Esame scritto di “Teoria dei Sistemi” - Modena - 22 Giugno 2005 - Domande

Per ciascuno dei seguenti test a risposta multipla segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando “tutte” le affermazioni giuste sono contrassegnate. Per le domande, riportare la sola risposta senza i passaggi intermedi.

1. La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ di un sistema tempo-continuo:

   ◯ è funzione delle condizioni iniziali del sistema;
   ◯ è funzione della parte raggiungibile del sistema;
   ◯ è funzione anche della parte non osservabile del sistema;

2. Mediante retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ è possibile posizionare a piacere:

   ◯ tutti gli autovalori del sistema;
   ◯ tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;
   ◯ tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

3. Siano $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ due matrici simili: $\mathbf{A} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$. L'esponenziale di matrice $e^{\mathbf{A}t}$ gode della proprietà:

   ◯ $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}^{-1}\, e^{\overline{\mathbf{A}}t}\, \mathbf{T}$;
   ◯ $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}\, e^{\overline{\mathbf{A}}t}\, \mathbf{T}^{-1}$;
   ◯ $e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{T}^{-1}}\, e^{\overline{\mathbf{A}}t}\, e^{\mathbf{T}}$;
   ◯ $e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{T}}\, e^{\overline{\mathbf{A}}t}\, e^{\mathbf{T}^{-1}}$;

4. Il polinomio caratteristico $\Delta(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$

   ◯ gode della proprietà $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;
   ◯ è un polinomio annullante per la matrice $\mathbf{A}$;
   ◯ è il polinomio minimo annullante per la matrice $\mathbf{A}$;

5. La matrice di transizione dello stato $\mathbf{A}^k$ di un sistema discreto lineare stazionario può essere calcolata utilizzando le $\mathcal{Z}$-trasformate nel modo seguente:

   ◯ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$
   ◯ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$
   ◯ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})]$
   ◯ $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})]$

6. Indicare quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno dell'origine:

   ◯ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
   ◯ $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)$;
   ◯ $V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_1^4)(x_2^2 + x_2^4)$;
   ◯ $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$;

7. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

   ◯ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è ricostruibile;
   ◯ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è raggiungibile;
   ◯ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è ricostruibile;
   ◯ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è raggiungibile;

8. Un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ è "stabilizzabile" mediante retroazione statica dello stato

   ◯ se il sistema è stabile;
   ◯ se il sistema è osservabile;
   ◯ se la parte instabile del sistema è raggiungibile;
   ◯ se la parte non raggiungibile del sistema è stabile;

9. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione K) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

   ◯ è un sistema raggiungibile ed osservabile;
   ◯ è un sistema non raggiungibile;
   ◯ è un sistema non osservabile;

10. Dire, per ciascuno degli elementi dinamici $\mathcal{D}$ sotto elencati, qual è la variabile energia q, la variabile di potenza v in uscita e l'equazione costitutiva che la caratterizza:

Elemento dinamico $\mathcal{D}$	Variabile energia q	Variabile v in uscita	Equazione differenziale
Massa M			
Induttanza L			
Cap. Idraulica C_I			

11. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k, h)$ nel caso di sistemi dinamici discreti lineari tempo-varianti:

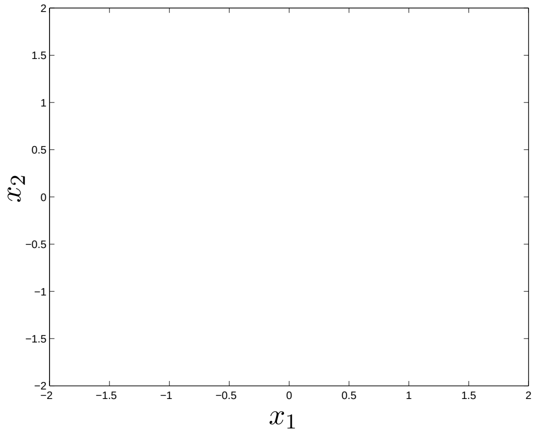
12. Qual è la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)$?

