Cognome: Nome: N. Matr.: □□□□□□

Teoria dei sistemi e del controllo

LM in Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

Prova pratica del 17 settembre 2010

Rispondere alle seguenti domande, riportando le soluzioni (enunciati, risposte finali e passaggi salienti degli esercizi proposti, ecc.) nei riquadri appositamente predisposti. [Durata 30 min.]

1. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

2. Dare la definizione di "funzione semi-definita positiva".

Una funzione continua $V(\mathbf{x})$ è "semi-definita positiva" nell'interno del punto $\mathbf{x}_0$, se esiste un insieme aperto $W \subseteq \mathbf{R}^n$ di $\mathbf{x}_0$ tale per cui:

1) $V(\mathbf{x}_0) = 0$*;*

2) $V(\mathbf{x}) \geq 0$ *per ogni* $\mathbf{x} \in W - \mathbf{x}_0$.

3. Si consideri il seguente sistema tempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k)$$

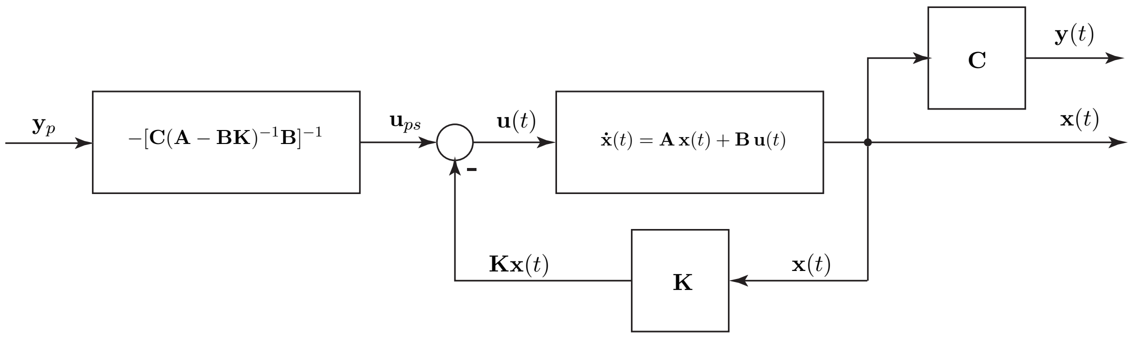
Determinare il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ del sistema quando l'ingresso è costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$.

Il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ si determina imponendo $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_0, \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}_0$$

Il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ è unico solo se la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è invertibile.

4. Riportare lo schema a blocchi di un sistema di *asservimento*, evidenziando in particolare l'espressione del guadagno applicato al riferimento



5. Dato un generico manipolatore, la cui equazione dinamica risulta

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

scrivere l'espressione della dinamica lineare nei parametri $\boldsymbol{\pi}$ e l'equazione che fornisce una stima ai minimi quadrati dei parametri

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\pi} = (\bar{\mathbf{Y}}^T\bar{\mathbf{Y}})^{-1}\bar{\mathbf{Y}}^T\bar{\boldsymbol{\tau}}$$

6. Sia dato il seguente sistema non–lineare, tempo–continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & -x_1^3 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -0.5x_1^3 - 4x_2^3 \end{cases}$$

È facile verificare che il punto $(x_1,\, x_2) = (0,\, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema.

a) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto $(x_1,\, x_2) = (0,\, 0)$ calcolando la matrice $\mathbf{A}$ del corrispondente sistema linearizzato.

La matrice $\mathbf{A}$ del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} -3x_1^2 & 2 \\ -1.5x_1^2 & -12x_2^2 \end{array} \right]_{(x_1=0,\, x_2=0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

b) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $(x_1,\ x_2) = (0,\ 0)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

I due autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono entrambi nulli:

$$s_1 = 0, \qquad\qquad s_2 = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov non è possibile concludere nulla perchè gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ si trovano sull'asse immaginario.

c) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $(x_1,\ x_2) = (0,\ 0)$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov. Si utilizzi la seguente funzione definita positiva: $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 8x_2^2$.

Se si calcola la derivata della funzione $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema non lineare si ottiene:

$$\dot{V} = -4x_1^6 - 64x_2^4 < 0$$

Applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che in $\mathbf{x}_0 = 0$ il sistema è asintoticamente stabile.