Teoria dei Sistemi
Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito A del 24 Giugno 2010
Domande ed esercizi

Nome:			
Nr. Mat.			
Firma:			
C.L.:	Info.	Elet.	Telec.

1. Nel caso di sistemi lineari continui tempo-varianti, la matrice di transizione dello stato $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ è soluzione di quale equazione differenziale matriciale (indicare anche la condizione iniziale)?

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0), \qquad \mathbf{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

2. Un sistema dinamico caratterizzato dalla funzione di stato $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$

   ◯ è un sistema lineare;
   ⊗ è un sistema tempo-discreto;
   ⊗ è un sistema tempo-invariante;
   ◯ è un sistema raggiungibile;

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ all'istante $k = 0$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

4. Scrivere la definizione di esponenziale di matrice:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$$

5. Applicando al sistema ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$) una trasformazione lineare $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato ($\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{C}}$) caratterizzato dalle seguenti matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

   e tale per cui le matrici $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$

   ⊗ hanno gli stessi autovalori;
   ◯ hanno gli stessi autovettori;
   ⊗ hanno lo stesso polinomio caratteristico;
   ⊗ hanno lo stesso determinante;

6. Sia λ un autovalore della matrice $\mathbf{A}$ con grado di molteplicità r. L'autospazio U_λ

   ⊗ è un sottospazio vettoriale;
   ◯ ha sempre dimensione uguale ad r;
   ⊗ è composto da tutti e soli gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$ associati all'autovalore λ;

7. Una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n è diagonalizzabile

   ◯ se è invertibile;
   ⊗ se ha n autovalori reali distinti;
   ⊗ se ha n autovettori linearmente indipendenti;
   ⊗ se i miniblocchi di Jordan hanno tutti dimensione unitaria;

8. Scrivere la matrici di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di un sistema lineare tempo-discreto in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ che caratterizzano il sistema lineare:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

9. Nel caso di sistemi tempo-continui lineari invarianti $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$, scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché sia possibile far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t]$:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$$

10. Una matrice $\mathbf{N}$ nilpotente di ordine ν è una matrice

   - ○ tale per cui $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{I}$;
   - ⊗ tale per cui $\mathbf{N}^\nu = \mathbf{0}$;
   - ○ che ha tutti gli autovalori unitari;
   - ⊗ che ha tutti gli autovalori nell'origine;

11. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

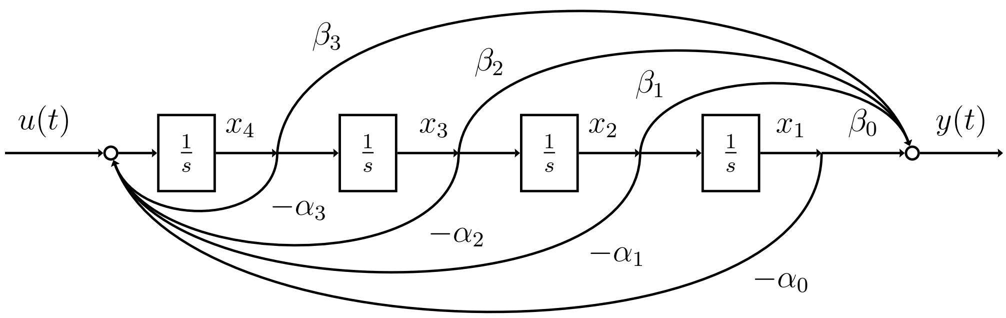
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

12. Dato il sistema dinamico sotto riportato in forma canonica di osservabilità, scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$:

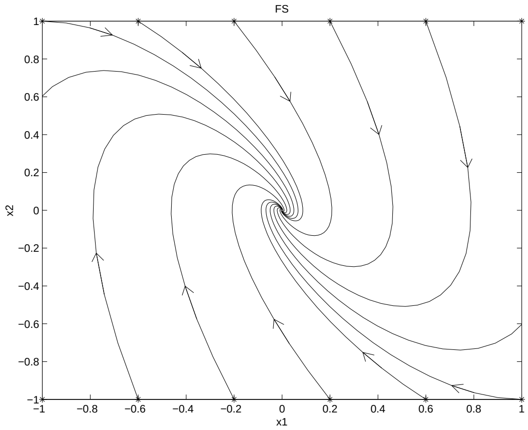
$$G(s) = \frac{3s^3 + 1s^2 + 5s + 2}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 3s + 6} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right.$$

13. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo posto in forma canonica di controllo dove $\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_c(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) \end{array} \right.$$



14. Considerato un sistema dinamico tempo continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali $\lambda_1 = -1 + 2\,j$, $\lambda_2 = -1 - 2\,j$, rispondere alle seguenti domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:



○ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono reali e distinti.