13. Calcolare l'esponenziale $e^{\mathbf{j}\alpha t}$ della seguente matrice $\mathbf{j}\alpha t$:

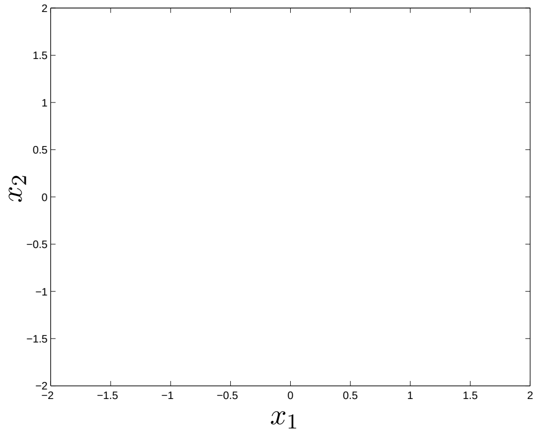
$$\mathbf{j}\alpha t = \begin{bmatrix} 0 & \alpha t \\ -\alpha t & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad e^{\mathbf{j}\alpha t} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

14. Disegnare qualitativamente le traiettorie di un sistema lineare del secondo ordine caratterizzato da 1) un nodo stabile; 2) un fuoco stabile; 3) una sella.

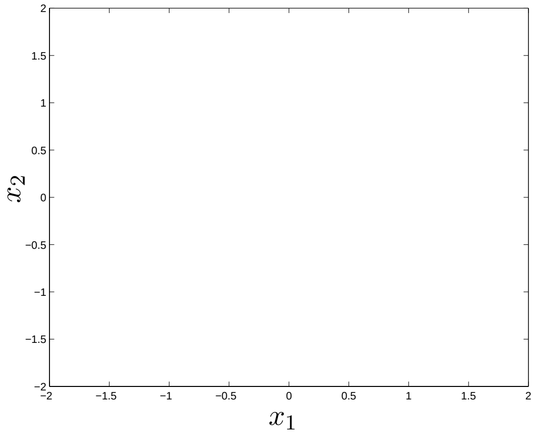
1) Nodo Stabile



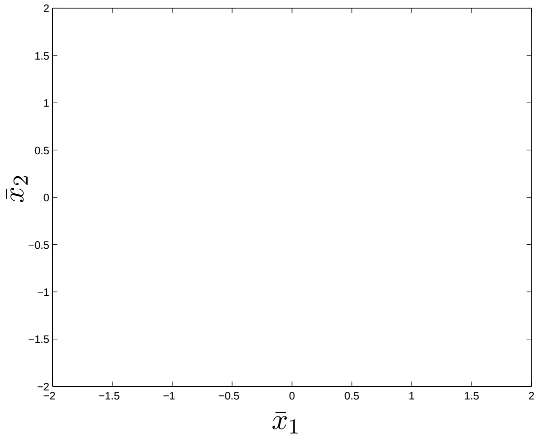
1) Nodo Stabile degenere



2) Fuoco Stabile



3) Sella



15. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \qquad\qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

16. Enunciare il criterio di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo-discreti.

17. Sia dato un sistema lineare SISO completamente raggiungibile caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \left[\quad \right], \quad \mathbf{b}_C = \left[\quad \right], \quad \mathbf{c}_C = \left[\quad \right]$$

18. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione n,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{array}$$

Scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno in catena chiusa:

19. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{array} \right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = & \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{array} \right.$$

Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati.

$$\mathbf{F} = \qquad , \qquad \mathbf{G} = \qquad , \qquad \mathbf{H} =$$

20. Data la funzione di trasferimento $G(s)$ sotto riportata, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di osservabilità che ha $G(s)$ come funzione di trasferimento che lega l'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$:

$$G(s) = \frac{3s^3 + 8s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 5s + 7} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \left[\quad \right] \mathbf{x}(t) + \left[\quad \right] u(t) \\ y(t) & = & \left[\quad \right] \mathbf{x}(t) \end{array} \right.$$

