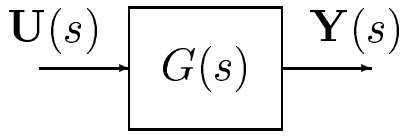
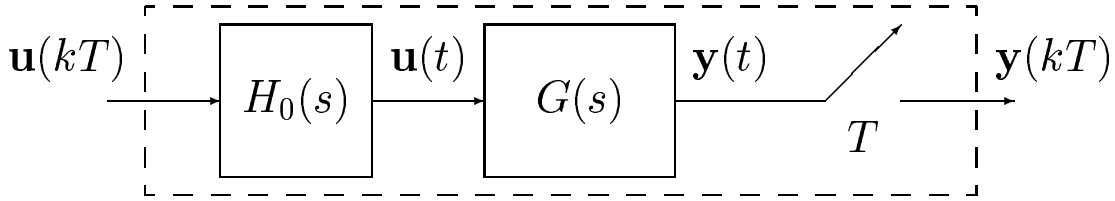
Sistemi a segnali campionati

Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$G(s): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

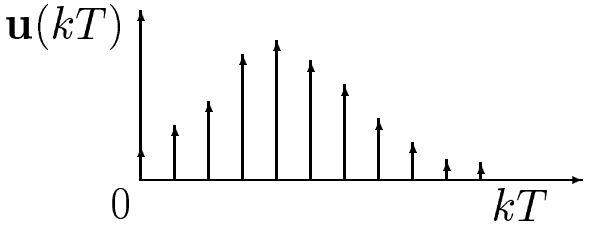


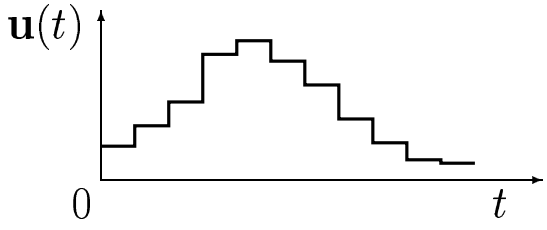
Se si inserisce un ricostruttore di ordine zero $H_0(s)$ e un campionatore ideale di periodo T, rispettivamente a monte e a valle del sistema continuo $G(s)$, si ottiene il seguente sistema tempo discreto:



Essendo all'uscita del ricostruttore $H_0(s)$, il segnale $\mathbf{u}(t)$ è continuo a tratti:

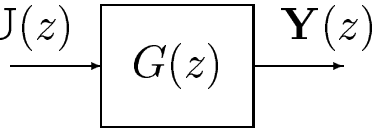
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \qquad \text{per} \qquad kT \le t \le (k+1)T$$





Il segnale $\mathbf{y}(t)$ campionato con periodo T genera il segnale discreto $\mathbf{y}(kT)$. Il comportamento ingresso- uscita del sistema complessivo è quello di un sistema tempo discreto:

$$G(z): \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{F}\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{H}\,\mathbf{x}(kT) \end{cases}$$



Esiste un preciso legame tra le matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ e le matrici $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$. Tale legame si determina risolvendo la seguente equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$

nell'intervallo di tempo $[kT,\ (k+1)T]$. Lo stato $\mathbf{x}(t)$ che si raggiunge a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(kT)$ all'istante $t = kT$ è:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-kT)}\,\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\gamma)}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\gamma)\,d\gamma$$

Essendo l'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, lo stato $\mathbf{x}((k+1)T)$ che si raggiunge all'istante $t = (k+1)T$ è quindi il seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}((k+1)T) &= \underbrace{e^{\mathbf{A}T}}_{\mathbf{F}}\,\mathbf{x}(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\gamma)}\mathbf{B}\,d\gamma}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{u}(kT)\\ &= \mathbf{F}\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(kT)\end{aligned}$$

