

## Domande

1. Sia  $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  la funzione di transizione dello stato di un sistema dinamico continuo. Completare le seguenti definizioni:

*Uno stato  $x(t_1)$  è raggiungibile dallo stato  $x(t_0)$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  se ...*

*esiste una funzione di ingresso  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  tale che  $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$ .*

*Uno stato  $x(t_0)$  è controllabile allo stato  $x(t_1)$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  se ...*

*esiste una funzione di ingresso  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  tale che  $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$ .*

2. Sia dato un sistema *lineare, discreto, tempo-invariante* descritto dalle matrici  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ . Completare la seguente definizione:

*Due stati  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  sono indistinguibili nel futuro in  $k$  passi se ...*

*per ogni successione di ingresso  $\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)$ , le successioni di uscita  $\mathbf{y}_1(\cdot)$  e  $\mathbf{y}_2(\cdot)$ , che corrispondono agli stati iniziali  $\mathbf{x}_1(0)$  e  $\mathbf{x}_2(0)$ , coincidono nei primi  $k$  passi:*

$$\mathbf{x}_1(0) \stackrel{k}{\approx} \mathbf{x}_2(0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{y}_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq k$$

3. Relativamente al sistema lineare discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ , scrivere in termini delle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

4. Sia  $S' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T})$  il sistema che si ottiene da  $S = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  applicando la trasformazione di coordinate  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$ . La matrice di trasformazione  $\tilde{\mathbf{T}}$  che permette di passare dal sistema  $S_D$  (duale di  $S$ ) al sistema  $S'_D$  (duale di  $S'$ ) in base alla trasformazione di coordinate  $\mathbf{x}_D = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x}'_D$  è

- $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^T$
- $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}$
- $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^T)^{-1}$
- $\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^{-1})^T$

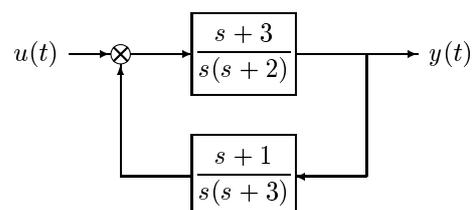
5. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo (raggiungibile e osservabile) caratterizzato dalle seguenti matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , quando si utilizza un periodo di campionamento  $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [ 1 \quad 0 ]$$

- è un sistema raggiungibile;
- è un sistema non raggiungibile;
- è un sistema osservabile;
- è un sistema non osservabile;

6. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- Il sistema è completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente raggiungibile;
- Il sistema è completamente osservabile;
- Il sistema non è completamente osservabile,



7. Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nel caso in cui la parte non raggiungibile e non osservabile sia assente (cioè abbia dimensione nulla):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [ \mathbf{C}_1 \quad 0 \quad \mathbf{C}_3 ]$$

8. Calcolare una realizzazione completamente raggiungibile della seguente matrice di trasferimento:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s(s+3)} \\ \frac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+6s} \\ \frac{s+3}{s(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Per un sistema lineare, tempo discreto e stazionario di dimensione  $n$ :

- La completa raggiungibilità implica la controllabilità.
- La completa controllabilità implica la raggiungibilità.

10. Dato un sistema dinamico lineare a tempo continuo, stazionario, instabile, completamente osservabile, allora:

- Non è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena aperta perchè l'errore di stima diverge.
- È possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa, con errore di stima convergente.
- Non è possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa.

11. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione  $n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno in catena chiusa:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

12. Siano  $\mathcal{X}^+$  e  $\mathcal{E}^-$  rispettivamente i sottospazi raggiungibile e non osservabile di un sistema lineare tempo-continuo:

- se  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}^+$  per ogni  $t \geq 0$  e per ogni funzione di ingresso
- se  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}^-$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}^-$  per ogni  $t \geq 0$  e per ogni funzione di ingresso

13. Sia dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto di dimensione  $n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- Mediante la retroazione stato-ingresso è possibile allocare a piacimento gli autovalori della parte raggiungibile del sistema.
- La retroazione stato-ingresso non consente di modificare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità.
- E' sempre possibile stabilizzare il sistema mediante retroazione stato-ingresso se gli autovalori del sottosistema relativo alla parte non-raggiungibile hanno modulo inferiore all'unità.

14. Scrivere una realizzazione completamente osservabile e completamente raggiungibile della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+4)(s+3)} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

15. Nel caso di sistemi discreti, scrivere la condizione che deve essere soddisfatta affinché uno stato finale  $\mathbf{x}_f$  sia raggiungibile in  $k$  passi a partire dallo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 \in \text{Im} [ \mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} ]$$

16. Enunciare il *Lemma di Heymann*:

Se  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  è raggiungibile e se  $\mathbf{b}_i$  è una colonna non nulla di  $\mathbf{B}$ , allora esiste una matrice  $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m \times n}$  tale che  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_i, \mathbf{b}_i)$  è raggiungibile.