Esame scritto di "Teoria dei Sistemi" - Modena - 22 Giugno 2005 - Esercizi

21. Dato il sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^3(t)\, x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

   (a) Posto $u(t) = 0$, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine utilizzando il criterio diretto di Lyapunov e la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$;

   (b) Posto $u(t) = k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t)$ si determini per quali valori non nulli dei guadagni k_1 e k_2 l'origine è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile. Per la soluzione si utilizzi il criterio ridotto di Lyapunov;

22. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\, u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso.

   (a) Portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità. Calcolare gli autovalori del sottospazio raggiungibile e della parte non raggiungibile.

   (b) Scrivere il procedimento per giungere alla sintesi di una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato. Per la sintesi del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ si utilizzi la forma canonica di raggiungibilità.

   (c) Determinare se esiste o meno un osservatore asintotico dello stato di ordine "ridotto". Scrivere il procedimento che permette di giungere alla sintesi di un osservatore di ordine ridotto che posizioni in -2 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore. Per la sintesi del vettore $\mathbf{L}$ si utilizzi la formula di Ackermann.

23. Si consideri il seguente sistema lineare discreto [$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\, u(k)$, $y(k) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(k)$]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso. Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente *evoluzione libera*: $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$.

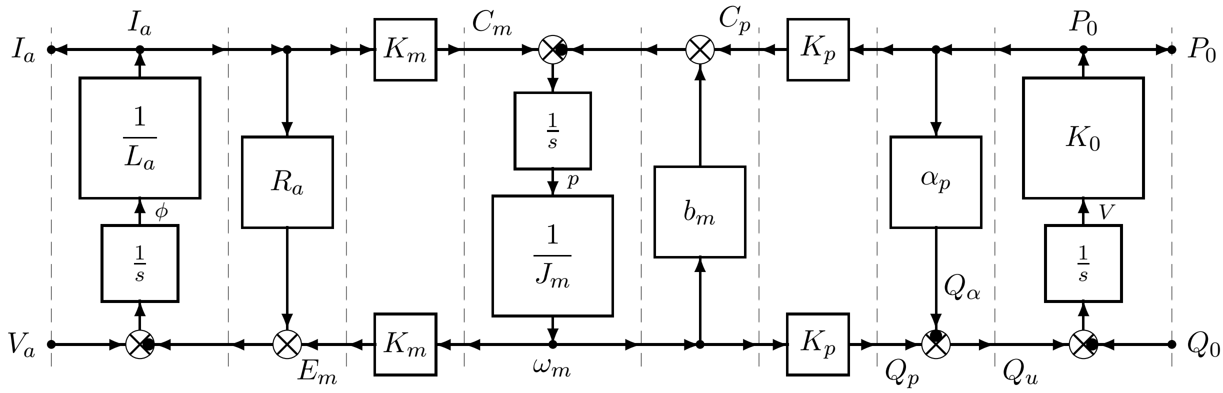
24. Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nella forma più generale possibile

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Scrivere inoltre come si costruisce la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ che potra il sistema di partenza nella forma canonica di Kalman.

25. Si consideri il seguente schema P.O.G. di un sistema elettro-meccanico costituito da un motore elettrico in corrente continua (L_a, R_a, J_m, b_m, K_m), da una pompa ad ingranaggi (K_p, α_p) e da un accumulatore idraulico (K_0):



Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi & p & V \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato (composto da tutte le variabili presenti all'uscita degli integratori), $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_a & Q_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore degli ingressi e $y = P_0$ la variabile di uscita. Scrivere il corrispondente sistema dinamico nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p} \\ \dot{V} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi \\ p \\ V \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ Q_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$