Esercizi

1) Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& -x_1 - 2x_1x_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &=& x_1^2x_2 + u_2 \end{cases}$$

1.a) Posto $u_1 = u_2 = 0$, trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, studiare la stabilità dell'origine utilizzando il criterio di Lyapunov e la funzione definita positiva $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

1.a) Posto $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, un punto $\mathbf{x}_0$ è di equilibrio per il sistema se vale la relazione $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Nel caso in esame si ha

$$\begin{cases} 0 &=& -x_1 - 2x_1x_2^2 \\ 0 &=& x_1^2x_2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 0 &=& -x_1(1 + 2x_2^2) \\ 0 &=& x_1^2x_2 \end{cases}$$

Sono punti di equilibrio tutti quelli appartenenti alla retta $x_1 = 0$, x_2 qualsiasi. Per poter applicare il criterio ridotto di Lyapunov si procede al calcolo dello Jacobiano del sistema

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -1 - 2x_2^2 & -4x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{J}(x_1, x_2)|_{x_1=0} = \begin{bmatrix} -1 - 2x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essendo presente un autovalore a parte reale nulla, il criterio ridotto di Lyapunov in questo caso non permette di affermare nulla riguardo la stabilità del punto di equilibrio.

1.b) Posto $u_1 = -x_1$ e $u_2 = -x_2$, il sistema retroazionato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& -2x_1(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &=& -x_2(1 - x_1^2) \end{cases}$$

Utilizzando la funzione candidata di $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, e derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{V} \;=\; 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -4x_1^2(1 + x_1^2) - 2x_2^2(1 - x_1^2) < 0$$

Nell'origine, la funzione $\dot{V}$ è definita negativa per cui è possibile affermare che l'origine è un punto asintoticamente stabile.

2) Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &=& \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &=& \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

2.a) Calcolare la trasformazione $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma canonica di Jordan. Calcolare quindi l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$.

2.b) Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo. Calcolare l'evoluzione forzata del sistema per ingresso a gradino unitario.

2.a) Per portare il sistema nella forma canonica di Jordan occorre calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice $\mathbf{A}$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = (z-1)(z-2)(z+1)$$

Gli autovalori del sistema sono $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ e $z_3 = -1$. I corrispondenti autovettori sono:

$$(\mathbf{A} - z_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - z_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La trasformazione cercata è

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato nella forma canonica di Jordan è il seguente

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}u(k) \\ y(k) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \right.$$

L'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$ è quindi la seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2^k & (-1)^k \\ 0 & 0 & -(-1)^k \\ 1 & 2^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^k & (-1)^k - 2^k & \\ 0 & -(-1)^k & 0 \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il sistema rimane fermo sullo stato iniziale.

2.b) La funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema complessivo si ricava facilmente dalla forma canonica di Jordan

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-2 & 0 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

L'evoluzione forzata dell'uscita per ingresso a gradino è quindi la seguente

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{1}{z+1}\frac{z}{z-1} = z\left[\frac{0.5}{z-1} - \frac{0.5}{z+1}\right]$$

da cui si ottiene

$$y(n) = 0.5[1 - (-1)^n]$$

3) Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^3 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + x_2^3 \end{cases}$$

3.a) Si studi la stabilità del sistema nell'origine utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov al variare del parametro α;

3.b) Posto $\alpha = 1$ e utilizzando la funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + \beta x_2^2$, si determini se esistono valori per il parametro β che permettano di decidere sulla stabilità o meno del sistema nell'origine.