17. Nella sintesi del regolatore, la proprietà di separazione

- afferma che mediante retroazione è sempre possibile stabilizzare un qualsiasi sistema dinamico lineare;
- afferma che la sintesi dell'osservatore può essere fatta indipendentemente dalla sintesi della retroazione statica;
- è valida solo nel caso di osservatore asintotico di ordine pieno;
- è valida anche nel caso di osservatore asintotico di ordine ridotto;

18. Sia  $\mathcal{S}_D$  il sistema duale del sistema discreto  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :

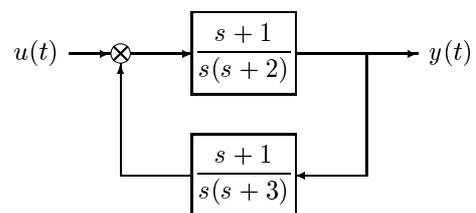
- Se  $\mathcal{S}$  è raggiungibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è ricostruibile;
- Se  $\mathcal{S}$  è controllabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è raggiungibile;
- Se  $\mathcal{S}$  è osservabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è ricostruibile;
- Se  $\mathcal{S}$  è ricostruibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è raggiungibile;

19. Sia dato un sistema lineare continuo completamente raggiungibile e osservabile avente due soli poli complessi coniugati in  $p_{12} = -4 \pm j$ . Indicare per quali valori del periodo di campionamento  $T$  il corrispondente sistema a segnali campionati è completamente raggiungibile:

$$T \neq k\pi \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

20. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- Il sistema è completamente osservabile;
- Il sistema non è completamente osservabile,
- Il sistema è completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente raggiungibile;

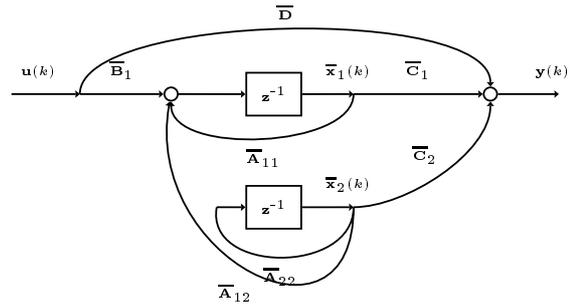


21. Scrivere, in funzione delle sottomatrici  $\mathbf{A}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{C}_j$ , la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile  $\mathcal{X}^+$  e dal sottospazio non osservabile  $\mathcal{E}^-$  riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} & \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [ \mathbf{C}_1 \quad 0 \quad \mathbf{C}_3 ] \end{cases}$$

22. Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di raggiungibilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$



23. Relativamente ad un sistema lineare discreto, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{v}}(k+1) &= (\bar{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(k) + (\bar{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

24. Siano  $\mathcal{X}^+$  e  $\mathcal{X}_K^+$  i sottospazi di raggiungibilità associati alle coppie di matrici  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  e  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}, \mathbf{B})$ . Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

- $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}_K^+$   
  $\mathcal{X}_K^+ \subset \mathcal{X}^+$   
  $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}_K^+$   
 nessuna delle precedenti

25. Il sistema duale  $\mathcal{S}_D$  del sistema  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  è :

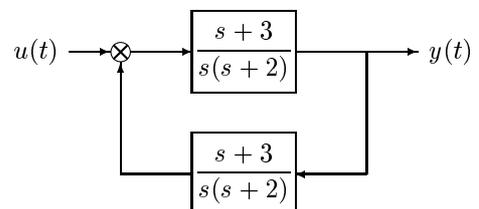
- $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{D})$   
  $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$   
  $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{D}^T)$   
  $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D})$

26. Sia  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k)$  il sistema discreto ottenuto campinando, con periodo di campionamento  $T$ , un sistema continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  asintoticamente stabile. Si può allora affermare che

- La matrice  $\mathbf{F}$  ha tutti gli autovalori a parte reale negativa;  
 La matrice  $\mathbf{F}$  ha tutti gli autovalori a modulo minore di 1;  
 La matrice  $\mathbf{F}$  è stabile solo se  $T \neq \frac{2k\pi}{\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j)}$

27. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- Il sistema è completamente raggiungibile;  
 Il sistema non è completamente raggiungibile;  
 Il sistema è completamente osservabile;  
 Il sistema non è completamente osservabile.