⊗ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono complessi coniugati.

○ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_1$.

○ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_2$.

Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

○ Nodo? ⊗ Fuoco? ○ Sella? ○ Degenere? ⊗ Stabile? ○ Instabile?

15. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione n:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

○ mediante una retroazione stato–ingresso è possibile allocare a piacimento gli autovalori della parte osservabile del sistema;

⊗ la retroazione stato–ingresso non consente di modificare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità;

⊗ è sempre possibile stabilizzare il sistema mediante retroazione stato–ingresso se gli autovalori della parte non–raggiungibile hanno modulo inferiore all'unità.

16. Sia $(\mathbf{A},\, \mathbf{c})$ una coppia di matrici osservabile. Scrivere la formula di Ackerman (in forma compatta) relativa al vettore dei guadagni $\mathbf{l}$ di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$:

$$\mathbf{l} = -p(\mathbf{A})\, \underbrace{(\mathcal{O}^-)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

dove $\mathbf{q}$ è l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità

e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

17. Scrivere la struttura del polinomio desiderato $p(\lambda)$ nel caso in cui si voglia posizionare gli autovalori di un sistema del 4^o ordine in $\lambda = -2$, $\lambda = -2$, $\lambda = -5$ e $\lambda = -6$:

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda + 5)(\lambda + 6)$$

18. Enunciare il *Lemma di Heymann*:
Se $(\mathbf{A},\, \mathbf{B})$ *è raggiungibile e se* $\mathbf{b}_i$ *è una colonna non nulla di* $\mathbf{B}$*, allora esiste una matrice* $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m\times n}$ *tale che* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_i,\, \mathbf{b}_i)$ *è raggiungibile.*

19. Sia dato un sistema lineare tempo-discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$,
a) scrivere la struttura dello stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$$

b) scrivere l'andamento temporale dell'errore di stima $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\mathbf{e}(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})^k \mathbf{e}(0)$$

20. Scrivere la struttura della matrice di trasformazione $\mathbf{P}_c^{-1}$ che porta un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$ osservabile in forma canonica di osservabilità ($\mathbf{x} = \mathbf{P}_c\mathbf{x}_c$):

$$\mathbf{P}_c^{-1} = (\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

dove i coefficienti α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

21. a) Scrivere la struttura a blocchi di un sistema $\mathcal{S}$ tempo-continuo non completamente raggiungibile posto in forma standard di raggiungibilità $\bar{\mathcal{S}}$:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & \overline{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{O} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix}$$

b) Scrivere la forma semplificata della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ del sistema $\mathcal{S}$ in funzione delle sottomatrici che caratterizzano il sistema $\bar{\mathcal{S}} = (\overline{\mathbf{A}},\ \overline{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{C}})$ in forma standard si raggiungibilità:

$$\mathbf{H}(s) = \overline{\mathbf{C}}_1(s\,\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\overline{\mathbf{B}}_1$$

22. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena aperta" può essere utilizzato

- ○ se e solo se il sistema è osservabile;
- ⊗ se e solo se il sistema è asintoticamente stabile;
- ○ se e solo se la parte instabile del sistema è osservabile;
- ○ se e solo se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile;

23. Sia $\mathcal{S}_D$ il sistema duale del sistema discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è raggiungibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è osservabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;
- ○ Se $\mathcal{S}$ è controllabile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è osservabile;
- ⊗ Se $\mathcal{S}$ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\mathcal{S}_D$ è controllabile;

24. Indicare la struttura del sistema duale $\mathcal{S}_D$ associato ad un sistema dato $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$$