Operando il seguente cambiamento di variabile:

$$\sigma = (k+1)T - \gamma \qquad \rightarrow \qquad d\sigma = -d\gamma$$

la matrice $\mathbf{G}$ può essere trasformata come segue:

$$\mathbf{G} = \int_{T}^{0} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,(-d\sigma) = \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma$$

L'uscita $\mathbf{y}(kT)$ si ottiene da $\mathbf{y}(t)$ campionando all'istante $t = kT$:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{y}(t)|_{t=kT} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)|_{t=kT} = \underbrace{\mathbf{C}}_{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}(kT)$$

Il legame tra le matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ e le matrici $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$ è quindi il seguente:

$$\boxed{\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}\,T}, \qquad \mathbf{G} = \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}}$$

Il sistema $G(z)$ che si ottiene da $G(s)$ nel modo precedentemente descritto prende il nome di *sistema a segnali campionati*

Poichè le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ dipendono da T, è bene studiare come variano le proprietà strutturali di raggiungibilità e osservabilità del sistema a segnali campionati al variare del periodo di campionamento T.

Essendo la matrice $\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}$ sempre invertibile, per un sistema a segnali campionati la controllabilità e la ricostruibilità sono sempre equivalenti, rispettivamente, alla raggiungibilità e all'osservabilità.

Per sistemi ad un solo ingresso vale la seguente proprietà.

Teorema. *Sia dato un sistema* $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ *raggiungibile e sia* T *il periodo di campionamento. Il corrispondente sistema a segnali campionati è raggiungibile se e solo se, per ogni coppia* λ_i, λ_j *di autovalori distinti di* $\mathbf{A}$ *aventi la stessa parte reale si ha:*

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \qquad\qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$$

Per sistemi ad una sola uscita vale la seguente proprietà.

Teorema. *Sia dato un sistema* $(\mathbf{A},\ \mathbf{c})$ *osservabile e sia* T *il periodo di campionamento. Il corrispondente sistema a segnali campionati è osservabile se e solo se, per ogni coppia* λ_i, λ_j *di autovalori distinti di* $\mathbf{A}$ *aventi la stessa parte reale si ha:*

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \qquad\qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$$

Nota. In base ai precedenti teoremi si può affermare che se la matrice $\mathbf{A}$ ha tutti gli autovalori reali, il sistema a segnali campionati conserva sempre, per ogni $T > 0$, le stesse caratteristiche strutturali del sistema di partenza $(\mathbf{A},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$.

Esempio. Dato il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

si calcoli il corrispondente sistema a segnali campionati. Sia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B}\, d\,\sigma = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\, d\,\sigma \right) \mathbf{B} \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & \cos\sigma \end{bmatrix} d\,\sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\sigma & -\cos\sigma \\ \cos\sigma & \sin\sigma \end{bmatrix}_0^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin T & 1-\cos T \\ \cos T - 1 & \sin T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{H}$ coincide con la matrice $\mathbf{C}$.

Il corrispondente sistema a segnali campionati è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1-\cos T \\ \sin T \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

dove per brevità si è posto

$$\mathbf{x}(k) \equiv \mathbf{x}(kT), \qquad y(k) \equiv y(kT), \qquad u(k) \equiv u(kT)$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$.

La matrice di raggungibilità del sistema a segnali campionati è

$$\mathcal{R}^+ = [\mathbf{G}\ \ \mathbf{FG}] = \begin{bmatrix} 1-\cos T & \cos T + \sin^2 T - \cos^2 T \\ \sin T & -\sin T + 2\sin T \cos T \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1-\cos T & \cos T + \cos 2T \\ \sin T & -\sin T + \sin 2T \end{bmatrix}$$

Per $T = \pi$ il sistema non è completamente raggiungibile, infatti

$$\mathcal{R}^+_{T=\pi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice $\mathcal{R}^+$ è:

$$|\mathcal{R}^+| = -2\sin T(1 - cosT)$$

In accordo con il Teorema sulla raggiungibilità, il sistema a segnali campionati è raggiungibile solo se:

$$T \neq \frac{2k\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2k\pi}{2} = k\pi$$

Analoghe considerazioni valgono per la matrice di osservabilità:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso, il sistema a segnali campionati è osservabile solo se $T \neq k\pi$.

