

## Diagrammi di Bode

- Possibili rappresentazioni grafiche della funzione di risposta armonica  $F(\omega) = G(j\omega)$  sono: i *Diagrammi di Bode*, i *Diagrammi di Nyquist* e i *Diagrammi di Nichols*.

- I *Diagrammi di Bode* sono due:

- 1) il diagramma delle ampiezze rappresenta  $\alpha = \ln |G(j\omega)|$  in funzione del  $\ln \omega$ ;
- 2) il diagramma delle fasi rappresenta  $\beta = \arg G(j\omega)$  in funzione del  $\ln \omega$ ;

$$\begin{aligned} \ln G(j\omega) &= \ln \left[ |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \right] = \ln |G(j\omega)| + \ln [e^{j \arg G(j\omega)}] \\ &= \ln |G(j\omega)| + j \arg G(j\omega) \end{aligned}$$

- Esempio:

Diagramma delle ampiezze

$$G(j\omega) = \frac{100 \left(1 + j \frac{\omega}{80}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{10}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{1000}\right)}$$

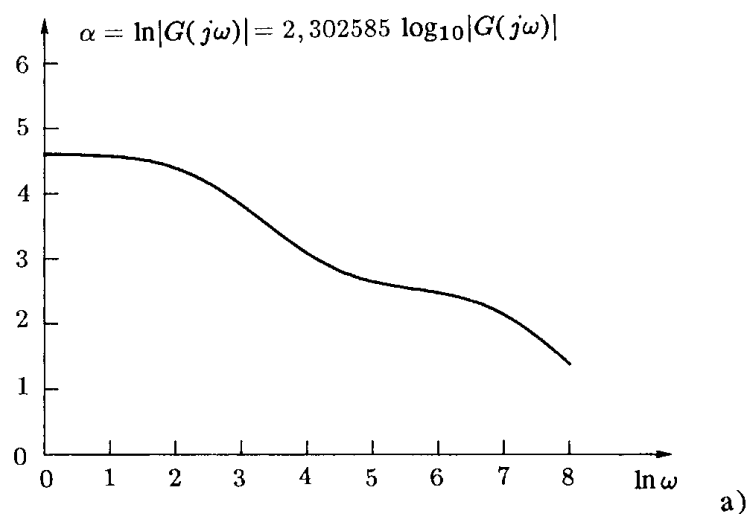
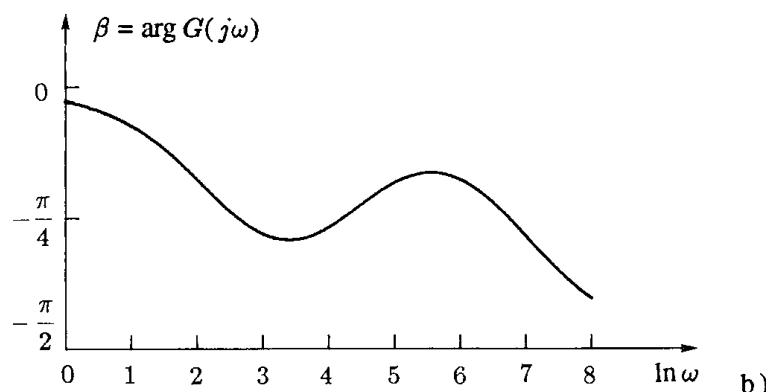
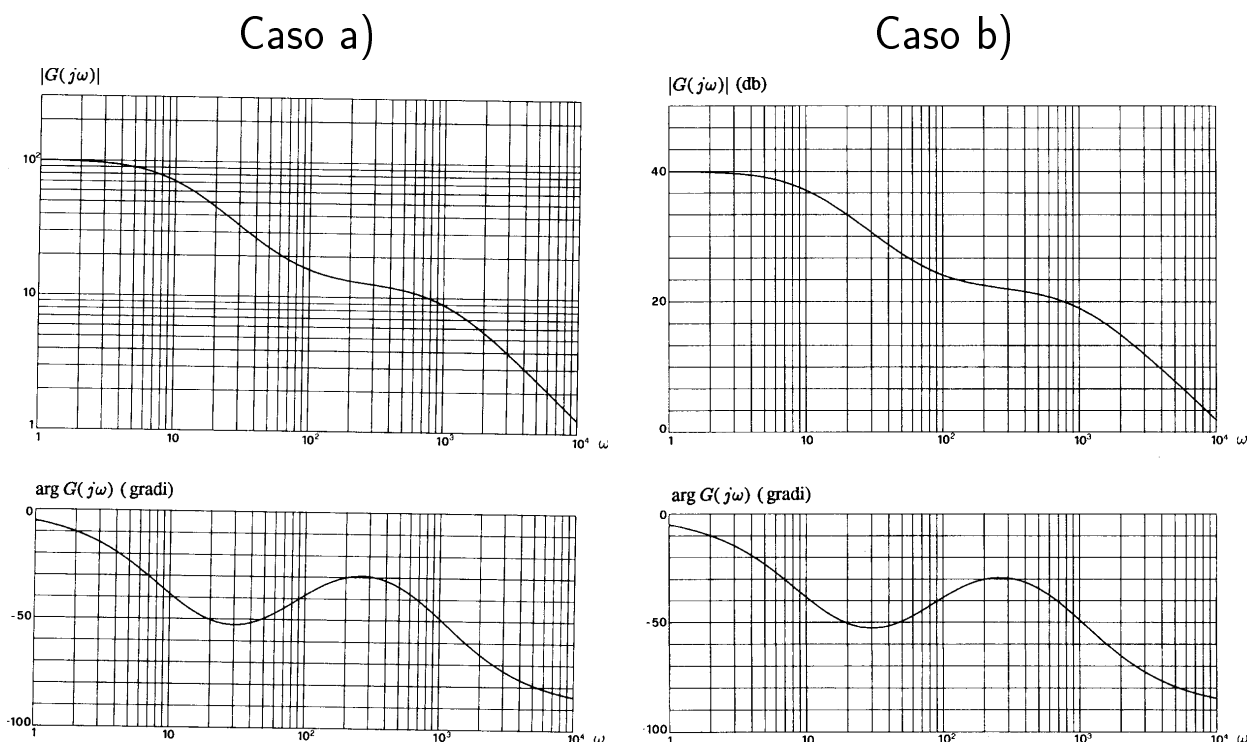


Diagramma delle fasi



- Per i calcoli si utilizzano i logaritmi naturali. Peraltro, un cambiamento di base dei logaritmi equivale ad un semplice cambiamento di scala.
- Si possono utilizzare due tipi diversi di carta millimetrata:
  - a) carta con doppia scala logaritmica per le ampiezze e carta semilogaritmica per le fasi;
  - b) carta semilogaritmica sia per le ampiezze sia per le fasi. In questo caso la scala delle ampiezze è graduata in decibel:  $B = 20 \log_{10} A$ .



- I vantaggi che si hanno impiegando una scala logaritmica sono:
  - i) è possibile avere una rappresentazione dettagliata di grandezze che variano in campi notevolmente estesi;
  - ii) i diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi;
  - iii) i diagrammi di Bode di una funzione data in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori.

Conversione in db e viceversa

- Il *decibel* è un'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere il guadagno di amplificatori.

$$B(\text{db}) = 20 \log_{10} A$$

- Per la conversione si può utilizzare il seguente diagramma:

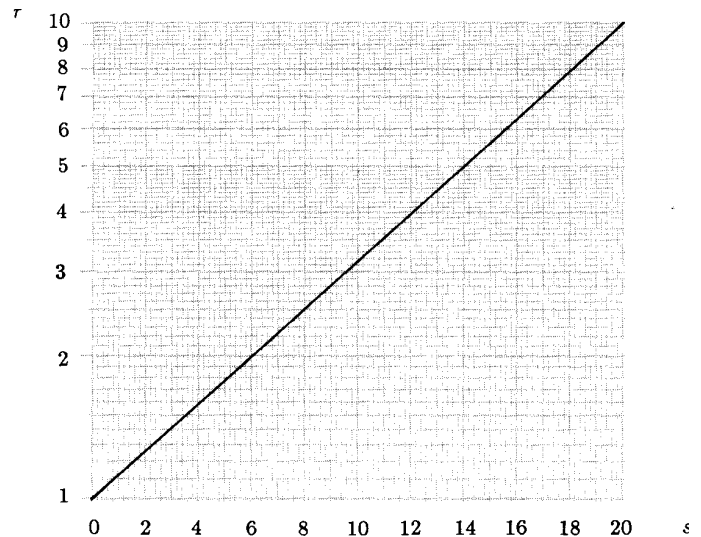
Posto  $A$  nella forma:

$$A = r \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq r < 10,$$

il valore di  $A$  in decibel è:

$$B = 20n + s \text{ db}$$

dove  $s$  si ricava dal diagramma a fianco:  $0 \leq s < 20$ .



- Alcune conversioni di uso frequente:

$A$	$B = 20 \log_{10} A$
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
5	14
10	20
20	26
50	34
100	40
1000	60
10000	80
0.5	-6
0.1	-20
0.01	-40

– Esempio 1:

$$A = 24$$

$$A = 2.4 \cdot 10^1$$

$$B \simeq 20 + 8 = 28$$

– Esempio 2:

$$A = 0.56$$

$$A = 5.6 \cdot 10^{-1}$$

$$B \simeq -20 + 15 = -5$$

– Ogni 6 db il valore di  $A$  raddoppia;

– Ogni 20 db il valore di  $A$  è moltiplicato per 10;

- Si consideri una generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

- Il fattore  $s^h$  corrisponde ad un eventuale polo nell'origine avente ordine di molteplicità  $h$ : se la funzione di trasferimento non presenta poli nell'origine, è  $h=0$ .

