

## Teoria dei sistemi e del controllo

LM in Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

### Prova pratica del 17 settembre 2010

Rispondere alle seguenti domande, riportando le soluzioni (enunciati, risposte finali e passaggi salienti degli esercizi proposti, ecc.) nei riquadri appositamente predisposti. [Durata 30 min.]

1. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ . Scrivere, in funzione delle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e del periodo di campionamento  $T$ , l'espressione delle matrici  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$ :

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

2. Dare la definizione di “funzione semi-definita positiva”.

Una funzione continua  $V(\mathbf{x})$  è “semi-definita positiva” nell'interno del punto  $\mathbf{x}_0$ , se esiste un insieme aperto  $W \subseteq \mathbf{R}^n$  di  $\mathbf{x}_0$  tale per cui:

1)  $V(\mathbf{x}_0) = 0$ ;

2)  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in W - \mathbf{x}_0$ .

3. Si consideri il seguente sistema tempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

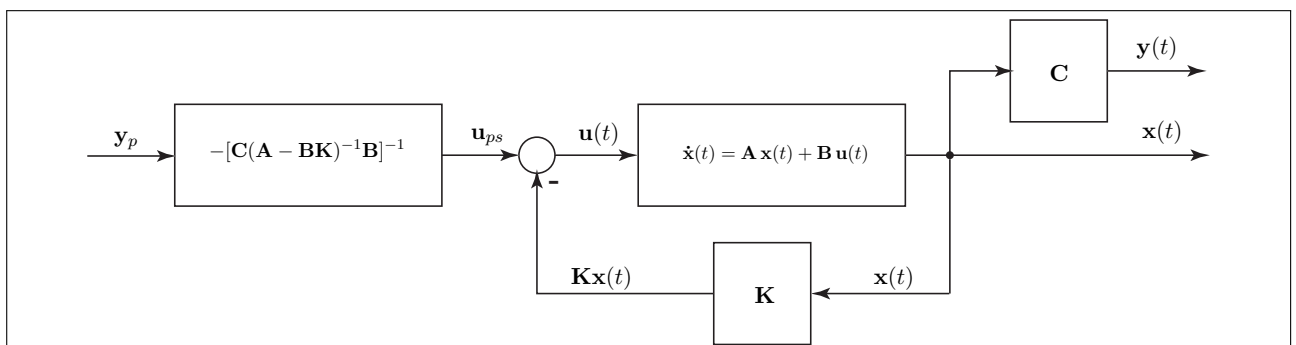
Determinare il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  del sistema quando l'ingresso è costante  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ .

Il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  si determina imponendo  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0, \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}_0$$

Il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  è unico solo se la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  è invertibile.

4. Riportare lo schema a blocchi di un sistema di *asservimento*, evidenziando in particolare l'espressione del guadagno applicato al riferimento



5. Dato un generico manipolatore, la cui equazione dinamica risulta

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

scrivere l'espressione della dinamica lineare nei parametri  $\boldsymbol{\pi}$  e l'equazione che fornisce una stima ai minimi quadrati dei parametri

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi} = (\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}})^{-1} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\boldsymbol{\tau}}$$

6. Sia dato il seguente sistema non-lineare, tempo-continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.5x_1^3 - 4x_2^3 \end{cases}$$

È facile verificare che il punto  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  è un punto di equilibrio per il sistema.

- a) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  calcolando la matrice  $\mathbf{A}$  del corrispondente sistema linearizzato.

La matrice  $\mathbf{A}$  del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 2 \\ -1.5x_1^2 & -12x_2^2 \end{bmatrix}_{(x_1=0, x_2=0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

I due autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  sono entrambi nulli:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov non è possibile concludere nulla perchè gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  si trovano sull'asse immaginario.

- c) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov. Si utilizzi la seguente funzione definita positiva:  $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 8x_2^2$ .

Se si calcola la derivata della funzione  $V(\mathbf{x})$  lungo le traiettorie del sistema non lineare si ottiene:

$$\dot{V} = -4x_1^6 - 64x_2^4 < 0$$

Applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che in  $\mathbf{x}_0 = 0$  il sistema è asintoticamente stabile.