28. Scrivere in funzione delle sottomatrici  $\mathbf{A}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{C}_j$  l'espressione finale della matrice di trasferimento  $\mathbf{H}(z)$  di una sistema discreto caratterizzato da matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  aventi la seguente struttura

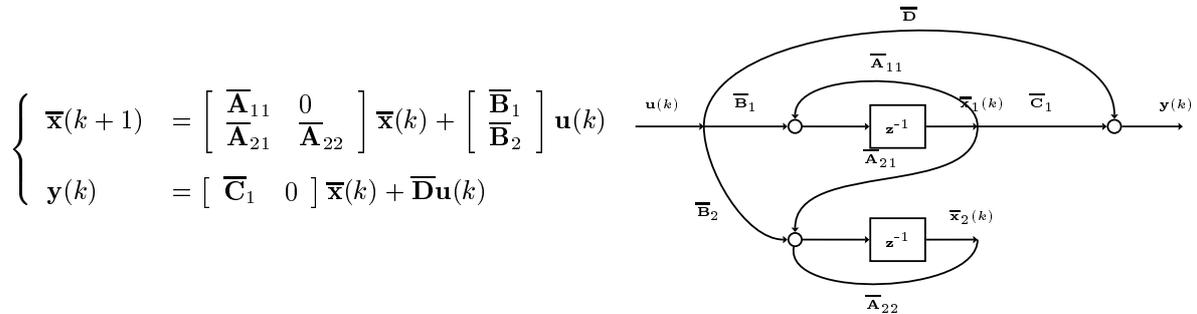
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad 0 \quad \mathbf{C}_3]$$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}_1(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{B}_1$$

29. Sia dato un sistema lineare SISO caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ . Indicare la struttura delle matrici  $\mathbf{A}_C$ ,  $\mathbf{b}_C$  e  $\mathbf{c}_C$  della corrispondente forma canonica di controllo. Sia  $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$  il polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_C = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1}]$$

30. Disegnare lo schema a blocchi della forma standard di osservabilità di un sistema lineare tempo-discreto caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ :



31. Relativamente ad un sistema lineare continuo, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato di ordine ridotto.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = (\bar{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(t) + (\bar{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(t) + (\bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(t)$$

32. Sia  $\mathcal{S}_D$  il sistema duale del sistema discreto  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :

- Se  $\mathcal{S}$  è raggiungibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è osservabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è controllabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è ricostruibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;

33. Scrivere la funzione di trasferimento  $G(s)$  corrispondente al seguente sistema dinamico:

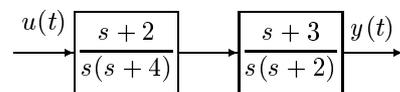
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}(t)$$

$$G(s) = \frac{8s^3 + 7s^2 + 6s + 5}{s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

34. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- Il sistema è completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente raggiungibile;
- Il sistema è completamente osservabile;
- Il sistema non è completamente osservabile.



35. Scrivere, in funzione delle sottomatrici  $\mathbf{A}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{C}_j$ , la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile  $\mathcal{X}^+$  e dal sottospazio non osservabile  $\mathcal{E}^-$  riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} & \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad 0] \end{cases}$$

36. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabilità in  $k$  passi del sistema lineare discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ :

$$\text{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \text{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

37. Per un sistema lineare stazionario discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$  avente matrice di sistema  $\mathbf{A}$  non singolare, è possibile affermare che:

- se il sistema è completamente controllabile è anche completamente raggiungibile;
- se il sistema è completamente raggiungibile è anche completamente controllabile;
- se il sistema è completamente osservabile è anche completamente ricostruibile;
- se il sistema è completamente ricostruibile è anche completamente osservabile;

38. Un sistema dinamico lineare stazionario è caratterizzato da matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

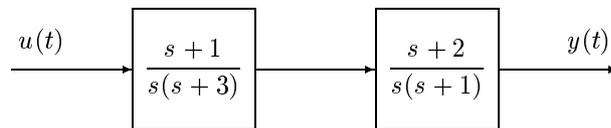
$$\mathbf{C} = [ \mathbf{C}_1 \quad 0 ]$$

- Il sistema è in forma standard di osservabilità
- Il sistema è in forma standard di raggiungibilità
- Il sistema non è completamente osservabile
- Il sistema non è completamente raggiungibile

39. Il sistema duale  $\mathcal{S}_D$  del sistema  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  è:

- $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T)$
- $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T)$
- $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$
- $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$

40. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:



- Il sistema è completamente controllabile;
- Il sistema è completamente osservabile;
- Per tale sistema esiste un osservatore asintotico dello stato;

41. Sia dato un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  completamente raggiungibile. Il corrispondente sistema a dati campionati (essendo  $T$  il periodo di campionamento) è completamente raggiungibile se e solo se per ogni coppia  $\lambda_i, \lambda_j$  di autovalori distinti di  $\mathbf{A}$  aventi la stessa parte reale, vale la relazione:

$$\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

42. Sia dato il seguente sistema lineare continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Scrivere le equazioni dello stimatore asintotico dello stato di ordine pieno:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}]\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