- Forma fattorizzata a poli e zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_{h+1})(s - p_{h+2}) \dots (s - p_n)}$$

- Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- La funzione di risposta armonica si ottiene ponendo  $s = j\omega$ :

$$G(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega\tau'_1)(1 + j\omega\tau'_2) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{(j\omega)^h (1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- Il diagramma di Bode della funzione  $G(j\omega)$  si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle seguenti funzioni elementari:

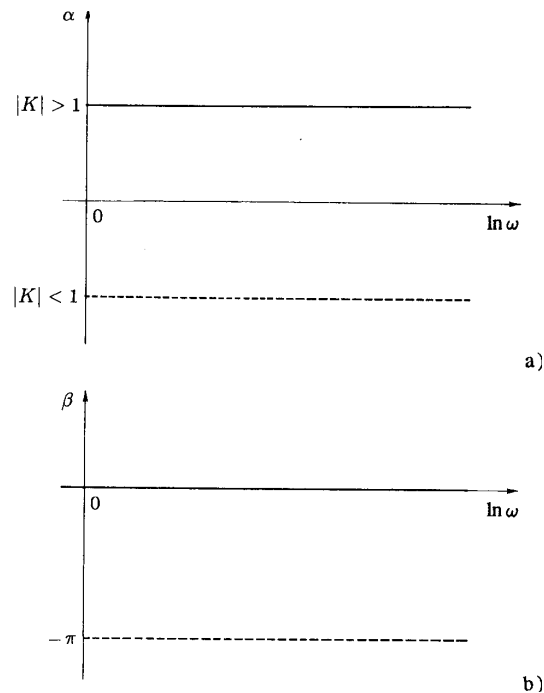
$$\begin{aligned} &K \\ &(j\omega)^{-h} \\ &(1 + j\omega\tau)^{\pm 1} \\ &\left(1 + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1} \end{aligned}$$

- Guadagno costante:  $G(j\omega) = K$ .

- I diagrammi dei moduli e della fasi sono indipendenti da  $\omega$ , cioè sono costanti;

- Se  $K > 0$ , il diagrammi delle fasi è  $\beta = 0$ ;

- Se  $K < 0$ , il diagramma delle fasi è  $\beta = -\pi$ .

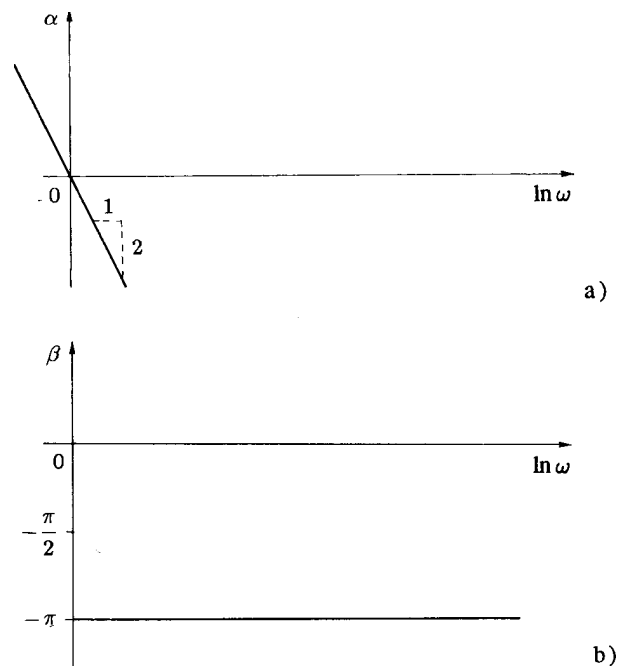


- Poli nell'origine:  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$ .

- I diagrammi riportati a fianco sono relativi al caso  $h = 2$ ;

- In scala  $(\ln, \ln)$ , il diagramma delle ampiezze è una retta passante per il punto  $(\omega, \alpha) = (1, 0 \text{ db})$  e di inclinazione  $-h$ ;

- Il diagramma delle fasi è costante, identicamente uguale a  $-h\frac{\pi}{2}$ ;



- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\omega^h} - j h \frac{\pi}{2} = -h \ln \omega - j h \frac{\pi}{2}$$

- Poli nell'origine:  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} + j(-\arctan \omega\tau)$$

- Diagrammi asintotici di Bode:

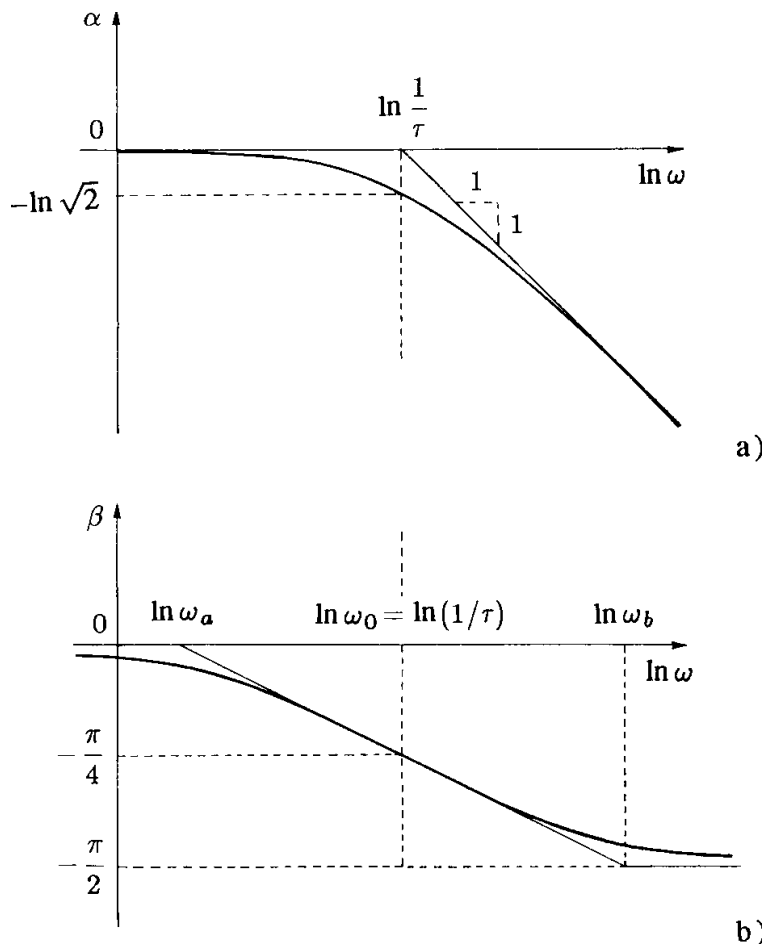
Diagramma delle ampiezze:

a) per  $\omega \ll 1/\tau$ , si ottiene  $\alpha \simeq 0$ , cioè il diagramma tende a coincidere con l'asse delle ascisse.

b) per  $\omega \gg 1/\tau$ , si ottiene

$$\alpha \simeq \ln \frac{1}{\omega\tau} = \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega$$

cioè il diagramma tende alla retta passante per il punto  $\ln \omega = \ln(1/\tau)$  e di inclinazione  $-1$ ;



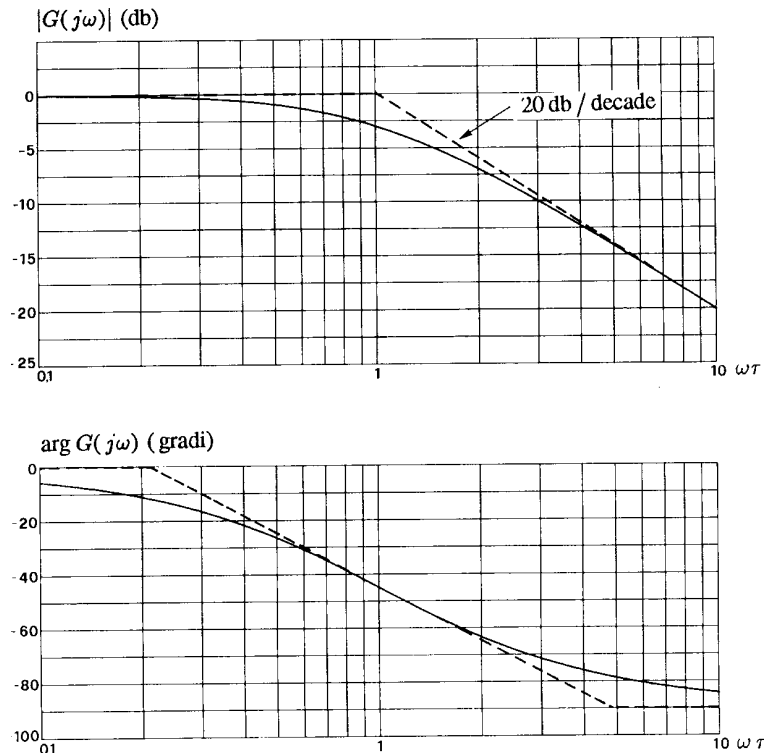
- L'approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze è pertanto costituita dalle due semirette

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{per } \ln \omega \leq \ln \frac{1}{\tau} , \\ \ln \frac{1}{\tau} - \ln \omega & \text{per } \ln \omega \geq \ln \frac{1}{\tau} , \end{cases}$$

- Il massimo errore della rappresentazione asintotica si ha per  $\omega = 1/\tau$  e vale  $\ln \sqrt{2}$  (circa 3db).
- La pendenza  $-1$ , su carta semilogaritmica diventa  $-20$  db/decade;

- Diagramma asintotico delle fasi:

La spezzata si ottiene collegando i due asintoti  $\beta = 0$  e  $\beta = -\pi/2$  con la tangente al diagramma effettivo nel punto corrispondente alla *pulsazione di rottura*  $\omega_0 = 1/\tau$ , punto in cui è  $\beta = -\pi/4$ .



