

**Teoria dei Sistemi**  
**Teoria dei Sistemi e del Controllo**  
**Compito A del 27 Aprile 2010**  
**Domande ed esercizi**

Nome:			
Nr. Mat.			
Firma:			
C.L.:	Info.	Elet.	Telec.

1. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato*  $\Phi(k, h)$  nel caso di sistemi dinamici lineari discreti tempo-invarianti:

$$\Phi(k, h) = \mathbf{A}^{k-h}$$

2. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0)$ :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

3. La molteplicità *geometrica* di un autovalore  $\lambda$  della matrice  $\mathbf{A}$

- è la dimensione dell'autospazio  $U_\lambda$  associato all'autovalore  $\lambda$ ;
- è la dimensione del blocco di Jordan  $\mathbf{J}_\lambda$  associato all'autovalore  $\lambda$ ;
- è il grado di molteplicità di  $\lambda$  nel polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ ;
- è il numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore  $\lambda$ ;

4. Applicando al sistema dinamico  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$  la trasformazione di coordinate  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$  si ottiene un sistema trasformato  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}$  caratterizzato dalle seguenti matrici  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  e  $\bar{\mathbf{C}}$ :

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

5. Scrivere la matrici di trasferimento  $\mathbf{H}(s)$  di un sistema lineare tempo-continuo in funzione delle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  che caratterizzano il sistema lineare:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

6. L'elemento  $H_{i,j}(s)$  della matrice di trasferimento  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  di un sistema lineare di ordine  $n$  è la trasformata di Laplace

- dell'uscita  $j$ -esima quando un impulso è applicato all'ingresso  $i$ -esimo;
- dell'uscita  $i$ -esima quando un impulso è applicato all'ingresso  $j$ -esimo;
- dell'uscita  $j$ -esima quando un gradino è applicato all'ingresso  $i$ -esimo;
- dell'uscita  $i$ -esima quando un gradino è applicato all'ingresso  $j$ -esimo;

7. Scrivere la formula per calcolare la matrice di transizione dello stato  $e^{\mathbf{A}t}$  di un sistema lineare tempo-continuo utilizzando le trasformate di Laplace:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

8. Nel caso di sistemi tempo-discreti lineari invarianti  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ , scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché sia possibile far passare il sistema dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  allo stato finale  $\mathbf{x}(k)$  nell'intervallo di tempo  $[0, k]$ :

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(k)$$

9. Mostrare la struttura del generico blocco di Jordan  $\mathbf{J}_i$  e del generico miniblocco di Jordan  $\mathbf{J}_{i,j}$  associato all' $i$ -esimo autovalore  $\lambda_i$  di una generica matrice  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{i,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_{i,\nu_i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

10. Calcolare, in funzione della condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T$ , l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 2^k & k 2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6} 2^{k-3} \\ 0 & 2^k & k 2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 0 & 2^k & k 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

11. Sia dato un sistema lineare SISO completamente osservabile caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Indicare la struttura delle matrici  $\mathbf{A}_o$ ,  $\mathbf{b}_o$  e  $\mathbf{c}_o$  della corrispondente forma canonica di osservabilità. Sia  $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$  il polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$$

Indicare inoltre la struttura della matrice  $\mathbf{P}^{-1}$  che unita alla trasformazione  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_o$  porta il sistema originario in forma canonica di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = (\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

12. Data la funzione di trasferimento  $G(s)$  sotto riportata, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di raggiungibilità indicando con  $u(t)$  l'ingresso e con  $y(t)$  l'uscita :

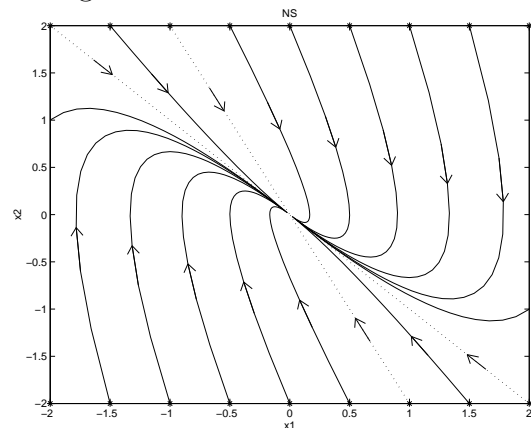
$$G(s) = \frac{2s^3 + 7s^2 + 3s + 1}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 4s + 8} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 3 \ 7 \ 2] \mathbf{x}(t) \end{array} \right.$$

