Cognome: Nome: N. Matr.: □□□□□□

Teoria dei sistemi e del controllo

LM in Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

Prova pratica del 16 Luglio 2010

Rispondere alle seguenti domande, riportando le soluzioni (enunciati, risposte finali e passaggi salienti degli esercizi proposti, ecc.) nei riquadri appositamente predisposti. [Durata 30 min.]

1. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

2. Dare la definizione di "funzione definita positiva".

Una funzione continua $V(\mathbf{x})$ è "definita positiva" nell'interno del punto $\mathbf{x}_0$, se esiste un insieme aperto $W \subseteq \mathbf{R}^n$ di $\mathbf{x}_0$ tale per cui:

1) $V(\mathbf{x}_0) = 0$;

2) $V(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in W - \mathbf{x}_0$.

3. Si consideri il seguente sistema tempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k)$$

Determinare il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ del sistema quando l'ingresso è costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$.

Il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ si determina imponendo $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_0, \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}_0$$

Il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ è unico solo se la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è invertibile.

4. Dato il sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

con la funzione di costo

$$J := S(\mathbf{x}(tf), tf) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt$$

riportare la definizione della funzione Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}, t)$ per il calcolo del controllo ottimo.

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}, t) := f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

5. Sapendo che il modello di un processo da identificare è

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

scrivere l'espressione della matrice $\mathbf{\Phi}$ impiegata per l'identificazione dei parametri a_i, b_i, avendo a disposizione i vettori dei campioni $u(k)$ e $y(k)$, $k = 1, \ldots, 1000$. Riportare inoltre i valori dei parametri a_i, b_i in funzione degli elementi α_i, $i = 1, \ldots, 5$ del vettore $\boldsymbol{\alpha}$ risultante dal procedimento di identificazione.

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\Phi}_1 \;\; \boldsymbol{\Phi}_2]$$

con

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ \vdots & & \\ y(999) & y(998) & y(997) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} u(2) & u(1) \\ u(3) & u(2) \\ u(4) & u(3) \\ \vdots & \\ u(999) & u(998) \end{bmatrix}$$

$a_1 = -\alpha_1$ $\qquad a_2 = -\alpha_2$ $\qquad a_3 = -\alpha_3$ $\qquad b_1 = \alpha_4$ $\qquad b_2 = \alpha_5$

6. Sia dato il seguente sistema non–lineare, tempo–continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1^3 - x_2^3 \end{cases}$$

È facile verificare che il punto $(x_1,\, x_2) = (0,\, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema.

a) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto $(x_1,\, x_2) = (0,\, 0)$ calcolando la matrice $\mathbf{A}$ del corrispondente sistema linearizzato.

La matrice $\mathbf{A}$ del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix}_{(x_1=0,\; x_2=0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $(x_1,\ x_2) = (0,\ 0)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

I due autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono entrambi nulli:

$$s_1 = 0, \qquad\qquad s_2 = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov non è possibile concludere nulla perchè gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ si trovano sull'asse immaginario.

c) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $(x_1,\ x_2) = (0,\ 0)$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov. Si utilizzi la seguente funzione definita positiva: $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$.

Se si calcola la derivata della funzione $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema non lineare si ottiene:

$$\dot{V} = -4x_1^6 - 4x_2^4 < 0$$

Applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che in $\mathbf{x}_0 = 0$ il sistema è asintoticamente stabile.