- Essendo  $\beta = -\arctan \omega\tau$ , si può scrivere

$$\left. \frac{d\beta}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \frac{d\omega}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\omega_0 \tau}{1 + \omega_0^2 \tau^2} = -\frac{1}{2}$$

- Le pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_b$  si determinano utilizzando la relazione

$$\frac{\pi/4}{\ln \omega_0 - \ln \omega_a} = \frac{\pi/4}{\ln \omega_b - \ln \omega_0} = \frac{1}{2}$$

da cui si ottiene

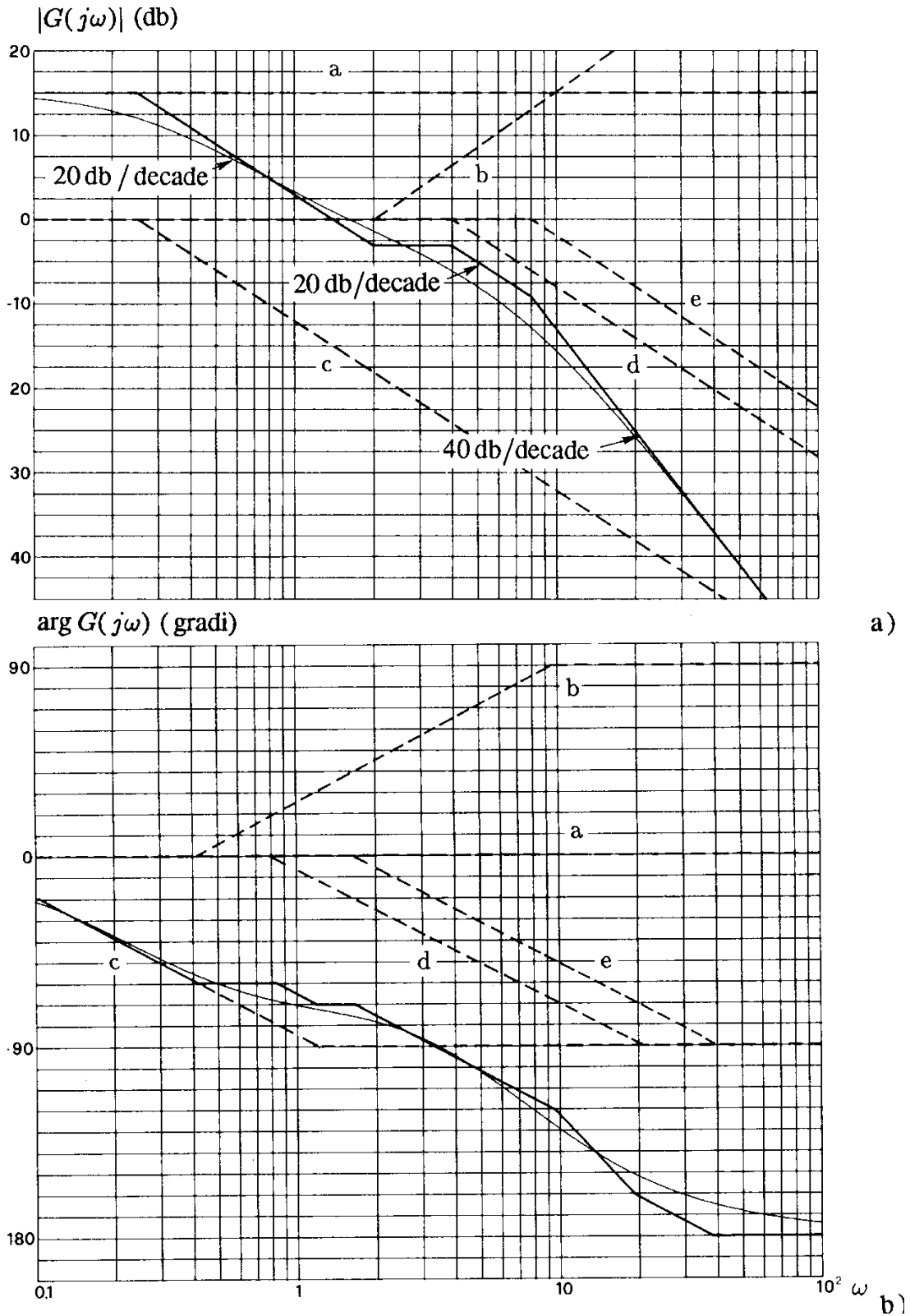
$$\ln \frac{\omega_0}{\omega_a} = \ln \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81}$$

- I diagrammi di Bode della funzione  $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$  si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli della funzione  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$ .
- Quando la costante di tempo  $\tau$  è negativa, il diagramma delle ampiezze risulta immutato, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

- **Esempio.** Si consideri la seguente funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{5,6 (1 + j\omega 0,5)}{(1 + j\omega 4) (1 + j\omega 0,25) (1 + j\omega 0,125)}$$

- Diagrammi di Bode:





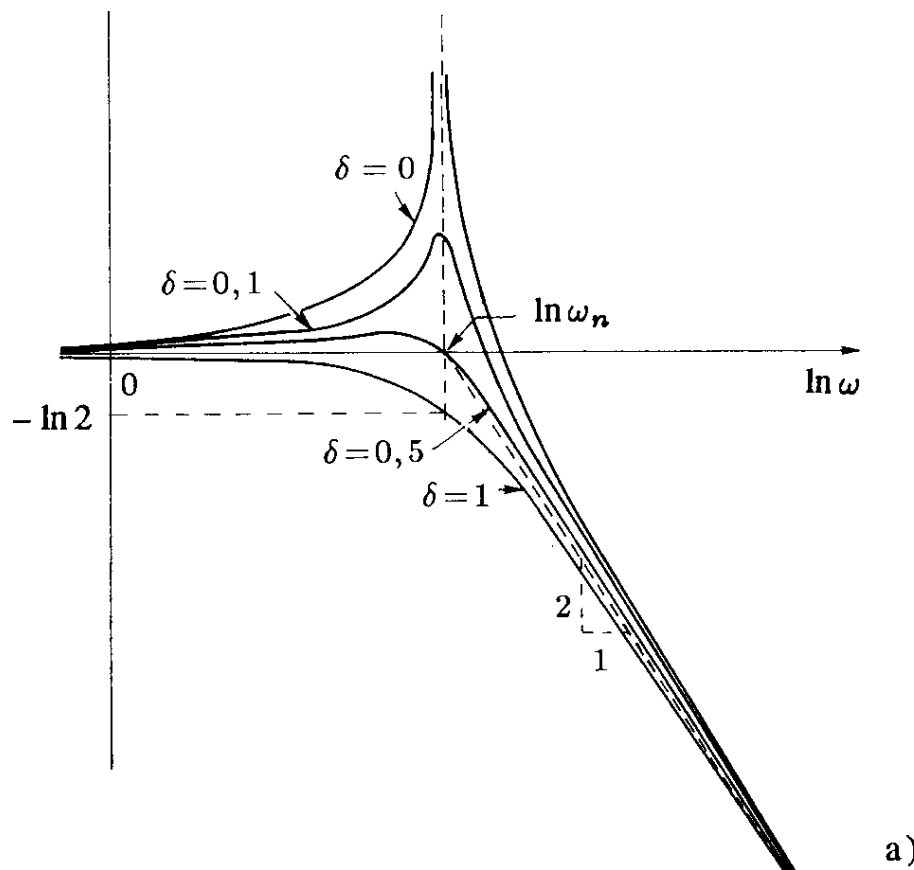
- Poli complessi coniugati ( $0 \leq \delta < 1$ ):

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} - j \arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Diagramma di Bode delle ampiezze:



- Asintoti del diagramma  $\alpha$ : per  $\omega/\omega_n \ll 1$ , tutti i termini sotto radice quadrata sono trascurabili rispetto all'unità ed è pertanto  $\alpha \simeq 0$ ; per  $\omega/\omega_n \gg 1$ , ha la prevalenza il termine  $(\omega/\omega_n)^4$  e si può scrivere pertanto

$$\alpha \simeq -\ln \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 2 \ln \omega_n - 2 \ln \omega$$

- Il diagramma effettivo si può discostare sensibilmente da quello asintotico: in particolare, per  $\delta=0$  e in corrispondenza della pulsazione di rottura  $\omega_n$ , lo scostamento è infinito.
- Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:
  - 1) per  $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , presenta un massimo;
  - 2) per  $0 \leq \delta \leq 1/2$ , interseca l'asse a destra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 3) per  $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , interseca l'asse a sinistra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 4) per  $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$ , non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.
- Pulsazione di risonanza  $\omega_R$ . Posto  $u = \omega/\omega_n$ , il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4 \delta^2 u^2$$

Derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4(1 - u^2)u + 8\delta^2 u = 0$$

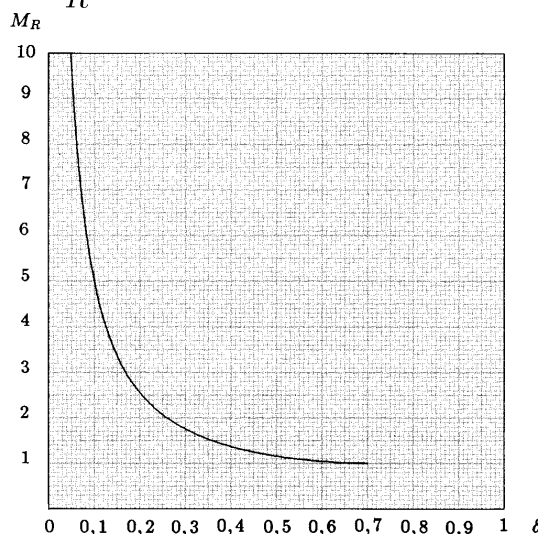
Trascurando la soluzione nulla si ottiene

$$u_R = \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}}$$

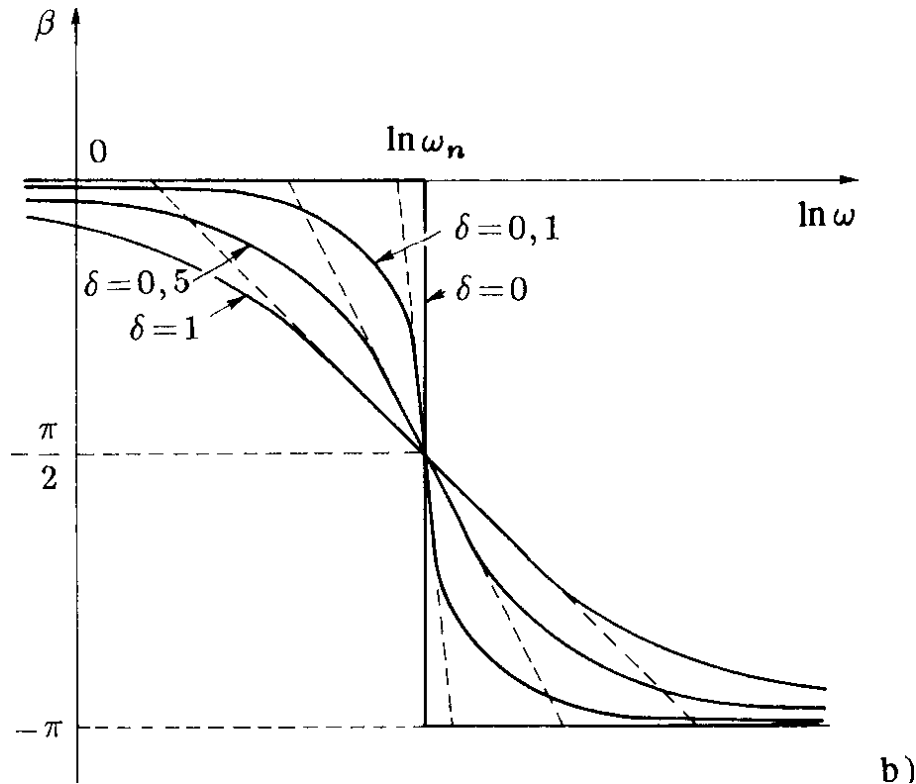
- Picco di risonanza  $M_R$ : si calcola come modulo della funzione di risposta armonica in corrispondenza della pulsazione  $\omega_R$ :