43. Sia  $\mathcal{S}_D$  il sistema duale del sistema discreto  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :

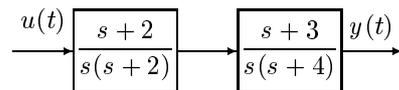
- Se  $\mathcal{S}$  è controllabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è ricostruibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è raggiungibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è osservabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;

44. Sia dato un sistema lineare continuo completamente raggiungibile e osservabile avente quattro soli poli complessi coniugati in  $p_{1,2} = -3 \pm j$  e  $p_{3,4} = -3 \pm j2$ . Indicare per quali valori del periodo di campionamento  $T$  il corrispondente sistema a segnali campionati è completamente raggiungibile:

$$T \neq \frac{2k\pi}{1}, \quad T \neq \frac{2k\pi}{2}, \quad T \neq \frac{2k\pi}{3}, \quad T \neq \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \dots$$

45. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- Il sistema può essere completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente raggiungibile;
- Il sistema può essere completamente osservabile;
- Il sistema non è completamente osservabile.



46. Scrivere, in funzione delle sottomatrici  $\mathbf{A}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{C}_j$ , la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile  $\mathcal{X}^+$  e dal sottospazio non osservabile  $\mathcal{E}^-$  riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{2,4} \\ 0 & \mathbf{A}_{3,3} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{4,3} & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} & \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [ 0 \quad \mathbf{C}_3 \quad 0 ] \end{cases}$$

47. Il sottospazio di raggiungibilità  $\mathcal{X}^+$  di un sistema lineare  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$

- è il più piccolo sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenuto nel  $\ker \mathbf{C}$
- è il più grande sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenuto nel  $\ker \mathbf{C}$
- è il più piccolo sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenente  $\text{Im} \mathbf{B}$
- è il più grande sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenente  $\text{Im} \mathbf{B}$

48. Sia  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  un sistema lineare ad un ingresso e sia  $n > 1$  la dimensione dello spazio degli stati. Se il vettore  $\mathbf{b}$  coincide con uno degli autovettori della matrice  $\mathbf{A}$ , allora

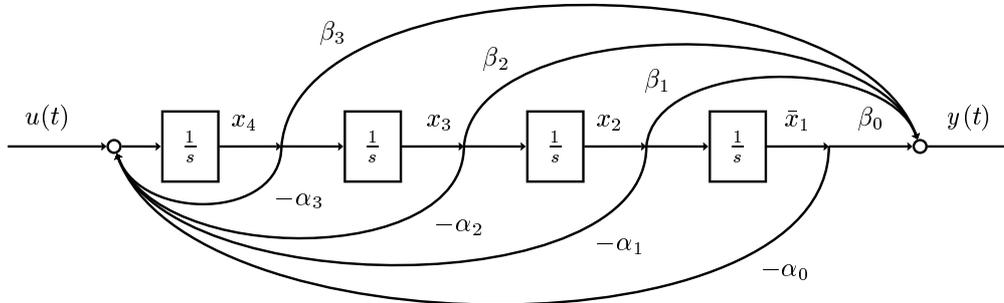
- il sistema non è completamente raggiungibile;
- il sistema può essere completamente raggiungibile;
- il sottospazio di raggiungibilità  $\mathcal{X}^+$  ha dimensione unitaria.

49. Relativamente al sistema lineare discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$ , scrivere in termini delle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  una condizione necessaria e sufficiente per garantire che i due stati  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  siano indistinguibili del futuro in  $k$  passi:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k \end{bmatrix} = \mathcal{E}^-(k)$$

50. Disegnare lo schema a blocchi di un sistema tempo-continuo caratterizzato dalle seguenti matrici  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{b}_c$  e  $\mathbf{c}_c$  in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_C = [ \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 ]$$



51. Scrivere una realizzazione completamente controllabile e completamente osservabile della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [ 1 \quad 1 \quad 1 ] \mathbf{x}(t)$$

52. Nella sintesi del regolatore, la proprietà di separazione

- è valida solo nel caso di osservatore asintotico di ordine pieno;
- è valida anche nel caso di osservatore asintotico di ordine ridotto;
- afferma che mediante retroazione è sempre possibile stabilizzare un qualsiasi sistema dinamico lineare;
- afferma che la sintesi dell'osservatore può essere fatta indipendentemente dalla sintesi della retroazione statica;

53. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Scrivere, in funzione delle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e del periodo di campionamento  $T$ , l'espressione delle matrici  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati.

