Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Teoria dei sistemi e del controllo

LM in Ingegneria Informatica e Ingegneria Elettronica

Prova pratica del 11 giugno 2010

Rispondere alle seguenti domande, riportando le soluzioni (enunciati, risposte finali e passaggi salienti degli esercizi proposti, ecc.) nei riquadri appositamente predisposti. [Durata 30 min.]

1. Sia dato un sistema non–lineare, tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$. I punti di equilibrio di questo sistema si ottengono:

   ◯ risolvendo l'equazione $0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$, in $\mathbf{x}(k)$.

   ⊗ determinando i punti $\mathbf{x}_e$ tali che $\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e)$.

   ⊗ i sistemi non–lineari possono non avere punti di equilibrio.

2. Nell'intorno dell'origine, la funzione $V(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1^4 - x_2^2 + x_2^4$:

   ◯ è definita positiva;

   ⊗ è definita negativa;

   ◯ non è definita positiva né negativa.

3. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo continui.

   Si consideri il sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$.

   1) Se in un intorno W di $\mathbf{x}_0$ <u>esiste</u> una funzione $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ definita positiva *con derivate prime continue e se $\dot{V}(\mathbf{x})$ è* semidefinita negativa*, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è* stabile *per il sistema non lineare.*

   2) Se inoltre $\dot{V}(\mathbf{x})$ è definita *negativa, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è* asintoticamente *stabile.*

4. Sia dato il seguente sistema lineare continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

   Scrivere, in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e del periodo di campionamento T, l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati.

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

5. Sia dato un sistema tempo-continuo lineare stazionario di ordine 3 (vettore di stato $\mathbf{x} = [x_1,\ x_2,\ x_3]^{\mathrm{T}}$) e con un solo ingresso $u(t)$, per il quale si vuole progettare un regolatore ottimo LQ che minimizzi l'indice di costo $J = \int_0^\infty x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 6x_1x_2 + 9u^2 dt$. Scrivere l'espressione delle matrici $\mathbf{Q}$ ed $\mathbf{R}$, necessarie per la scrittura e la risoluzione dell'equazione algebrica di Riccati. Riportare inoltre l'espressione simbolica del controllo in funzione della soluzione $\mathbf{S}$ di tale equazione (e dello stato $\mathbf{x}$).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = 9 \qquad u(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x}(t)$$

6. Nell' identificazione dei parametri di un sistema dinamico lineare tempo invariante, definito da una funzione di trasferimento tempo-discreta, la scelta del periodo T_s con cui sono campionati i dati:

- ○ non dipende dalla velocità del sistema (e quindi dalla sua banda passante);
- ○ risulta critica per il modello e pertanto deve essere fatta assumendo T_s il più piccolo possibile;
- ⊗ risulta critica in quanto valori di T_s troppo piccoli potrebbero portare a modelli instabili;

7. Sia dato il seguente sistema non–lineare tempo–continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - \cos x_1\, u(t) \end{cases}$$

dove $\mathbf{x} = [x_1,\ x_2]^{\mathrm{T}}$ è il vettore di stato, $y(t) = x_1$ è l'uscita e $u(t)$ è l'ingresso.

a) Linearizzare il sistema nell'intorno dell'origine calcolando le matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ del corrispondente sistema lineare quando $u(t) = 0$.

Quando $u = 0$ l'unico punto di equilibrio del sistema è $\mathbf{x} = 0$. Linearizzando nell'intorno del punto $\mathbf{x} = 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{(0,0)} \mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right]_{(0,0)} u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_1 + u \sin x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1 \end{bmatrix}_{(0,0)} u \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

b) Studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dell'origine utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono reali distinti:

$$\Delta_A(s) = s^2 - 1 = (s+1)(s-1) \qquad \rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov il sistema è instabile nell'intorno dell'origine in quanto uno degli autovalori è instabile.

c) Calcolare il controllo equivalente $u_{eq}(t)$ nel caso in cui si applichi al sistema un controllo sliding mode $u(t) = K\,\text{sign}(\sigma)$ in grado si mantenere lo stato del sistema sulla superficie di sliding

$\sigma = x_1 + x_2 = 0$.

Il controllo equivalente u_{eq} si determina imponendo $\dot{\sigma} = 0$:

$$\dot{\sigma} = 0, \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0, \quad \rightarrow \quad x_2 + \sin x_1 - \cos x_1 \, u_{eq} = 0$$

Esplicitando u_{eq} si ottiene:

$$u_{eq} = \frac{x_2 + \sin x_1}{\cos x_1}$$