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}}$$

$$\boxed{M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}}$$



- Diagramma di Bode della fasi:



- Approssimazione asintotica del diagramma delle fasi si ottiene congiungendo gli asintoti  $\beta = 0$  e  $\beta = -\pi$  con un segmento inclinato di pendenza opportuna.
- Essendo  $\beta = -\arctan \frac{2\delta u}{1-u^2}$ , si deduce:

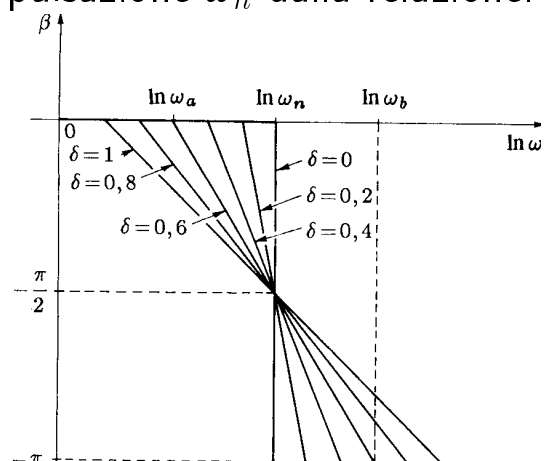
$$\left. \frac{d\beta}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_n} = \left. \frac{d\beta}{du} \frac{du}{d \ln \omega} \right|_{u=1} = - \left. \frac{1}{1 + \left( \frac{2\delta u}{1-u^2} \right)^2} \frac{2\delta(1+u^2)u}{(1-u^2)^2} \right|_{u=1} = -\frac{1}{\delta}$$

- Le pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_b$  sono legate alla pulsazione  $\omega_n$  dalla relazione:

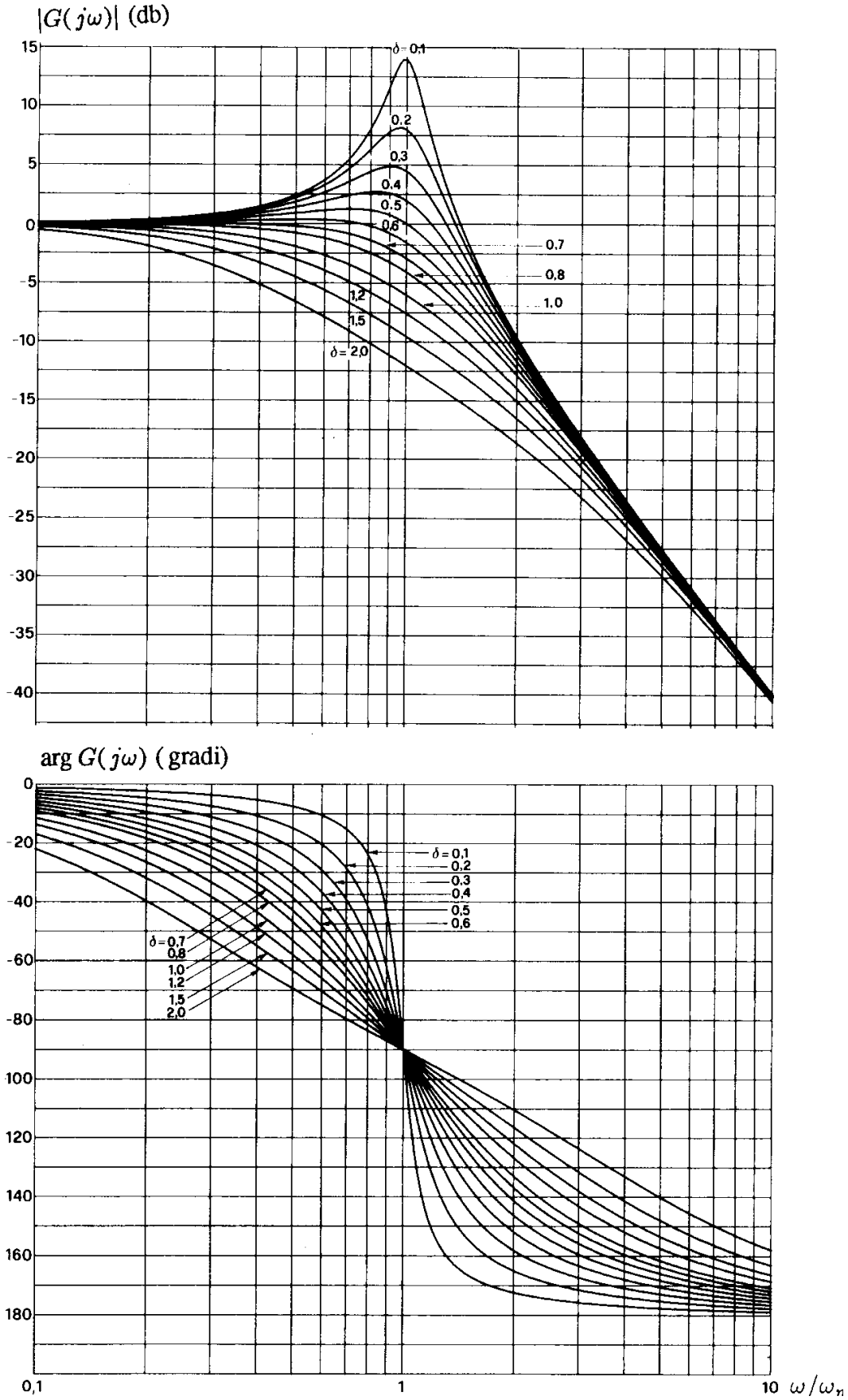
$$\frac{\pi/2}{\ln \omega_n - \ln \omega_a} = \frac{\pi/2}{\ln \omega_b - \ln \omega_n} = \frac{1}{\delta}$$

dalla quale si ottiene

$$\boxed{\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^\delta}$$



- Diagrammi delle ampiezze e delle fasi in scala semilogaritmica:



## Graficazione “qualitativa” dei diagrammi di Bode

Si procede alla graficazione del **diagramma asintotico** di Bode della funzione di risposta armonica assegnata. Due possibili metodi.

### Primo metodo: somma dei singoli contributi

a) La funzione  $G(s)$  viene messa nella forma “a costanti di tempo”:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \quad \rightarrow \quad G(s) = -\frac{10}{25} \frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

b) Si tracciano i diagrammi asintotici di Bode delle singole componenti:

$$K = -\frac{10}{25}, \quad G_1(s) = (1-s), \quad G_2(s) = \frac{1}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{(1+s)}, \quad G_4(s) = \frac{1}{(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

c) Si sommano i singoli contributi per ottenere il diagramma asintotico della funzione  $G(s)$ .

- Il contributo del termine  $K$  è costante:  $|K| = -7.96$  db e  $\arg K = -\pi$ .

- Lo zero instabile  $(1-s)$ , e il polo stabile  $(1+s)^{-1}$  agiscono alla pulsazione  $\omega = 1$  e forniscono due contributi uguali e contrari nel diagramma delle ampiezze. Il loro contributo nel diagramma delle fasi si somma: l'ampiezza complessiva per  $\omega \rightarrow \infty$  è  $-\pi$ .