3.a) L'origine è chiaramente un punto di equilibrio. Lo Jacobiano del sistema è il seguente:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & \alpha \\ -3x_1^2 & +3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Nell'origine gli autovalori dello Jacobiano sono nulli:

$$\mathbf{J}(x_1,\, x_2)|_{(0,\,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace

3.b) Derivando la funzione di Lyapunov si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1,\; x_2) &= 4x_1^3\dot{x}_1 + 2\beta x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1^3(x_1^3 + x_2) + 2\beta x_2(-x_1^3 + x_2^3) \\ &= 4x_1^6 + 4x_1^3x_2 - 2\beta x_2x_1^3 + 2\beta x_2^4 \\ &= 4x_1^6 + 2(2-\beta)x_1^3x_2 + 2\beta x_2^4 > 0 \end{aligned}$$

Per $\beta = 2$ la funzione $\dot{V}(x_1,\; x_2)$ è definita positiva per cui in base al criterio di instabilità di Lyapunov si può concludere che nell'origine il sistema è instabile.

4) Dato il sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t)\,x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

4.a) Si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine considerando $u(t) = 0$. Si impieghi il criterio ridotto di Lyapunov e, se necessario, la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ ed il teorema di La Salle–Krasowskii;

4.b Imponendo $u(t) = k_1\,x_1(t) + k_2\,x_2(t)$ si determini per quali valori non nulli dei guadagni k_1 e k_2 l'origine è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

4.a) L'origine è un punto di equilibrio. Lo jacobiano del sistema è:

$$J(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ -6x_1^2 x_2 & -2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uno degli autovalori è sull'asse immaginario per cui il criterio ridotto di Lyapunov non è efficace per studiare la stabilità del punto. Se si utilizza la funzione candidata di Lyapunov $V(x_1,\, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ si ottiene:

$$\dot{V}(x_1,\, x_2) = -4x_1^4(1 + x_1^2) \le 0$$

Essendo $\dot{V}$ semidefinita negativa, si può concludere che il sistema è almeno semplicemente stabile nell'interno dell'origine. L'insieme N dei punti per cui $\dot{V} = 0$ è

$$N = \{x_1 = 0,\; x_2 \in R\}$$

L'unico punto dell'insieme N che soddisfa le equazioni differenziali del sistema dato è $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Per il teorema di La Salle Krasowskii si può quindi affermare che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

4.b) In presenza della retroazione $u(t) = k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t)$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2^2(t) - x_1^3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^3(t)\, x_2(t) + k_1\, x_1(t) + k_2\, x_2(t) \end{cases}$$

In questo caso lo jacobiano si trasforma come segue

$$J(x_1,\, x_2) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 4x_2 \\ k_1 - 6x_1^2 x_2 & k_2 - 2x_1^3 \end{bmatrix}$$

Calcolando tale Jacobiano nell'origine si ottiene:

$$J(0,\, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

È chiaro quindi che l'origine è asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1 \in R$.

1) Il grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

- ◯ è pari al numero di autovalori distinti della matrice $\mathbf{A}$;
- ◯ è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ◯ è pari al numero di miniblocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
- ⊗ è sempre minore od uguale ad n.

2) Scrivere l'equazione di Lyapunov 1) per sistemi tempo continui e 2) per sistemi tempo discreti

1) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ 2) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$

3) Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1^4 + x_2^2 - x_2^4$:

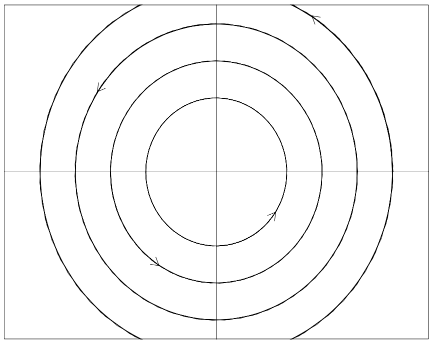
- ⊗ è definita positiva;

○ è semi-definita positiva;
○ è semi-definita negativa;
○ non è definita positiva né negativa.

4) Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori complessi coniugati: $\lambda_{1,2} = \pm j$.

Ad autovalori immaginari corrispondono degli andamenti concentrici:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} \mathbf{x}_0$$



5) Il numero di autovalori distinti di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

⊗ è pari al numero di blocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
○ è pari al numero di miniblocchi di Jordan della matrice $\mathbf{A}$;
○ è pari al grado r del polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$;
⊗ è minore od uguale al numero di autovettori linearmente indipendenti della matrice $\mathbf{A}$.

6) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

7) Enunciare il criterio di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi discreti.
Sia $\mathbf{x} = 0$ *uno stato di equilibrio per il sistema discreto* $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(x(k))$. *Se in un intorno* W *dell'origine esiste una funzione* $V(\mathbf{x})$ *definita positiva e se la funzione*

$$\Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{f}(x(k))) - V(\mathbf{x})$$

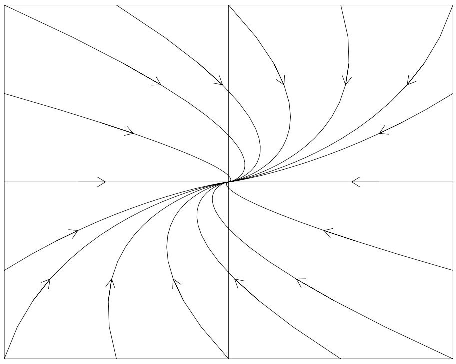
è semidefinita negativa, allora l'origine è stabile. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ *è definita negativa, allora l'origine è asintoticamente stabile.*

8) Per sistemi regolari tempo-varianti

○ gli stati di equilibrio di determinano imponendo ingressi costanti;
○ la stabilità di un sistema lineare tempo variante è completamente determinata dalla posizione degli autovalori della matrice di sistema $\mathbf{A}(t)$;
⊗ la stabilità di un sistema lineare tempo variante è completamente determinata dalla norma della matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$;

9) Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori coincidenti $\lambda_{1,2} = -1$ a cui corrisponde un solo autovettore reale, per esempio $\mathbf{v} = [1,\ 0]^{\mathrm{T}}$.
Ad autovalori coincidenti caratterizzati da un solo autovettore reale corrispondono gli andamenti mostrati in figura:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t} \mathbf{x}_0$$



10) Dato un sistema lineare, stazionario, discreto, con n autovalori distinti tutti reali negativi, allora:

- ⊗ la matrice di stato del sistema è diagonalizzabile;
- ○ il sistema è stabile;
- ○ il sistema è raggiungibile;
- ○ il sistema è osservabile;

11) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t & 0 \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

12) Indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie di un sistema continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_1 = 2$ a cui corrispondono due autovettori reali v_1 e v_2 perpendicolari tra di loro.

Ad autovalori reali distinti corrispondono gli andamenti mostrati in figura (andamenti delle traiettorie a "sella"):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t} \mathbf{x}_0$$

13) Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^4 x_4^2 (x_1^2 + x_2^2)$:

- ○ è definita positiva;
- ⊗ è semi-definita positiva;
- ○ è semi-definita negativa;
- ○ non è definita positiva né negativa.

14) Sia dato un sistema lineare SISO caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

15) Il grado di molteplicità di un autovalore λ nel polinomio minimo $m(\lambda)$ di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n

- ⊗ è sempre minore od uguale al grado di molteplicità dell'autovalore nel polinomio caratteristico $\Delta(\lambda)$;
- ⊗ è sempre pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato a quel autovalore;
- ○ è sempre pari numero di autovettori associati a quel autovalore;

16) Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto ($A = \sqrt{13},\ \ \theta = \arctan\frac{2}{3}$):

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} A^k\cos(k\theta) & A^k\sin(k\theta) & 0 \\ -A^k\sin(k\theta) & A^k\cos(k\theta) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

17) Scrivere le relazioni che permettono di calcolare l'esponenziale di matrice $e^{\mathbf{A}t}$ e la potenza $\mathbf{A}^k$ utilizzando, rispettivamente, la trasformata di Laplace e la $\mathcal{Z}$-trasformate

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right], \qquad \mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]$$

10) Nell'intorno del punto $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, la funzione $V(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_1 + 1) + (x_2^2 - 2x_2 + 1)$:

- ⊗ è definita positiva;
- ○ è semi-definita positiva;
- ○ è semi-definita negativa;
- ○ non è definita.