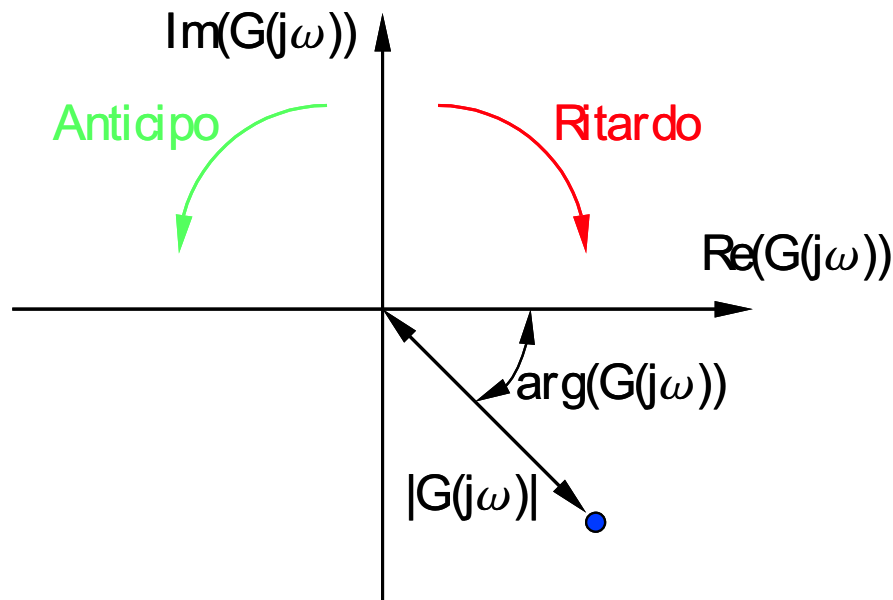
- $\boxed{\text{Rotazioni intorno all'origine per } \omega \text{ variabile da } 0 \text{ a } \infty}$. La variazione "al finito" $\Delta \arg G(j\omega)$ dell'argomento di $G(j\omega)$ per ω variabile da zero all'infinito è

$$\Delta \arg G(j\omega) = (m-n) \frac{\pi}{2} - (\mu - \nu) \frac{\pi}{2} - (n_z - n_p) \pi$$

dove μ e ν sono i numeri degli zeri e dei poli immaginari, con n_z ed n_p quelli degli zeri e dei poli a parte reale positiva.

Diagrammi di Nyquist: graficazione qualitativa

- Diagramma di Nyquist: diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$:



- I diagrammi di Nyquist si possono ricavare dai diagrammi di Bode oppure si può adottare un procedimento per la graficazione qualitativa e diretta:
 1. Punto di partenza del diagramma.
 2. Anticipo o ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0 .
 3. Determinazione dell'asintoto verticale per i sistemi di tipo 1.
 4. Punto di arrivo.
 5. Graficazione qualitativa.
 6. Punti di intersezione con l'asse reale.
 7. "Chiusura" del diagramma.
- NOTA: Le costanti di tempo di poli o zeri semplici o complessi e coniugati sono definite nel seguente modo:

$$\begin{array}{ll}
 (1 + \tau s) & \text{Costante di tempo } \tau \\
 \left(1 + \frac{2\delta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) & \text{Costante di tempo } \tau = \frac{2\delta}{\omega_n}
 \end{array}$$

Graficazione dei diagrammi di Nyquist

● Esempio:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Punto di partenza ($\omega \rightarrow 0^+$). Detta K la costante moltiplicativa di $G(s)$ nella forma a costanti di tempo, per un sistema di tipo h il punto iniziale del diagramma è dato da (esempio $K = 3/2$, $h = 1$, $|G(s)| = \infty$, $\varphi_0 = -\pi/2$):

$$|G(s)|_{\omega \rightarrow 0^+} = \begin{cases} |K| & \text{per } h = 0 \\ \infty & \text{per } h \geq 1 \end{cases}$$

$$\arg G(s)_{\omega \rightarrow 0^+} = \begin{cases} \varphi_0 = -h \frac{\pi}{2} & K > 0 \\ \varphi_0 = -\pi - h \frac{\pi}{2} & K < 0 \end{cases}$$

2. Anticipo o ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0 . È sufficiente calcolare il segno della seguente costante:

$$\Delta_a = \sum \tau'_i - \sum \tau_j \rightarrow \begin{cases} \Delta_a > 0 & \text{Anticipo (senso antiorario)} \\ \Delta_a < 0 & \text{Ritardo (senso orario)} \end{cases}$$

dove τ'_i e τ_j rappresentano, rispettivamente, le costanti di tempo degli zeri e dei poli della funzione $G(s)$. Nell'esempio $\Delta_a = \frac{1}{3} - 5 - \frac{3}{20} < 0$.