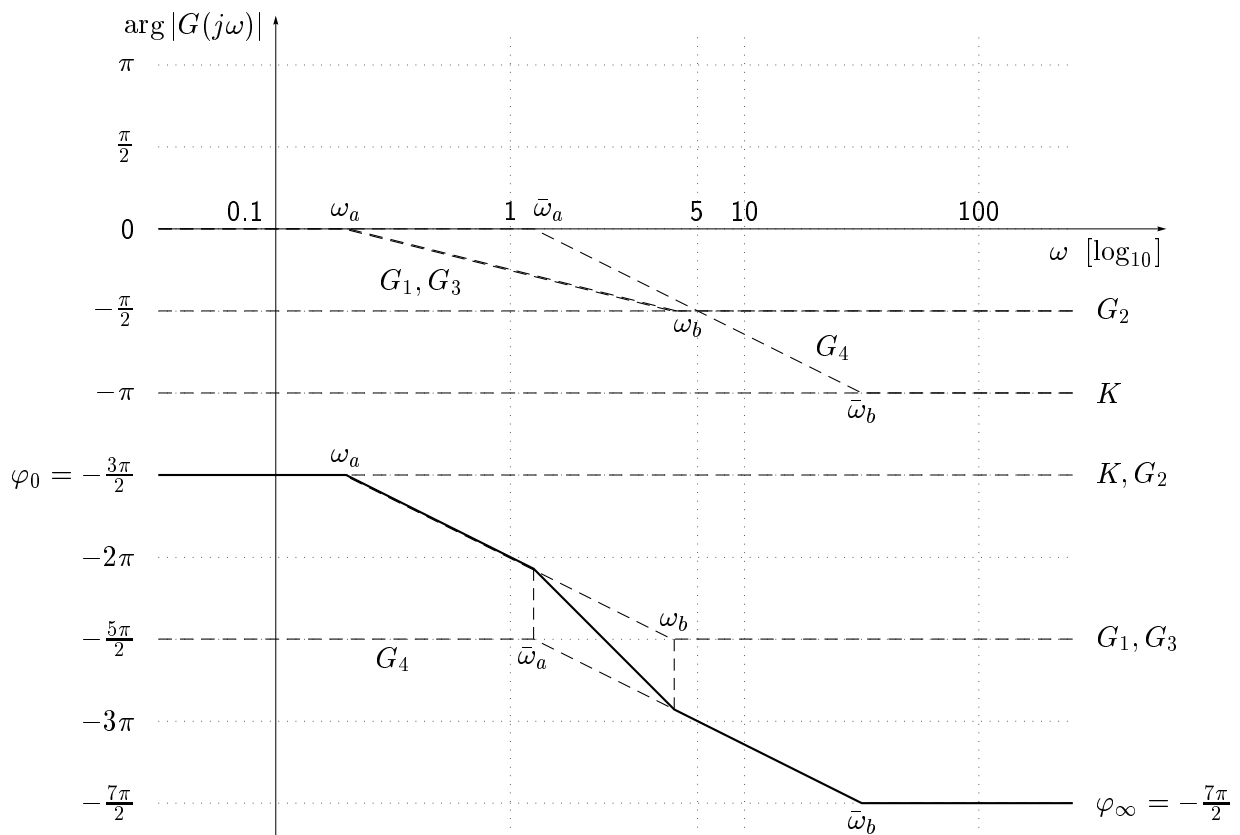
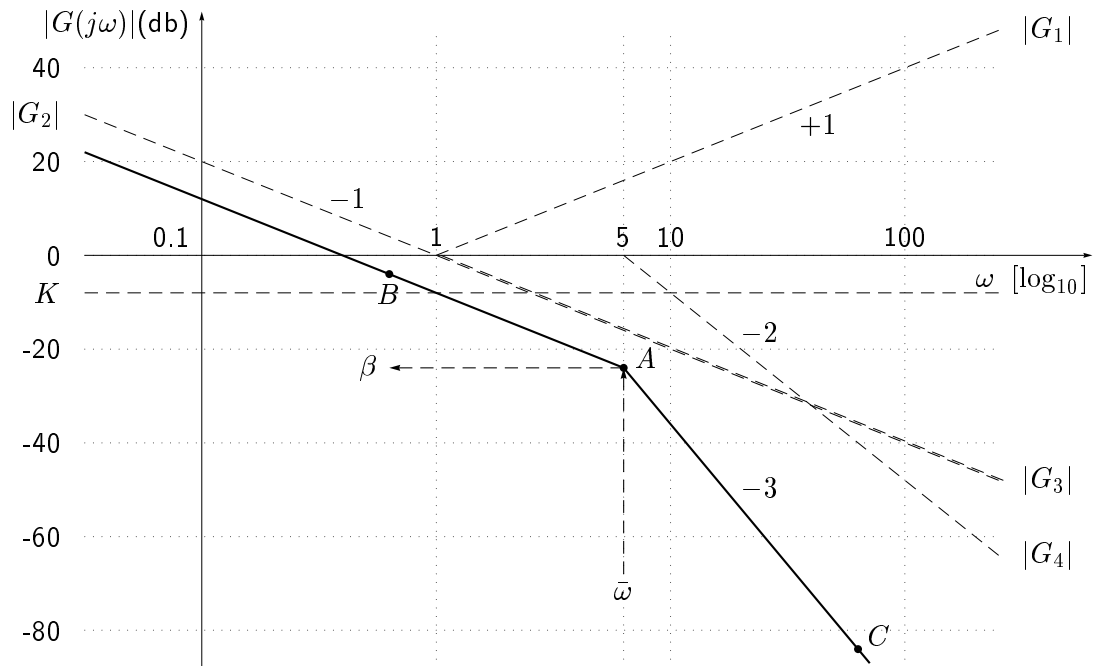
- La coppia di poli complessi coniugati  $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$  determina sul diagramma asintotico delle ampiezze una attenuazione di  $-40$  db/dec a partire dalla pulsazione  $\omega_n = 5$ . Il contributo al diagramma delle fasi è negativo di ampiezza complessiva  $-\pi$  al variare di  $\omega$ . Le pulsazioni alle quali si ha un cambiamento di pendenza del diagramma asintotico di Bode delle fasi sono le seguenti

$$\omega_a = \frac{1}{4.81}, \quad \omega_b = 4.81, \quad \bar{\omega}_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \quad \bar{\omega}_b = \omega_n 4.81^\delta$$

dove  $\delta = 0.8$  è il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati.

- La difficoltà nell'utilizzare questo metodo sta nel fatto che la somma dei singoli contributi non è sempre agevole.

Diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$



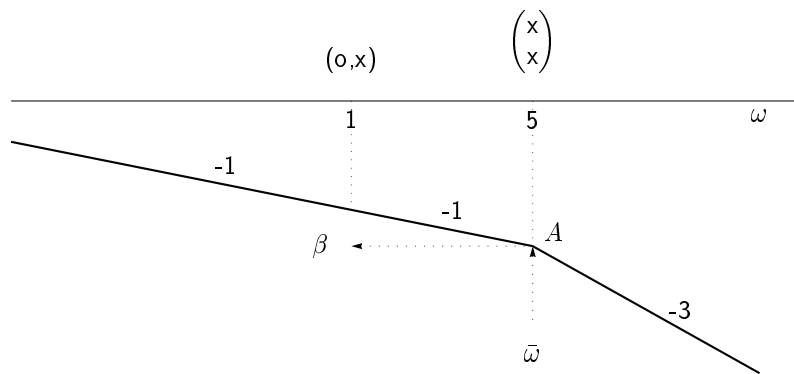
## Secondo metodo: graficazione “rapida”

### Diagramma delle ampiezze

a) Si individua nella funzione  $G(s)$  tutte le pulsazioni in corrispondenza delle quali si ha un cambiamento di pendenza. Tali pulsazioni coincidono con gli zeri reali, i poli reali e con le pulsazioni naturali  $\omega_n$  delle coppie di poli e zeri complessi coniugati della funzione  $G(s)$ . Nel caso in esame si ha  $\omega = 1$  e  $\omega = 5$ . Tali pulsazioni vengono ordinate in ordine crescente di modulo.

b) Tenendo conto del fatto che gli zeri (reali o complessi coniugati) determinano un incremento di pendenza (rispettivamente di  $+1$  e di  $+2$ ) e che, viceversa, i poli (reali o complessi coniugati) determinano un decremento della pendenza del diagramma asintotico (rispettivamente di  $-1$  e di  $-2$ ), è chiaro che la “forma” del diagramma asintotico è già nota a priori prima di iniziare la graficazione.

Nel caso in esame, per esempio, si ha:



In corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1$  non si ha cambiamento di pendenza perché a questa pulsazione agiscono contemporaneamente sia un polo che uno zero.

c) Si determina la posizione “verticale” del diagramma asintotico di Bode.

- Se la funzione  $G(s)$  è di tipo 0, il posizionamento verticale è automaticamente determinato dal calcolo del guadagno statico  $G(0)$ .

- Se il sistema è di tipo 1, o in generale di tipo  $h$ , il posizionamento verticale può avvenire, per esempio, calcolando la posizione del punto  $A$  in corrispondenza della pulsazione  $\bar{\omega}$  alla quale si ha il primo cambiamento di pendenza. Siano  $(\bar{\omega}, \beta)$  le coordinate del punto  $A$ . Se il sistema è di tipo  $h$ , il valore della coordinata  $\beta$  si determina in base alla formula:

$$\beta = \left| \frac{s^h G(s)}{\bar{\omega}^h} \right|_{s=0}$$

cioè si sostituisce  $\bar{\omega}^h$  al posto degli  $h$  poli nell'origine, mentre in tutti gli altri termini di  $G(s)$  si mette  $s = 0$ .

Nel caso in esame si ha  $h = 1$  ed  $\bar{\omega} = 5$  per cui

$$\beta = \left| \frac{s G(s)}{5} \right|_{s=0} = \left| \frac{10(s-1)}{5(s+1)(s^2+8s+25)} \right|_{s=0} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db}$$

d) È ora possibile tracciare il diagramma asintotico complessivo tracciando, a partire da  $A$ , i vari tratti della "spezzata", ognuno con la propria pendenza. Nel caso in esame, per esempio, il tratto di spezzata che precede il punto  $A$  si determina individuando il punto  $B$ . Questo punto si calcola a partire da  $A$  diminuendo la pulsazione di una decade ed aumentando di 20 db l'ampiezza:  $B = (0.5, \beta + 20)$ . Allo stesso modo si procede per determinare il tratto che segue il punto  $A$ . In questo caso, essendo -3 la pendenza di questo tratto, il punto  $C$  si determina aumentando la pulsazione di una decade e diminuendo l'ampiezza di 60 db:  $C = (50, \beta - 60)$ .

### Diagramma delle fasi

a) Anche la graficazione del diagramma asintotico delle fasi può essere fatta più "rapidamente" se si procede nel modo seguente. Si faccia riferimento al diagramma delle fasi riportato nella precedente figura.

- Si individua la fase di partenza  $\varphi_0$  del diagramma asintotico delle fasi calcolando la fase iniziale della funzione approssimante  $G_0(s)$  per  $\omega \rightarrow 0$ . Nel caso in esame, per esempio, la fase iniziale è  $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$ . Tale fase è comprensiva del segno negativo della costante  $K$  e della fase costante  $-\frac{\pi}{2}$  introdotta dal polo nell'origine.

- Si prendono in considerazione i poli e gli zeri in ordine crescente della loro pulsazione critica (cioè il valore assoluto del corrispondente polo o zero, oppure la  $\omega_n$  nel caso di coppie di poli o zeri complessi coniugati). Il diagramma asintotico di ciascun elemento viene disegnato in una diversa "fascia" in funzione dell'azione introdotta dai precedenti elementi, e in funzione del fatto che l'elemento sia stabile o instabile.

Nel caso in esame, per esempio, i primi due elementi da prendere in considerazione all'aumentare di  $\omega$  sono il polo stabile  $(s+1)^{-1}$  e lo zero instabile  $(s-1)$ . Questi due elementi agiscono contemporaneamente e ciascuno di essi introduce uno "sfasamento", per  $\omega \in [-\infty, \infty]$ , pari a  $-\frac{\pi}{2}$ . Il contributo



complessivo di questi due elementi è un diagramma asintotico di ampiezza  $-\pi$  da disegnare verso il basso nella fascia  $-\frac{3\pi}{2}$ ,  $-\frac{5\pi}{2}$ . Anche la coppia di poli complessi coniugati  $(1 + \frac{8s}{25} + \frac{s^2}{25})^{-1}$ , essendo stabili, introduce uno sfasamento di ampiezza complessiva  $-\pi$ . Il loro contributo al diagramma asintotico va quindi disegnato nella fascia  $-\frac{5\pi}{2}$ ,  $-\frac{7\pi}{2}$ .