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

54. Scrivere in funzione delle sottomatrici  $\mathbf{A}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{C}_j$  l'espressione finale della matrice di trasferimento  $\mathbf{H}(z)$  di una sistema discreto caratterizzato da matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  aventi la seguente struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [ 0 \quad \mathbf{C}_2 ]$$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = [ 0 \quad \mathbf{C}_2 ] \begin{bmatrix} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} & 0 \\ (*) & (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22})^{-1}\mathbf{B}_2$$

55. Sia dato un sistema tempo-discreto  $S = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  con  $m$  ingressi e  $p$  uscite. Il corrispondente sistema duale ha la seguente struttura:

$$S_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T, ) \quad \text{avente } p \text{ ingressi e } m \text{ uscite}$$

Indicare inoltre quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $S$  osservabile  $\Rightarrow S_D$  controllabile;
  - $S$  controllabile  $\Rightarrow S_D$  osservabile;
  - $S$  ricostruibile  $\Rightarrow S_D$  osservabile;
  - $S$  raggiungibile  $\Rightarrow S_D$  ricostruibile;
56. Data la seguente "matrice" di trasferimento  $\mathbf{H}(s)$  di un sistema del quarto ordine tempo continuo con un solo ingresso ( $m=1$ ) ed una sola uscita ( $p=1$ ) completamente raggiungibile

$$\mathbf{H}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s^2+2)^2} = \frac{s^2+6s+8}{s^4+4s^2+4}$$

scrivere la corrispondente forma canonica di controllo  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c)$ .

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_c = [ 8 \quad 6 \quad 1 \quad 0 ]$$

Una retroazione dello stato applicata al sistema  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c)$ :

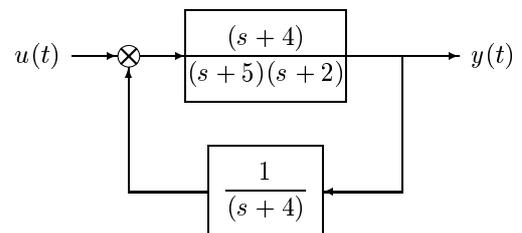
- modifica solo i poli del sistema retroazionato;
  - modifica solo gli zeri del sistema retroazionato;
  - modifica sia i poli che gli zeri del sistema retroazionato;
57. Dire come si costruisce la matrice di trasformazione  $\mathbf{P}$  che permette di portare un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  in forma canonica di osservabilità  $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$ . Indicare inoltre la struttura delle matrici  $\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o$  e  $\mathbf{C}_o$ :

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_o = [ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 ] \quad \mathbf{P} = [(\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^-]^{-1}$$

58. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- Il sistema è completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente raggiungibile;
- Il sistema è completamente osservabile;
- Il sistema non è completamente osservabile,



59. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, due stati  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  sono indistinguibili nel futuro se per ogni successione di ingresso  $\mathbf{u}(\cdot)$

- le corrispondenti successioni di uscita  $\mathbf{y}_1(\tau)$  e  $\mathbf{y}_2(\tau)$  coincidono per  $\tau \geq 0$ ;
- le corrispondenti evoluzioni libere  $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$  e  $\mathbf{y}_{l,2}(\tau)$  coincidono per  $\tau \geq 0$ ;
- se i vettori  $\mathbf{x}_1$  ed  $\mathbf{x}_2$  appartengono al sottospazio  $\mathcal{E}^-$ ;
- se il vettore  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  appartiene al sottospazio  $\mathcal{E}^-$ ;

60. Sia  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  un sistema lineare caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  e sia  $\mathcal{S}_c = (\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  il corrispondente sistema in forma canonica (di raggiungibilità o di osservabilità). Scrivere, in funzione delle matrici di raggiungibilità e di osservabilità dei due sistemi, le matrici  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{P}$  che portano il sistema  $\mathcal{S}$  nella corrispondente forma canonica

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}, \quad \mathbf{P} = [(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-]^{-1}$$

61. Sia  $\mathcal{S}_D$  il sistema duale del sistema continuo  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ :

- Se  $\mathcal{S}$  è controllabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è ricostruibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è osservabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è osservabile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è controllabile;
- Se  $\mathcal{S}$  è raggiungibile  $\Rightarrow \mathcal{S}_D$  è ricostruibile;

62. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo caratterizzato dalle seguenti matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , quando si utilizza un periodo di campionamento  $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

- è un sistema non raggiungibile;
- è un sistema non osservabile;

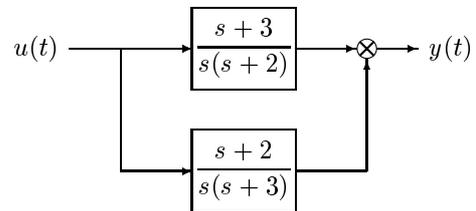
63. Enunciare la *Proprietà di separazione*:

*La sintesi del blocco di retroazione ( $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ ) e del blocco di stima ( $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ ) può essere fatta in modo indipendente*

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

64. Sia dato il sistema lineare continuo riportato a fianco:

- Il sistema non è completamente raggiungibile;
- Il sistema è completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente osservabile;
- Il sistema è completamente osservabile.