13. Siano  $\mathcal{X}^+$  e  $\mathcal{X}_K^+$  i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  e  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}, \mathbf{B})$ . Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

- $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}_K^+$
- $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$
- $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$
- nessuna delle precedenti

14. Considerato un sistema dinamico tempo continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ , rispondere alle seguenti domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:

- gli autovettori del sistema  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono reali e distinti.
- gli autovettori del sistema  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono complessi coniugati.
- per  $t \rightarrow \infty$  tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore  $\mathbf{v}_1$ .
- per  $t \rightarrow \infty$  tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore  $\mathbf{v}_2$ .



Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

- Nodo?     Fuoco?     Sella?     Degenero?     Stabile?     Instabile?

15. La formula di Ackermann per il calcolo del vettore  $\mathbf{k}^T$  permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato e può essere utilizzata

- per qualunque sistema;
- solo se il sistema è raggiungibile;
- solo per sistemi ad un solo ingresso;

Si fornisca inoltre la descrizione esplicita della formula di Ackermann e del polinomio desiderato  $p(\lambda)$  nel caso in cui si voglia posizionare tutti gli  $n$  poli del sistema in  $\lambda = -2$ :

$$\mathbf{k}^T = - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A}) \quad p(\lambda) = (\lambda + 2)^n$$

16. Enunciare il *Lemma di Heymann*:

*Se  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  è raggiungibile e se  $\mathbf{b}_i$  è una colonna non nulla di  $\mathbf{B}$ , allora esiste una matrice  $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m \times n}$  tale che  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_i, \mathbf{b}_i)$  è raggiungibile.*

17. Dato il sistema lineare tempo-discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ , riportare la struttura di:  
a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena aperta*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

b) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$$

18. Se un sistema dinamico é completamente osservabile allora:
- per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena aperta;
  - per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine pieno;
  - per esso esiste sempre un osservatore asintotico in catena chiusa di ordine ridotto;
19. Uno stimatore asintotico dello stato “in catena chiusa” e di ordine pieno può essere utilizzato
- se il sistema è osservabile;
  - se il sistema è asintoticamente stabile;
  - se la parte instabile del sistema è osservabile;
  - se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile;
20. Sia  $\mathcal{S}_D$  il sistema duale del sistema continuo  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :
- Se  $\mathcal{S}$  è ricostruibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
  - Se  $\mathcal{S}$  è osservabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;
  - Se  $\mathcal{S}$  è controllabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
  - Se  $\mathcal{S}$  è raggiungibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è ricostruibile;

21. Indicare la struttura del sistema duale  $\mathcal{S}_D$  associato ad un sistema dato  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$$

22. Un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  è sempre “stabilizzabile” mediante retroazione statica della stima dello stato fornita da un osservatore asintotico
- se il sistema è stabile;
  - se e solo se il sistema è raggiungibile ed osservabile;
  - se e solo se la parte non raggiungibile e non osservabile del sistema è stabile;
23. Mediante retroazione statica dello stato  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$  è possibile posizionare a piacere:
- tutti gli autovalori del sistema;
  - tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;
  - tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;
24. Scrivere come si determina la matrice  $\mathbf{P}^{-1}$  della trasformazione  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$  che porta un sistema non completamente osservabile in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \text{Im}\mathbf{P}_1^T = \text{Im}(\mathcal{O}^-)^T \text{ e } \mathbf{P}_2 \text{ rende non singolare la matrice } \mathbf{P}^{-1}.$$

Indicare inoltre la struttura a blocchi delle matrici  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  e  $\bar{\mathbf{C}}$  che si ottengono:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = [ \mathbf{C}_1 \quad 0 ]$$

25. Relativamente al sistema lineare discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ , scrivere in termini delle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

26. Sia data la seguente equazione differenziale del terzo ordine  $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$  dove  $u(t)$  è la variabile d'ingresso. Scelto  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T = [x(t) \ \dot{x}(t) \ \ddot{x}(t)]^T$  come vettore di stato e  $y(t) = x(t)$  come variabile d'uscita, scrivere la dinamica del sistema nello spazio degli stati:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

27. Sia dato un sistema non-lineare tempo discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}})$  sollecitato da un ingresso costante  $\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}$ . Scrivere la relazione statica da risolvere per determinare i punti di equilibrio  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_e$ :