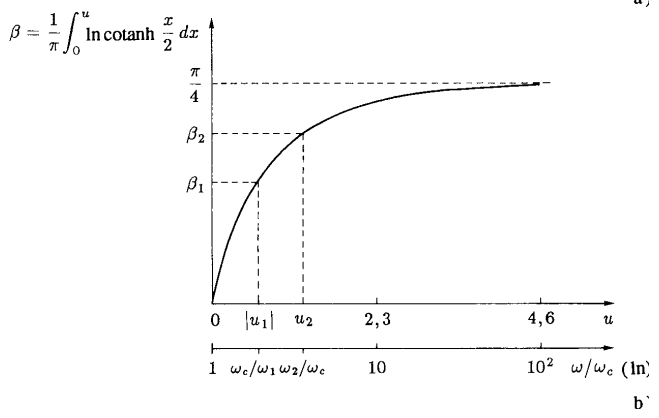
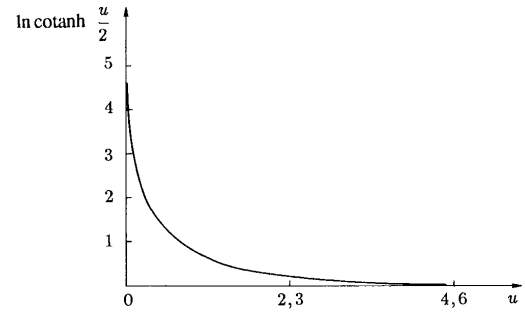
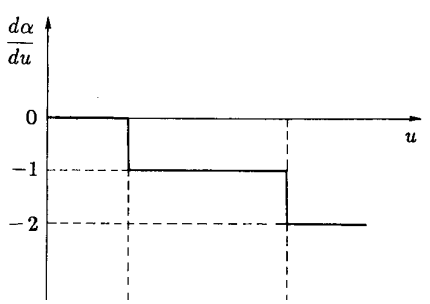
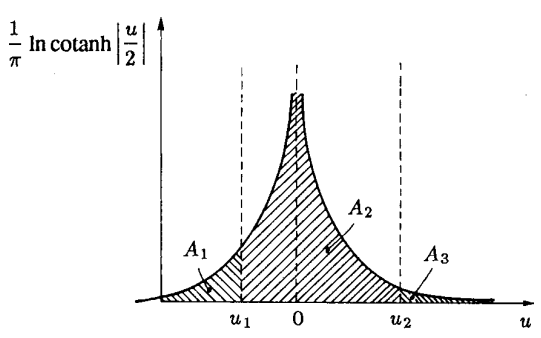
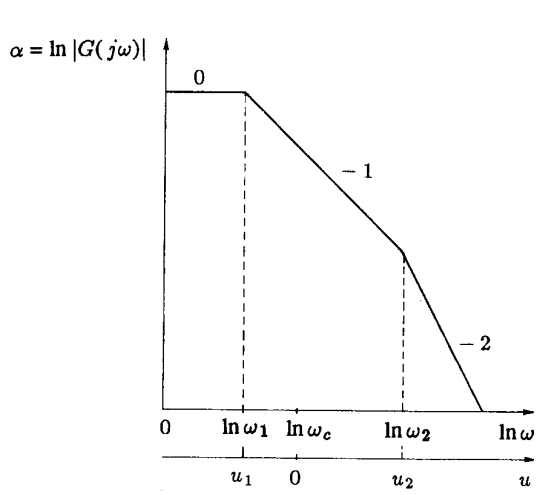
- Si procede alla graficazione del diagramma asintotico complessivo "interpolando" i diagrammi asintotici delle fasi dei singoli elementi, ognuno dei quali è stato disegnato nella fascia più opportuna. Nel caso in esame, è evidente che la determinazione dei punti intermedi di cambiamento di pendenza risulta notevolmente semplificato rispetto al caso di semplice somma dei singoli contributi asintotici. Si noti inoltre che la fase finale  $\varphi_\infty$  ottenuta è in accordo con la fase finale della funzione approssimante  $G_\infty(s)$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

# La formula di Bode

- Una funzione di trasferimento razionale fratta è a a fase minima se non ha né poli né zeri nel semipiano destro del piano  $s$ .
- Per sistemi a fase minima, detta  $\omega_c$  la pulsazione in corrispondenza della quale si vuole calcolare la fase  $\beta_c$ , vale la formula di Bode:

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \operatorname{cotanh} \left| \frac{u}{2} \right| du$$

in cui si è posto  $\alpha := \ln |G(j\omega)|$ ,  $u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$ .

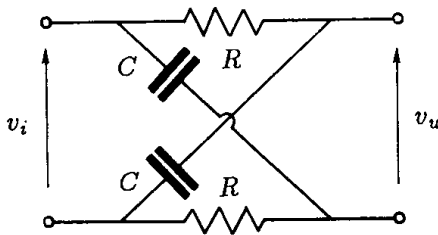


• La fase  $\beta_c$  in corrispondenza di una data pulsazione  $\omega_c$  dipende essenzialmente dalla pendenza  $\frac{d\alpha}{du}$  del diagramma delle ampiezze nell'intorno di quella pulsazione  $\omega_c$ .

• Esempio:  $\beta_c = 0 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2 - 2 \cdot A_3$  dove:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} - \beta_1, \quad A_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad A_3 = \frac{\pi}{4} - \beta_2$$

- Significato della variabile di integrazione  $u$ : se il diagramma  $\alpha$  è riferito ai logaritmi naturali, la variabile  $u$  non è altro che l'ascissa  $\ln \omega$  con l'origine traslata in  $\ln \omega_c$ .
- La condizione necessaria e sufficiente per la validità della formula di Bode, cioè che la funzione di trasferimento sia a fase minima, è soddisfatta per la quasi totalità dei sistemi che normalmente si considerano.
- Esempio di rete elettrica a fase non minima:



a)

- Funzione di trasferimento

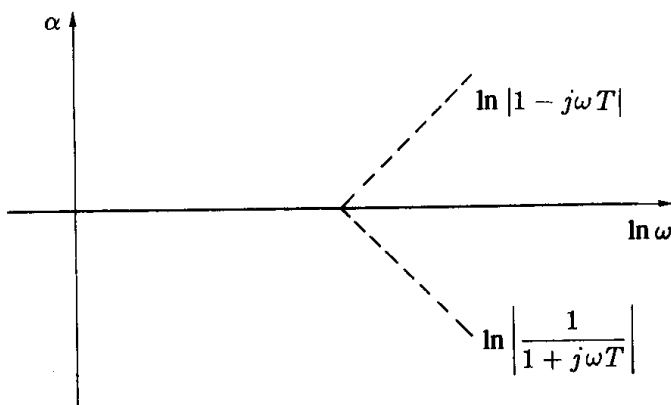
$$V_u(s) = \frac{1/Cs - R}{R + 1/Cs} V_i(s)$$

che, posto  $T := RC$ , diventa

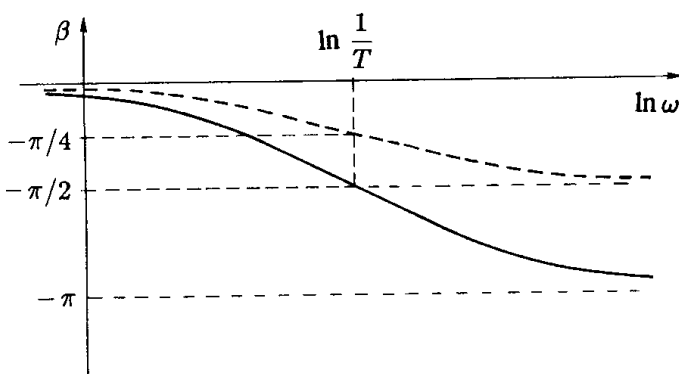
$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts},$$

cioè una funzione non a fase minima;

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi: il diagramma delle ampiezze è costante  $\alpha = 0$  ( $|G(j\omega)| = 1$ ), mentre il diagramma delle fasi varia gradualmente da  $0^\circ$  a  $-180^\circ$ .



b)



c)

- È chiaro che applicando la formula di Bode all'esempio si sarebbe invece dedotta una fase identicamente nulla.

- La funzione di trasferimento trascendente

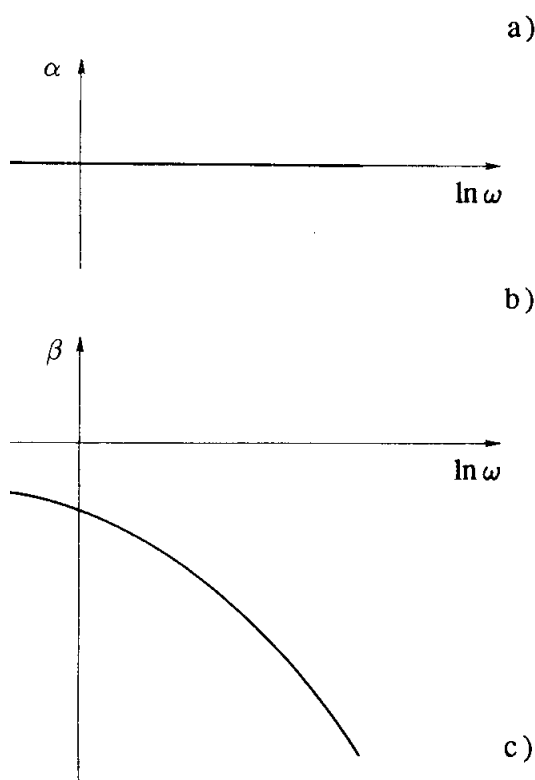
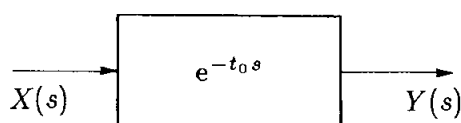
$$G(s) = e^{-t_0 s}$$

che rappresenta un ritardo finito di valore  $t_0$ , non è a fase minima.