65. Siano  $\mathcal{E}^-$  e  $\mathcal{E}_{\mathbf{L}}^-$  i sottospazi di non osservabilità associati alle coppie di matrici  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  e  $(\mathbf{A} + \mathbf{LC}, \mathbf{C})$ . Il legame esistente tra questi sottospazi è il seguente

- $\mathcal{E}^- \subset \mathcal{E}_{\mathbf{L}}^-$
- $\mathcal{E}_{\mathbf{L}}^- \subset \mathcal{E}^-$
- $\mathcal{E}^- = \mathcal{E}_{\mathbf{L}}^-$
- nessuna delle precedenti

66. Il sistema discreto a segnali campionati che si ottiene dal sistema continuo (raggiungibile e osservabile) caratterizzato dalle seguenti matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , quando si utilizza un periodo di campionamento  $T = 2\pi$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

- è un sistema raggiungibile;
- è un sistema non raggiungibile;
- è un sistema osservabile;

$\otimes$  è un sistema non osservabile;

67. Relativamente ad un sistema lineare stazionario discreto  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$  che ha almeno un autovalore nell'origine, è possibile affermare che:

- se il sistema è completamente controllabile allora è anche completamente raggiungibile;
- se il sistema è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile;
- se il sistema è completamente osservabile allora è anche completamente ricostruibile;
- se il sistema è completamente ricostruibile allora è anche completamente osservabile;

68. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  aventi la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [ \mathbf{C}_1 \quad 0 ]$$

- Il sistema non è completamente raggiungibile;
- Il sistema non è completamente osservabile;
- Il sistema può essere raggiungibile;

69. Scrivere la forma finale a cui si giunge applicando ad un sistema dinamico lineare stazionario la scomposizione canonica di Kalman nella forma più generale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 & \mathbf{A}_{1,3} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{2,4} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{4,3} & \mathbf{A}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [ \mathbf{C}_1 \quad 0 \quad \mathbf{C}_3 \quad 0 ]$$

70. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti, i sottospazi  $\mathcal{X}^+(k)$  raggiungibili in  $k$  passi soddisfano le seguenti relazioni:

- $\mathcal{X}^+(1) \subset \mathcal{X}^+(2) \subset \dots \subset \mathcal{X}^+(k) \subset \dots$
- $\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}^+(k) \subseteq \dots$
- $\mathcal{X}^+(1) \supset \mathcal{X}^+(2) \supset \dots \supset \mathcal{X}^+(k) \supset \dots$
- $\mathcal{X}^+(1) \supseteq \mathcal{X}^+(2) \supseteq \dots \supseteq \mathcal{X}^+(k) \supseteq \dots$

71. Siano  $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  e  $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  due sistemi algebricamente equivalenti tali che  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$ . Tra le corrispondenti matrici di raggiungibilità  $\mathcal{R}_1^+$  ed  $\mathcal{R}_2^+$  esiste il legame:

- $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}\mathcal{R}_2^+$
- $\mathcal{R}_1^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}_2^+$
- $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}$
- $\mathcal{R}_1^+ = \mathcal{R}_2^+\mathbf{T}^{-1}$

72. Siano  $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  e  $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  due sistemi algebricamente equivalenti tali che  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$ . Tra le corrispondenti matrici di osservabilità  $\mathcal{O}_1^-$  ed  $\mathcal{O}_2^-$  esiste il legame:

- $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}\mathcal{O}_2^-$
- $\mathcal{O}_1^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_2^-$
- $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}$
- $\mathcal{O}_1^- = \mathcal{O}_2^-\mathbf{T}^{-1}$

73. Nel caso di sistemi lineari invarianti  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , la controllabilità implica la raggiungibilità:

- sempre;
- se il sistema è tempo continuo;