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}})$$

28. Dire, per ciascuno degli elementi dinamici  $\mathcal{D}$  sotto elencati, qual è la variabile energia  $q$ , la variabile di potenza  $v$  in uscita e l'equazione costitutiva che la caratterizza:

Elemento dinamico $\mathcal{D}$	Variabile energia $q$	Variabile $v$ in uscita	Equazione differenziale
Elasticità $E$	spostamento $x$	forza $F$	$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$
Capacità $C$	carica $Q$	tensione $V$	$\frac{dQ}{dt} = I$
Ind. Idraulica $L_I$	flusso idrau. $\phi_I$	portata vol. $Q$	$\frac{d\phi_I}{dt} = P$

29. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione  $K$ ) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

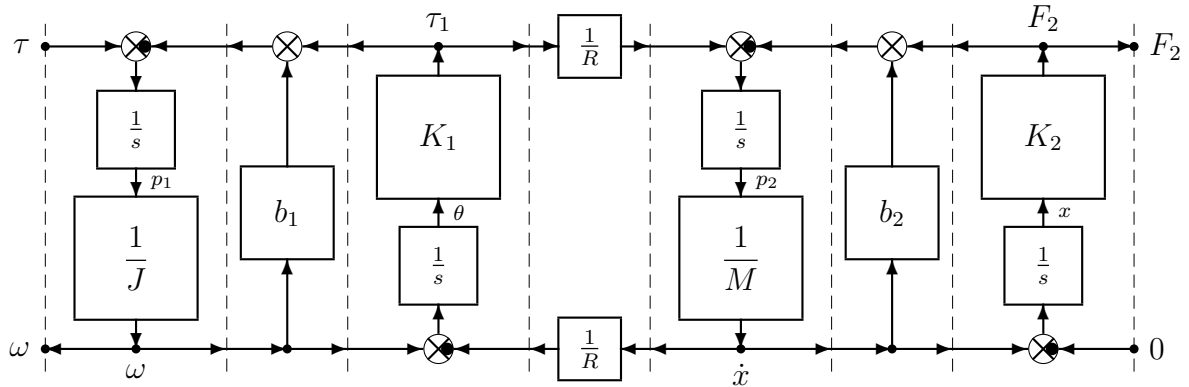
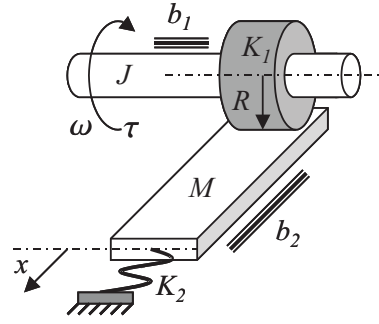
- è un sistema raggiungibile ed osservabile;
- è un sistema non raggiungibile;
- è un sistema non osservabile;

30. Enunciare la *Proprietà di separazione* del regolatore:

*La sintesi del blocco di retroazione  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  e del blocco di stima  $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$  può essere fatta in modo indipendente:*

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

31. Si consideri il sistema meccanico mostrato in figura, costituito da un albero di inerzia  $J$ , che ruota a velocità  $\omega$ , a cui è applicata la coppia esterna  $\tau$ . Tramite un rullo elastico avente rigidità torsionale  $K_1$  e raggio costante  $R$ , l'albero spinge una massa  $M$  che comprime una molla lineare con coefficiente di rigidità  $K_2$ . Il modello P.O.G. del sistema meccanico assegnato è il seguente:



Sia  $\mathbf{x} = [\omega \quad \tau_1 \quad \dot{x} \quad F_2]^T$  il vettore di stato (composto dalle variabili di potenza in uscita degli elementi dinamici) e sia  $\mathbf{u} = \tau$  la variabile d'ingresso. Scrivere il corrispondente sistema dinamico nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\tau}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{F}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & -b_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega \\ \tau_1 \\ \dot{x} \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\tau}_{\mathbf{u}}$$

32. Siano  $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  e  $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  due sistemi algebricamente equivalenti tali che  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$ . Tra le corrispondenti matrici di raggiungibilità  $\mathcal{R}_1^+$  ed  $\mathcal{R}_2^+$  esiste il legame:

- $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}\mathcal{R}_2^+$
- $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}_2^+$
- $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}$
- $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}^{-1}$

33. Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante  $\mathbf{u}_0$ . Indicare come si calcolano le matrici del sistema linearizzato:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$