- Essendo

$$G(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0 ,$$

la funzione di risposta armonica ha modulo identicamente unitario e fase crescente linearmente con la frequenza.



- Per ricavare i diagrammi di Bode, si scrive

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = 0 - j\omega t_0 = 0 - j t_0 e^{\ln \omega}$$

relazione dalla quale si deduce che il diagramma delle fasi ha un andamento esponenziale. Anche in questo caso l'applicazione della formula di Bode avrebbe condotto ad un risultato errato ( $\beta = 0$ ).

### Diagrammi di Bode: riepilogo

- I diagrammi di Bode si basano su alcune proprietà dei logaritmi e sulle proprietà valide per il modulo e l'argomento di funzioni complesse:

1.  $|A B| = |A| |B| \Rightarrow \log_{10} |A B| = \log_{10} |A| + \log_{10} |B|$

2.  $\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|} \Rightarrow \log_{10} \left| \frac{A}{B} \right| = \log_{10} |A| - \log_{10} |B|$

3.  $\arg(A B) = \arg(A) + \arg(B)$

4.  $\arg\left(\frac{A}{B}\right) = \arg(A) - \arg(B)$

- Queste proprietà permettono di ricondurre il problema di tracciare i diagrammi di bode di una generica funzione razionale fratta

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega + b) \dots (-\omega^2 + 2\delta_b \omega_b j\omega + \omega_b^2)}{(j\omega)^h (j\omega + d) \dots (-\omega^2 + 2\delta_d \omega_d j\omega + \omega_d^2)}$$

alla "somma" dei diagrammi di Bode di 6 funzioni elementari:

$$\pm K$$

$$(j\omega)^{-h}$$

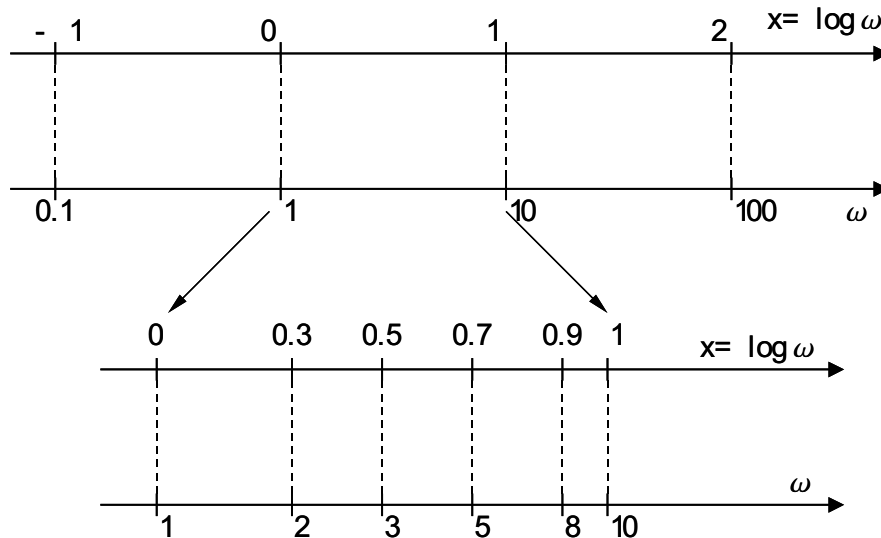
$$(j\omega + a)^{\pm 1}$$

$$(-\omega^2 + 2\delta_a \omega_a j\omega + \omega_a^2)^{\pm 1}$$

- È possibile ricavare i diagrammi asintotici di Bode senza ricorrere alla somma dei singoli contributi, ma utilizzando un metodo diretto.

### Assi nei diagrammi di Bode

- I Diagrammi di Bode usano l'asse orizzontale in scala logaritmica. Considerando l'asse reale  $R$  e fissata una origine, una pulsazione  $\omega$  corrisponde ad un punto sull'asse con coordinata  $x = \log_{10} \omega$ . Accanto all'asse si possono quindi indicare o i valori della coordinata  $x$  oppure direttamente i valori di  $\omega$ ; questa seconda soluzione è la più comoda.



- Per il disegno qualitativo dei diagrammi conviene memorizzare alcuni valori:  $\log_{10} 2 \simeq 0.3$     $\log_{10} 3 \simeq 0.5$     $\log_{10} 5 \simeq 0.7$     $\log_{10} 8 \simeq 0.9$
- L'asse verticale nei diagrammi di ampiezza è graduato in decibel (db):

$$A|_{\text{db}} \stackrel{\text{def}}{=} 20 \log_{10} A$$

Con questa scala le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sono  $\pm 20$  db/decade e  $\pm 40$  db/decade. Per comodità tali pendenze si indicano rispettivamente con i SIMBOLI  $\pm 1$  e  $\pm 2$ .

N.B.: se la scala verticale fosse semplicemente logaritmica ( $y = \log_{10} A$ ) le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sarebbero  $\pm 1$  e  $\pm 2$ .

- L'asse verticale nei diagrammi di fase può essere graduato sia in radianti sia in gradi. In ogni caso il diagramma delle fasi può essere traslato verso l'alto o verso il basso di multipli interi di  $2\pi$  o di  $360^\circ$  mantenendo inalterato il suo significato.

### Diagramma asintotico delle ampiezze

Consideriamo come esempio la seguente funzione  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Ordinare per  $\omega$  crescente tutte le pulsazioni CRITICHE ovvero quelle corrispondenti a poli e zeri reali e alle pulsazioni naturali  $\omega_n$  dei poli e degli zeri complessi e coniugati, non consideriamo in questa lista i poli nell'origine:

$$\omega_1 = 0.2 \text{ (polo)} \quad \omega_2 = 3 \text{ (zero)} \quad \omega_3 = 10 \text{ (polo cc)}$$

queste sono le pulsazioni in corrispondenza delle quali il diagramma di Bode delle ampiezze cambia pendenza.

2. Determinare la posizione verticale del diagramma. Detto  $K$  il guadagno di  $G(s)$  nella forma a costanti di tempo, per un sistema di tipo  $h$  si determina il punto  $\beta$  attraversato dal diagramma asintotico per  $\omega = \omega_1$  (la prima pulsazione alla quale si ha un cambio di pendenza) secondo la formula:

$$\beta = \left| \frac{K}{\omega_1^h} \right| = \frac{\frac{3}{2}}{0.2^1} = \frac{15}{2} \simeq 17.5 \text{ db}$$

Se il sistema è di tipo 0 (nessun polo nell'origine) la formula sopra restituisce esattamente il guadagno statico  $G(0)$  del sistema.

3. Per  $\omega < \omega_1$  la pendenza del diagramma di bode è  $-h$ .
4. A partire dal punto  $(\omega_1, \beta)$ , tenendo conto che gli zeri reali o complessi determinano un incremento di pendenza di  $+1$  o  $+2$  rispettivamente e che i poli reali o complessi determinano un decremento di pendenza di  $-1$  o  $-2$  rispettivamente, si traccia il diagramma asintotico spostandosi verso  $\omega$  crescenti e aggiornando la pendenza in corrispondenza a ogni pulsazione critica.

### Diagramma asintotico delle fasi

Consideriamo come esempio la seguente funzione  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Determinare la fase iniziale  $\varphi_0$  per  $\omega \rightarrow 0_+$ . Detto  $K$  il guadagno di  $G(s)$  nella forma a costanti di tempo (nell'esempio  $K = 3/2$ ) e dato un sistema di tipo  $h$ , la fase iniziale  $\varphi_0$  si calcola come (nell'esempio  $\varphi_0 = -h\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ ):

$$\begin{aligned} K > 0 & \quad \varphi_0 = -h\frac{\pi}{2} \\ K < 0 & \quad \varphi_0 = -\pi - h\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. Percorrendo le pulsazioni critiche in ordine crescente si determinano le fasce orizzontali in cui ogni polo o zero (semplice o complesso e coniugato) evidenzia il suo contributo sulla fase. Il primo polo o zero che si incontra (pulsazione  $\omega_1$ ) individua la fascia  $(\varphi_0, \varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi_1)$  dove  $\Delta\varphi$  deriva dalle proprietà dei diagrammi di bode elementari:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -\pi/2 & \text{polo stabile o zero instabile} \\ \pi/2 & \text{zero stabile o polo instabile} \\ -\pi & \text{polo cc stabile o zero cc instabile} \\ +\pi & \text{zero cc stabile o polo cc instabile} \end{cases}$$

Successivamente l' $i$ -esimo polo o zero che si incontra (pulsazione  $\omega_i$ ) individua la fascia  $(\varphi_{i-1}, \varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i)$ .

3. Tratteggiare il contributo in fase di ogni polo o zero all'interno della corrispondente fascia, riconducendosi alle proprietà dei diagrammi elementari. In particolare l'intervallo di pulsazioni  $(\omega_{ai}, \omega_{bi})$  all'interno del quale si ha la variazione di fase da  $\varphi_{i-1}$  a  $\varphi_i$  dovuta all' $i$ -esimo polo o zero (pulsazione  $\omega_i$ ) è dato da:

$$\omega_{ai} = \frac{\omega_i}{4.81} \quad \omega_{bi} = 4.81\omega_i \quad \text{Poli o zeri semplici}$$

$$\omega_{ai} = \frac{\omega_i}{4.81^{\delta_i}} \quad \omega_{bi} = 4.81^{\delta_i}\omega_i \quad \text{Poli o zeri complessi e coniugati}$$



dove  $\delta_i \in ]-1, 1[$  è il coefficiente di smorzamento delle coppie di poli o zeri complessi e coniugati.