- se il sistema è tempo discreto;  
 se la matrice  $\mathbf{A}$  è non singolare;
74. Nel caso di sistemi discreti lineari invarianti  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k)$ , la successione di ingresso  $\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(\bar{k}-1)$  che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  allo stato finale  $\mathbf{x}(\bar{k})$ :
- esiste se il sistema è raggiungibile;  
 esiste se  $\mathbf{x}(\bar{k}) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$ ;  
 esiste se  $\mathbf{x}(\bar{k}) - e^{\mathbf{A}\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$ ;  
 esiste se  $\mathbf{x}(\bar{k}) - \mathbf{A}^{\bar{k}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(\bar{k})$ ;  
 se esiste è unica;
75. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ , la funzione di ingresso  $\mathbf{u}(t)$ , per  $t \in [0, \bar{t}]$ , che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  allo stato finale  $\mathbf{x}(\bar{t})$ :
- esiste se il sistema è raggiungibile;  
 esiste se  $\mathbf{x}(\bar{t}) \in \mathcal{X}^+$ ;  
 esiste se  $\mathbf{x}(\bar{t}) - e^{\mathbf{A}\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$ ;  
 esiste se  $\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{A}^{\bar{t}}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$ ;  
 se esiste è unica;
76. Nel caso di sistemi continui lineari invarianti  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ , l'insieme  $\mathcal{X}^+(t)$  degli stati raggiungibili dall'origine nell'intervallo di tempo  $[0, t]$ :
- è un sottospazio;  
 è indipendente dal tempo  $t$ ;  
 è uno spazio invariante di  $\mathbf{A}$ ;
77. La matrice di trasferimento  $\mathbf{H}(z)$  di un sistema discreto:
- è funzione della sola parte raggiungibile del sistema;  
 è funzione della sola parte osservabile del sistema;  
 è funzione delle condizioni iniziali del sistema;
78. Il seguente sistema lineare continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  posto in forma canonica di Jordan:
- $$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$
- è raggiungibile;  
 non è raggiungibile;  
 è controllabile;  
 non è controllabile;
79. Mediante retroazione statica dello stato  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$  è possibile posizionare a piacere:
- tutti gli autovalori del sistema;  
 tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;  
 tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;
80. Mediante retroazione statica dell'uscita  $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{K}}\mathbf{y}$ , è possibile :
- posizionare a piacere tutti gli autovalori della parte raggiungibile del sistema;  
 posizionare a piacere tutti gli autovalori della parte osservabile del sistema;

- modificare la posizione di alcuni autovalori della parte raggiungibile del sistema;
  - modificare la posizione di alcuni autovalori della parte osservabile del sistema;
81. Il "PBH test" afferma che "il sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  è raggiungibile se e solo se"
- la matrice  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$  ha rango pieno per ogni  $s \in \mathcal{C}$ .
  - la matrice  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}^k \mid \mathbf{B}]$  ha rango pieno per ogni  $k \in \mathcal{Z}$ .
  - la matrice  $[s\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}t} \mid \mathbf{B}]$  ha rango pieno per ogni  $t \in \mathcal{R}$ .
82. Un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  può essere portato in forma canonica di controllo
- sempre;
  - se e solo se è raggiungibile;
  - se e solo se è controllabile;
  - solo se la matrice  $\mathbf{A}$  è non singolare;
83. La formula di Ackerman per il calcolo del vettore  $\mathbf{k}^T$  che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata
- per qualunque sistema;
  - solo se il sistema è raggiungibile;
  - solo per sistemi ad un solo ingresso;
84. Una retroazione algebrica dello stato
- modifica i poli del sistema di partenza;
  - modifica gli zeri del sistema di partenza;
  - modifica il sottospazio raggiungibile  $\mathcal{X}^+$  del sistema di partenza;
85. Un sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  è "stabilizzabile" mediante retroazione statica dello stato
- se il sistema è stabile;
  - se il sistema è raggiungibile;
  - se la parte instabile del sistema è raggiungibile;
  - se la parte non raggiungibile del sistema è stabile;
86. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena aperta" di ordine pieno può essere utilizzato
- solo se il sistema è stabile;
  - solo se il sistema è osservabile;
  - solo se la parte non osservabile del sistema è stabile;
  - solo se la parte instabile del sistema è osservabile;
87. Uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" di ordine pieno può essere utilizzato
- solo se il sistema è stabile;
  - solo se il sistema è osservabile;
  - solo se la parte non osservabile del sistema è stabile;
  - solo se la parte instabile del sistema è osservabile;
88. Per poter utilizzare uno stimatore asintotico dello stato "in catena chiusa" e di ordine "ridotto"
- il sistema deve essere stabile;
  - il sistema deve essere osservabile;
  - la parte non osservabile del sistema deve essere stabile;
89. Il sistema che si ottiene quando si utilizza un regolatore (cioè la serie di uno stimatore asintotico dello stato e dell'elemento statico di retroazione  $K$ ) per stabilizzare in retroazione un sistema dinamico assegnato

- è un sistema raggiungibile ed osservabile;
- è un sistema non raggiungibile;
- è un sistema non osservabile;

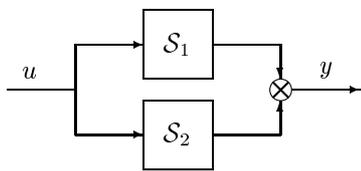
90. Due realizzazioni diverse della stessa matrice di trasferimento  $\mathbf{G}(s)$