3. Determinazione dell'asintoto verticale per i sistemi di tipo 1. L'ascissa σ_a dell'asintoto verticale è:

$$\sigma_a = K \left(\sum \tau'_i - \sum \tau_j \right) = K \Delta_a = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - 5 - \frac{3}{20} \right) = -7.23$$

L'ascissa σ_a deve essere coerente con i risultati dei punti 1 e 2.

4. Punto di arrivo ($\omega \rightarrow \infty$). Detta K_p la costante moltiplicativa di $G(s)$ nella forma a poli e zeri, per un sistema di grado relativo r il punto di arrivo del diagramma è dato da (esempio $K_p = 10$, $r = 3$, $|G(s)| = 0$, $\varphi_\infty = -3\pi/2$):

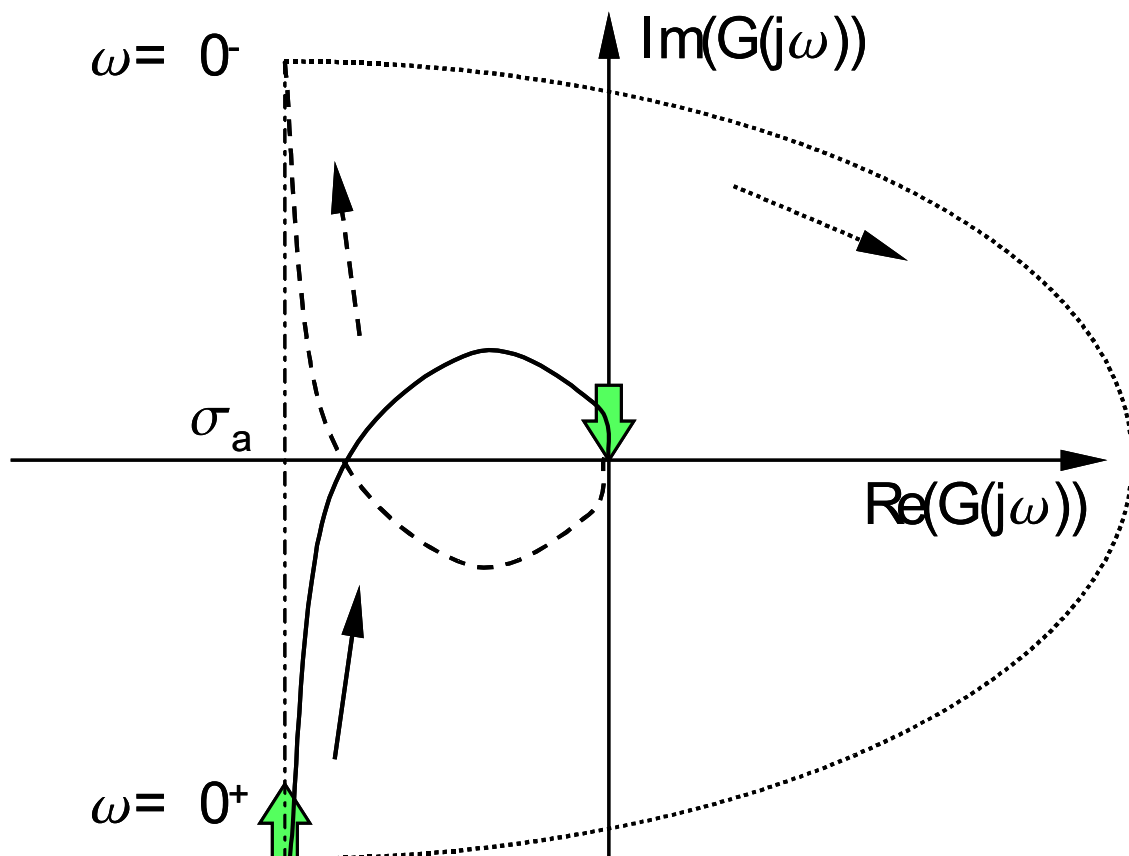
$$|G(s)|_{\omega \rightarrow \infty} = \begin{cases} |K_p| & \text{per } r = 0 \\ 0 & \text{per } r \geq 1 \end{cases}$$