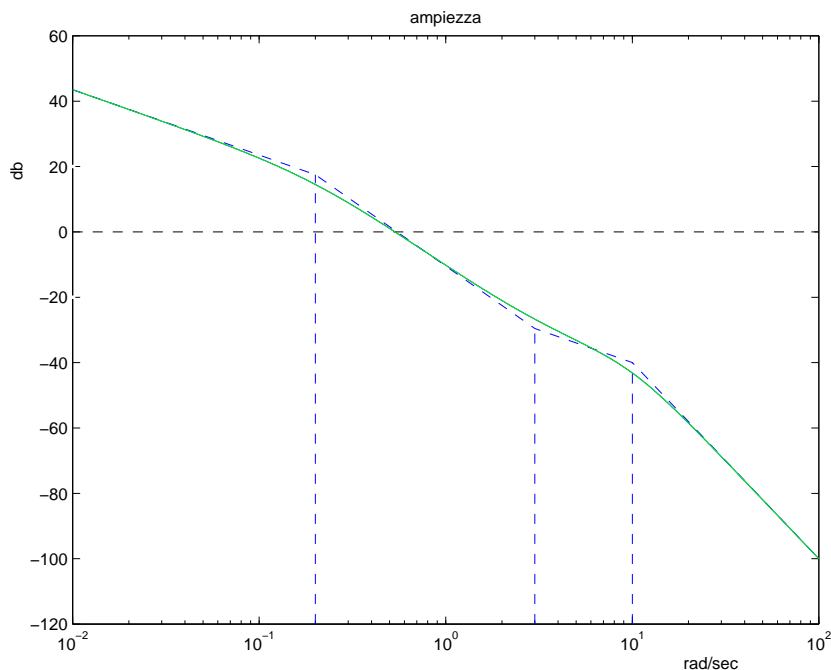
4. Partendo dalla pulsazione  $\omega_1/10$  (dove la fase è sicuramente  $\varphi_0$ ) e spostandosi verso  $\omega$  crescente, unire i contributi in fase tratteggiati in precedenza. Nelle fasce verticali dove è presente un solo tratteggio inclinato il diagramma delle fasi coincide esattamente con il tratteggio. Nei tratti in cui due o più contributi si sommano, la pendenza complessiva del diagramma è data dalla somma algebrica delle pendenze dovute ai singoli contributi.
5. Detto  $K_p$  il guadagno del sistema nella forma poli-zeri, per una funzione  $G(s)$  di grado relativo  $r$ , verificare la fase  $\varphi_\infty$  per  $\omega \rightarrow \infty$  con la seguente espressione (nell'esempio  $K_p = 10$ ,  $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$ ):

$$\begin{array}{ll} K_p > 0 & \varphi_\infty = -r \frac{\pi}{2} \\ K_p < 0 & \varphi_\infty = -\pi - r \frac{\pi}{2} \end{array}$$

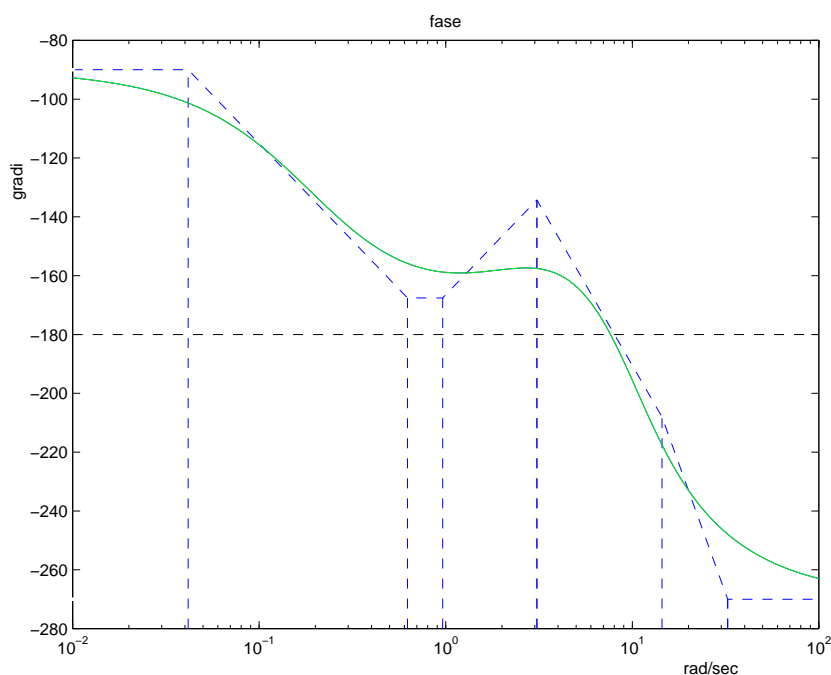
- **Esempio.** Consideriamo come esempio la seguente funzione  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

- Diagramma di Bode delle ampiezze:



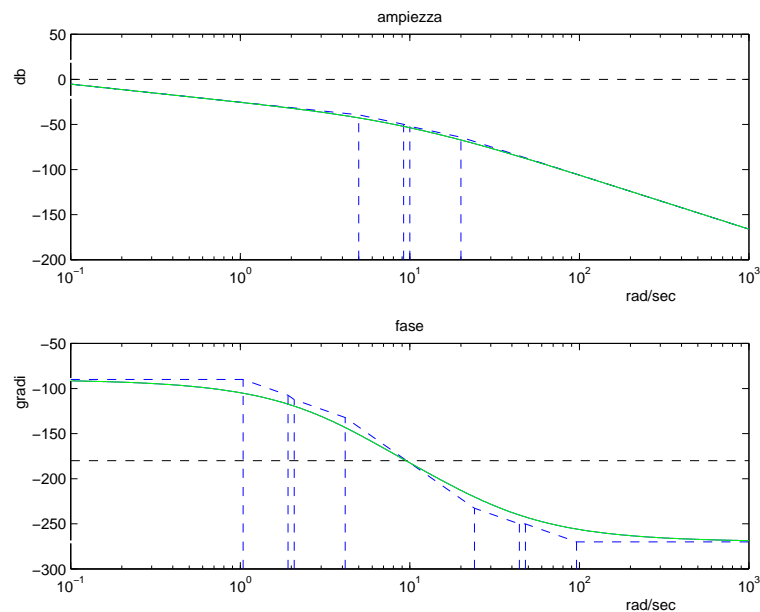
- Diagramma di Bode delle fasi:



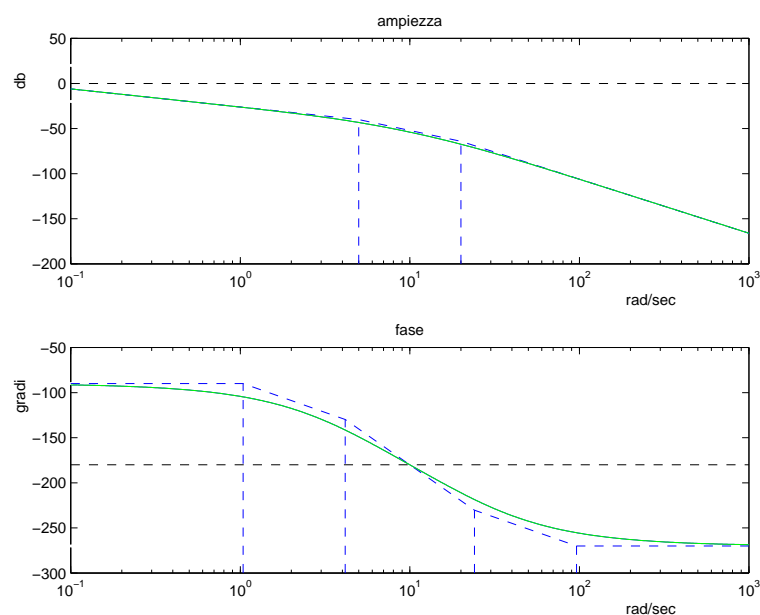
- NOTA: i diagrammi asintotici di Bode sono un'approssimazione dell'andamento reale della funzione di risposta armonica. Per tale motivo è possibile semplificare le coppie di poli e zeri che danno un contributo quasi uguale e contrario, senza alterare apprezzabilmente il diagramma risultante. Esempio:

$$H_1(s) = \frac{5(s + 10)}{s(s + 5)(s + 9.2)(s + 20)} \simeq \frac{5}{s(s + 5)(s + 20)} = H_2(s)$$

- Funzione  $H_1(s)$



- Funzione  $H_2(s)$



## Uso dei diagrammi di Bode

1. Determinare la risposta temporale di un sistema sollecitato da un segnale sinusoidale senza ricorrere alle antitrasformate. Consideriamo il sistema con ingresso  $x$  e uscita  $y$  descritto dalla solita funzione di trasferimento  $G(s)$ :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} \rightarrow Y(s) = G(s)X(s)$$

Applicando in ingresso il segnale  $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$  la risposta temporale  $y(t)$  del sistema è data da:

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin [\omega t + \alpha + \arg(G(j\omega))]$$

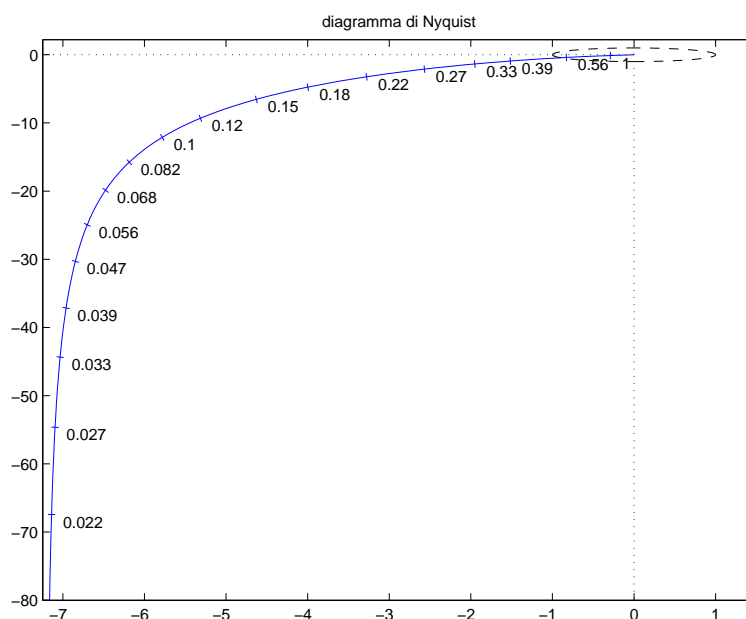
dove  $|G(j\omega)|$  e  $\arg(G(j\omega))$  si ricavano rispettivamente dai diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi. Esempio, per  $\omega = 1$  si ha:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &\simeq -10|_{\text{db}} \simeq 0.32 \\ \arg(G(j\omega)) &\simeq -160^\circ \simeq 2.8 \text{ rad} \end{aligned}$$

e quindi

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin [\omega t + \alpha + \arg(G(j\omega))] = 0.32 A \sin [t + \alpha + 2.8]$$

2. Tracciare i diagrammi polari di Nyquist:



3. Studio della stabilità di un sistema.