25. Un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ è sempre "stabilizzabile" mediante retroazione statica della stima dello stato fornita da un osservatore asintotico

   ⊗ se il sistema è stabile;
   ○ se e solo se il sistema è raggiungibile ed osservabile;
   ⊗ se e solo se la parte non raggiungibile e non osservabile del sistema è stabile;

26. Enunciare la *Proprietà di separazione* del regolatore:

   La sintesi del blocco di retroazione $(\mathbf{A}+\mathbf{BK})$ *e del blocco di stima* $(\mathbf{A}+\mathbf{LC})$ *può essere fatta in modo indipendente:*

$$\det[z\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]\det[z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{LC})]$$

27. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabililità in k passi del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

28. Relativamente ad un sistema lineare stazionario discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ che ha almeno un autovalore nell'origine, è possibile affermare che:

   ○ se il sistema è completamente controllabile allora è anche completamente raggiungibile;
   ⊗ se il sistema è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile;
   ⊗ se il sistema è completamente osservabile allora è anche completamente ricostruibile;
   ○ se il sistema è completamente ricostruibile allora è anche completamente osservabile;

29. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

   ○ Il sistema non è completamente raggiungibile;
   ⊗ Il sistema non è completamente osservabile;
   ⊗ Il sistema può essere raggiungibile;

30. Sia dato un sistema non–lineare tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}})$ sollecitato da un ingresso costante $\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}$. Scrivere la relazione statica da risolvere per determinare i punti di equilibrio $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_e$:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \bar{\mathbf{u}})$$

31. Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Indicare come si calcolano le matrici del sistema linearizzato:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)} \quad \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\ \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\ \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}$$

32. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e della variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *meccanico traslazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi e l' equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli		Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$	M	Massa			
q_1	P	quantità di moto	$P = \Phi_M(\dot{x})$	$P = M\,\dot{x}$	$\frac{d\,P}{dt} = F$
v_1	$\dot{x}$	velocità			
$\mathcal{D}_2$	E	Elasticità			
q_2	x	spostamento	$x = \Phi_E(F)$	$x = E\,F$	$\frac{d\,x}{dt} = \dot{x}$
v_2	F	forza			
$\mathcal{R}$	b	Dissipatore	$F = \Phi_b(\dot{x})$	$F = b\,\dot{x}$	

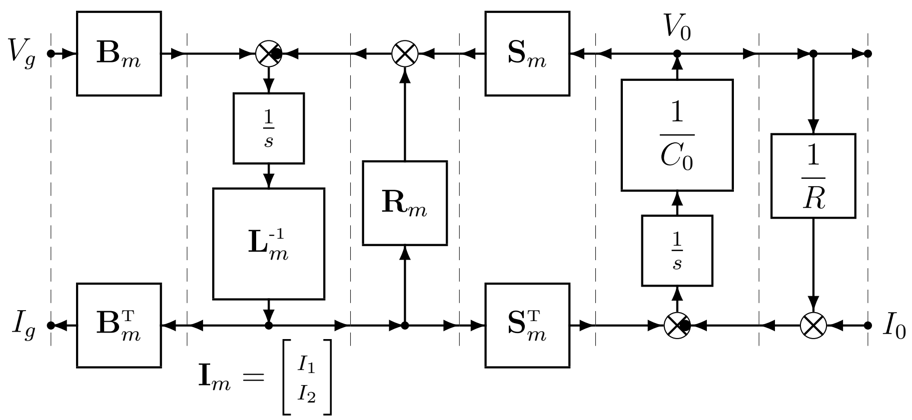
33. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione K) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

◯ è un sistema raggiungibile;

⊗ è un sistema osservabile;

◯ è un sistema raggiungibile ed osservabile;

34. Si consideri il seguente schema P.O.G. di un Boost Converter:



dove

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{12} & L_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & V_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato (composto dalle variabili di potenza in uscita degli elementi dinamici) e sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_g & I_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore degli ingressi. Scrivere il corrispondente sistema dinamico nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & 0 \\ M_{12} & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & -R_2 & -s_2 \\ s_1 & s_2 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_g \\ I_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$