- hanno sempre la stessa dimensione;
- possono avere dimensioni diverse;
- hanno lo stesso sottospazio raggiungibile  $\mathcal{X}^+$ ;

91. Una qualunque realizzazione “minima” di una matrice di trasferimento  $\mathbf{G}(s)$

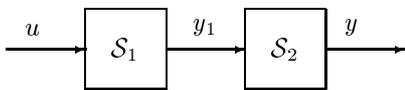
- è raggiungibile;
- è osservabile;
- è stabile;
- è algebricamente equivalente a qualunque altra realizzazione minima;

92. Scrivere le equazioni di stato del sistema  $\mathcal{S}$  che si ottiene ponendo in *parallelo* i due sottosistemi  $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  e  $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ :



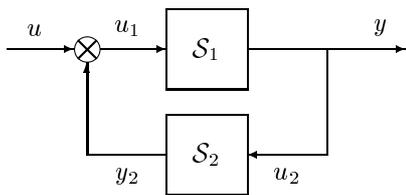
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

93. Scrivere le equazioni di stato del sistema  $\mathcal{S}$  che si ottiene ponendo in *serie* i due sottosistemi  $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  e  $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ :



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

94. Scrivere le equazioni di stato del sistema  $\mathcal{S}$  che si ottiene ponendo in *retroazione* i due sottosistemi  $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  e  $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ :



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

95. Il sottospazio non osservabile  $\mathcal{E}^-$  di un sistema lineare  $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$

- è il più piccolo sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenente il  $\ker \mathbf{C}$ ;
- è il più piccolo sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenuto nel  $\ker \mathbf{C}$ ;
- è il più grande sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenente il  $\ker \mathbf{C}$ ;
- è il più grande sottospazio invariante di  $\mathbf{A}$  contenuto nel  $\ker \mathbf{C}$ ;

96. Scrivere, in funzione delle sottomatrici  $\mathbf{A}_{i,j}$ ,  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{C}_j$ , la struttura della scomposizione canonica di Kalman nel caso di un sistema caratterizzato dal sottospazio raggiungibile  $\mathcal{X}^+$  e dal sottospazio non osservabile  $\mathcal{E}^-$  riportati di seguito

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} & \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [ \mathbf{C}_1 & 0 & 0 ] \end{cases}$$

97. In un sistema lineare discreto tempo-invariante, uno stato  $\mathbf{x}_1$  è indistinguibile nel futuro dallo stato nullo  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$  se per ogni successione di ingresso  $\mathbf{u}(\cdot)$

- la corrispondente successione di uscita  $\mathbf{y}_1(\tau)$  è identicamente nulla:  $\mathbf{y}_1(\tau) = 0$  per  $\tau \geq 0$ ;
- la corrispondente evoluzione libera  $\mathbf{y}_{l,1}(\tau)$  è identicamente nulla:  $\mathbf{y}_{l,1}(\tau) = 0$  per  $\tau \geq 0$ ;
- se il vettore  $\mathbf{x}_1$  appartiene al sottospazio  $\mathcal{E}^-$ ;

98. Un sistema dinamico discreto lineare stazionario è caratterizzato da matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  aventi la seguente struttura:

- Il sistema è raggiungibile;
- Il sistema non è raggiungibile;
- Il sistema è osservabile;
- Il sistema non è osservabile;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [ \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 ]$$

99. Siano  $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  e  $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  due sistemi algebricamente equivalenti tali che  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2$ . Tra le corrispondenti matrici di osservabilità  $\mathcal{O}_1^-$  ed  $\mathcal{O}_2^-$  esiste il legame:

- $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}\mathcal{O}_1^-$
- $\mathcal{O}_2^- = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{O}_1^-$
- $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^- \mathbf{T}$
- $\mathcal{O}_2^- = \mathcal{O}_1^- \mathbf{T}^{-1}$

100. Un sistema lineare  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  può essere scomposto nella forma canonica di Kalman

- sempre;
- solo se il sistema è raggiungibile;
- solo se il sistema è controllabile;
- solo se la matrice  $\mathbf{A}$  è non singolare;

101. Il seguente sistema lineare continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  posto in forma canonica di Jordan:

- è raggiungibile;
- non è raggiungibile;
- è controllabile;
- non è controllabile;

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right]$$

102. La formula  $\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T [\mathcal{R}^+ (\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$  per il calcolo del vettore  $\mathbf{k}^T$  che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato può essere utilizzata

- per qualunque sistema;
- solo se il sistema è raggiungibile;
- solo se il sistema è osservabile;
- solo per sistemi ad un solo ingresso;