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{F}$ è:

$$|z\mathbf{I} - F| = (z - \cos T)^2 + \sin^2 T$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{F}$ sono quindi i seguenti:

$$z_{1,2} = \cos T \pm j \sin T = e^{\pm jT}$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema continuo è:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2+1}$$

La funzione di trasferimento $G(z)$ del corrispondente sistema a segnali campionati è:

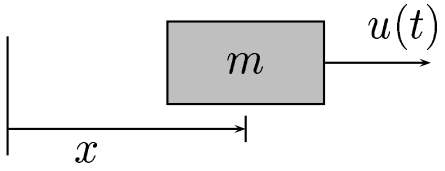
$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - \cos T & -\sin T \\ \sin T & z - \cos T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z-\cos T)^2 + \sin^2 T} \begin{bmatrix} -\sin T & z - \cos T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sin T \cos T - \sin T + z \sin T - \sin T \cos T}{z^2 - 2\cos T z + 1} \\ &= \frac{\sin T(z-1)}{z^2 - 2\cos T z + 1} \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si sarebbe potuto giungere discretizzando la funzione $G(s)$ preceduta dal ricostruttore di ordine zero:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[H_0(s)G(s)\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s}\frac{s}{s^2+1}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right] \\ &= (1 - z^{-1})\frac{z \sin T}{z^2 - 2\cos T z + 1} \\ &= \frac{\sin T(z-1)}{z^2 - 2\cos T z + 1} \end{aligned}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema puramente inerziale di massa unitaria $(m = 1)$ sottoposto ad una forza esterna $u(t)$:

$$m\ddot{x} = u(t)$$



Calcolare una retroazione statica dello stato di natura discreta, $u(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, che posizioni nell'origine tutti i poli del sistema retroazionato.

Sia $\mathbf{x}$ il vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x}$$

La descrizione del sistema nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ del corrispondente sistema a segnali campionati sono:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Il sistema a segnali campionati ha quindi la seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\Delta_{\mathbf{F}}(z) = (z-1)^2 = z^2 - 2z + 1$$

Sia $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$ la matrice di retroazione dello stato. Posto $u(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, si ottiene la seguente matrice di sistema

$$\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 + k_1\frac{T^2}{2} & T + k_2\frac{T^2}{2} \\ k_1 T & 1 + k_2 T \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è il seguente:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K}} &= (z - 1 - k_1\tfrac{T^2}{2})(z - 1 - k_2 T) - k_1 T(T + k_2\tfrac{T^2}{2}) \\ &= z^2 - (2 + k_2 T + k_1\tfrac{T^2}{2})z + (1 + k_2 T - k_1\tfrac{T^2}{2}) \end{aligned}$$

Imponendo $\lambda_{\mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K}} = z^2$ si ottiene:

$$\begin{cases} 2 + k_2 T + k_1\frac{T^2}{2} = 0 \\ 1 + k_2 T - k_1\frac{T^2}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 + 2k_2 T = 0 \\ 1 + k_1 T^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_2 = -\frac{3}{2T} \\ k_1 = -\frac{1}{T^2} \end{cases}$$

cioè

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2} & -\frac{3}{2T} \end{bmatrix}$$

Allo stesso risultato si poteva giungere anche procedendo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{3}{2}T^2 \\ T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{T^2}{2} \\ -T & T \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{T^3} \begin{bmatrix} T & -\frac{T^2}{2} \\ T & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2} & -\frac{3}{2T} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sostituendo, la matrice $\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}$ assume la forma:

$$\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Essendo un controllore dead-beat, la retroazione $u(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ è in grado di portare a zero (esattamente!) lo stato generico del sistema $x(0)$ in due soli passi e con un periodo si campionamento T comunque piccolo.