$$\arg G(s)_{\omega \rightarrow \infty} = \begin{cases} \varphi_\infty = -r\frac{\pi}{2} & K_p > 0 \\ \varphi_\infty = -\pi - r\frac{\pi}{2} & K_p < 0 \end{cases}$$

5. Graficazione qualitativa. Si collega il punto iniziale del diagramma di Nyquist ($\omega \rightarrow 0^+$) con il punto finale ($\omega \rightarrow \infty$) facendo attenzione a muoversi nel piano complesso in modo congruente ai poli e agli zeri stabili/instabili di $G(s)$ che si incontrano progressivamente al crescere di ω .
6. Punti di intersezione con l'asse reale. Si calcolano i valori di ω per i quali $\text{Im}(G(j\omega)) = 0$. Questo procedimento può essere molto lungo quindi è preferibile usare il CRITERIO DI ROUTH.

7. “Chiusura” del diagramma. Si definisce diagramma polare completo la curva “chiusa” che il punto $G(j\omega)$ descrive sul piano complesso al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$. Il diagramma di Nyquist descritto ai punti precedenti fa riferimento al caso $\omega > 0$. La parte del diagramma di Nyquist relativa ad $\omega < 0$ si ottiene dalla precedente semplicemente ribaltando il diagramma rispetto all’asse reale. Nel caso in cui la funzione $G(s)$ abbia dei poli nell’origine, il diagramma così ottenuto è ancora “aperto”. Per chiuderlo correttamente occorre seguire la seguente regola: il diagramma di Nyquist va chiuso all’infinito partendo da $G(j0^-)$, arrivando a $G(j0^+)$ e inserendo tante semi-circonferenze percorse in senso orario quanti sono (h) i poli nell’origine della funzione $G(s)$.

- Nell’esempio in esame si ha:



Funzioni approssimanti

- Sia nei diagrammi di Bode, sia in quelli di Nyquist il comportamento di una generica $G(s)$ per $s \rightarrow 0^+$ e per $s \rightarrow \infty$ si può studiare considerando rispettivamente le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$.
- $G_0(s)$ è la funzione approssimante di $G(s)$ per $s \rightarrow 0^+$. Si ottiene trascurando tutti i termini in s ad esclusione dei poli nell'origine, QUALUNQUE sia la forma di $G(s)$:

$$G_0(s) = \frac{10(\beta + 3)}{s(\beta + 0.2)(\beta^2 + 15\beta + 100)} = \frac{30}{20s} = \frac{3}{2s}$$

$$G_0(s) = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{\beta}{3}\right)}{s(1 + \beta s) \left(1 + \frac{\beta s}{20} + \frac{\beta^2 s^2}{100}\right)} = \frac{3}{2s}$$

- $G_\infty(s)$ è la funzione approssimante di $G(s)$ per $s \rightarrow \infty$. Si ottiene considerando solo le potenze di s dominanti all'interno di ogni fattore, QUALUNQUE sia la forma di $G(s)$:

$$G_\infty(s) = \frac{10(s + \beta)}{s(s + 0.2)(s^2 + 15s + 100)} = \frac{10s}{s s s^2} = \frac{10}{s^3}$$

$$G_\infty(s) = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1 + 5s) \left(1 + \frac{\beta s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)} = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{s}{3}\right)}{s(5s) \left(\frac{s^2}{100}\right)} = \frac{10}{s^3}$$

- Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ si possono usare al posto delle formule introdotte in precedenza per determinare velocemente i punti di partenza e di arrivo sia dei diagrammi di Nyquist sia di quelli di Bode perchè sono caratterizzate solo da costanti moltiplicative e da eventuali poli nell'origine. Esempio:

$$G_0(s) = \frac{3}{2s} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0^+} = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \\ \varphi_\infty = -3\frac{\pi}{2} \end{cases}$$