Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Teoria dei sistemi e del controllo

LM in Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

Prova pratica del 30 Giugno 2010

Rispondere alle seguenti domande, riportando le soluzioni (enunciati, risposte finali e passaggi salienti degli esercizi proposti, ecc.) nei riquadri appositamente predisposti. [Durata 30 min.]

1. Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1^4 - x_2^3 + x_2^4$:

   ◯ è definita positiva;

   ◯ è definita negativa;

   ⊗ non è definita positiva né negativa.

2. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi **tempo–discreti**.

   Si consideri il sistema non lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$ *e sia* $\mathbf{x}_0$ *un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante* $\mathbf{u}_0$.

   1) Se in un intorno W del punto $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ *definita positiva* e se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è *semidefinita negativa*, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è *stabile*. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è *definita negativa*, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è *asintoticamente stabile*. La funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è definita come segue:

   $$\Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))$$

3. Calcolare i punti di equilibrio del seguente sistema non lineare, tempo–continuo, privo di ingressi:

   $$\dot{x} = x - x^3$$

   $$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_1 = -1$$

4. Sia dato un sistema tempo-continuo lineare stazionario di ordine 3 (vettore di stato $\mathbf{x} = [x_1,\ x_2,\ x_3]^{\mathrm{T}}$) e con due ingressi $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, per il quale si vuole progettare un regolatore ottimo LQ che minimizzi l'indice di costo $J = \int_0^\infty 2x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 6x_1x_3 + 9u_2^2 + 6u_1^2 dt$. Scrivere l'espressione delle matrici $\mathbf{Q}$ ed $\mathbf{R}$, necessarie per la scrittura e la risoluzione dell'equazione algebrica di Riccati. Riportare inoltre l'espressione simbolica del controllo in funzione della soluzione $\mathbf{S}$ di tale equazione (e dello stato $\mathbf{x}$).

   $$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad u(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x}(t)$$

5. Sia dato un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ completamente raggiungibile. Il corrispondente sistema a dati campionati (essendo T il periodo di campionamento) è completamente raggiungibile se e solo se per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di $\mathbf{A}$ aventi la stessa parte reale, vale la relazione:

   $$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

6. Sapendo che il modello di un processo da identificare è

   $$G(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

scrivere l'espressione della matrice $\mathbf{\Phi}$ impiegata per l'identificazione dei parametri a_i, b_i, avendo a disposizione i vettori dei campioni $u(k)$ e $y(k)$, $k = 1, \ldots, 1000$.

$$\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_1 \;\; \mathbf{\Phi}_2]$$

con

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} y(3) & y(2) & y(1) \\ y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ \vdots & & \\ y(999) & y(998) & y(997) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} u(3) & u(2) & u(1) \\ u(4) & u(3) & u(2) \\ u(5) & u(4) & u(3) \\ \vdots & & \\ u(999) & u(998) & u(997) \end{bmatrix}$$

7. Sia dato il seguente sistema non–lineare tempo–discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= 2\sin x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k+1) &= 1 - x_1(k) + x_2^2(k)\sin x_2(k) \end{cases}$$

dove $\mathbf{x} = [x_1, \; x_2]^{\mathrm{T}}$ è il vettore di stato. Il sistema è autonomo, cioè privo di ingressi.

a) Si verifichi se il punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ è un punto di equilibrio per il sistema.

Il punto $(x_1, \; x_2) = (1, \; 0)$ è di equilibrio per il sistema in quanto valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_1(k) &= 2\sin x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k) &= 1 - x_1(k) + x_2^2(k)\sin x_2(k) \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} 1 &= 1 \\ 0 &= 1 - 1 \end{cases}$$

b) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto $(x_1, \; x_2) = (1, \; 0)$ calcolando la matrice $\mathbf{A}$ corrispondente sistema linearizzato.

La matrice $\mathbf{A}$ del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2\cos x_2 \\ -1 & x_2^2\cos x_2 + 2x_2\sin x_2 \end{bmatrix}_{(x_1=1, \; x_2=0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $(x_1, \; x_2) = (1, \; 0)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono le radici del seguente polinomio caratteristico:

$$\det[z\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}] = 0 \qquad \rightarrow \qquad z^2 - z + 2 = 0$$

Le radici del polinomio caratteristico sono:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm j\sqrt{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}\, e^{\pm j \arctan\sqrt{7}}$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov il sistema è instabile nell'intorno del punto $(x_1, \; x_2) = (1, \; 0)$ in quanto entrambi gli autovalori sono esterni al cerchio unitario.