È evidente che l'azione di controllo $u(k)$ negli istanti $k = 0$ e $k = 1$ sarà tanto più elevata quanto più piccolo è il periodo di campionamento T. Si ha infatti che

$$u(0) = \mathbf{K}\mathbf{x}(0) = \left[-\tfrac{1}{T^2} \quad -\tfrac{3}{2T} \right] \mathbf{x}(0)$$

e

$$\begin{aligned} u(1) &= \mathbf{K}\mathbf{x}(1) = \mathbf{K}(\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x}(0) \\ &= \left[-\tfrac{1}{T^2} \quad -\tfrac{3}{2T} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ &= \left[\tfrac{1}{T^2} \quad \tfrac{1}{2T} \right] \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

Si noti che la capacità di poter portare a zero lo stato del sistema in un intervallo di tempo $2T$ non può essere ottenuto nel caso di sistemi tempo continuo. In questo caso, infatti, si tende a zero sempre in modo "esponenziale", cioè si giunge "esattamente" in zero solo per $t \to \infty$.

Se lo stato $x_2 = \dot{x}$ non è misurabile, si può procedere alla sintesi di un *osservatore dead-beat di ordine ridotto*. La trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{x}}$ porta il sistema ad assumere la forma

$$\bar{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] = \bar{\mathbf{T}}^{-1} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} T \\ \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \left[0 \quad 1 \right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

Dalla relazione $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = 1 - \mathbf{L}T = 0$ si ricava $\mathbf{L} = -\frac{1}{T}$. L'osservatore dead beat di ordine ridotto assume quindi la forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \hat{v}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{v}(k) + \frac{y(k)}{T} \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{v}(k+1) = (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22})y(k) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)u(k) = -\tfrac{1}{T}y(k) + \tfrac{T}{2}u(k)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema tempo continuo è

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

La funzione di trasferimento $G(z)$ del corrispondente sistema discreto è

$$\begin{aligned} G(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} z-1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \\ &= \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Anche in questo caso si può facilmente dimostrare che

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[H_0(s)G(s)\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s^2}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^3}\right] \\ &= (1-z^{-1})\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{T^2}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Elementi di Teoria della realizzazione

- La teoria della realizzazione si occupa della costruzione di modelli nello spazio degli stati a partire da specifiche del tipo ingresso-uscita.
- Partendo dalla descrizione di un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n} \\ \mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n\times m} \\ \mathbf{C} \in \mathcal{R}^{p\times n} \end{array}$$

  è sempre possibile ricavare la corrispondente matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$ $(p \times m)$ che descrive il sistema mediante un legame del tipo ingresso-uscita:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D},$$

- Tutti gli elementi $G_{i,j}(s)$ della matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$ sono sempre funzioni "proprie" (o "strettamente proprie" quando $\mathbf{D} = 0$).
- Chiaramente, "una matrice $\mathbf{G}(s)$ impropria non è fisicamente realizzabile" nel senso che per essa non esiste nessuna realizzazione nello spazio degli stati.
- La domanda che ci si pone è la seguente: *data una generica matrice $\mathbf{G}(s)$ propria o strettamente propria, esiste per essa una realizzazione nello spazio degli stati?*
- In primo luogo, la realizzazione di una matrice $\mathbf{G}(s)$ "propria" può sempre essere ricondotta alla realizzazione di una matrice "strettamente" propria. Infatti, è sempre possibile esprimere $\mathbf{G}(s)$ nel modo seguente:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_{sp}(s) + \underbrace{\lim_{s\to\infty} G(s)}_{\mathbf{D}}$$

  dove $\mathbf{G}_{sp}(s)$ è una matrice strettamente propria e $\mathbf{D}$ è la matrice costante che descrive il legame "diretto" ingresso-uscita del sistema.

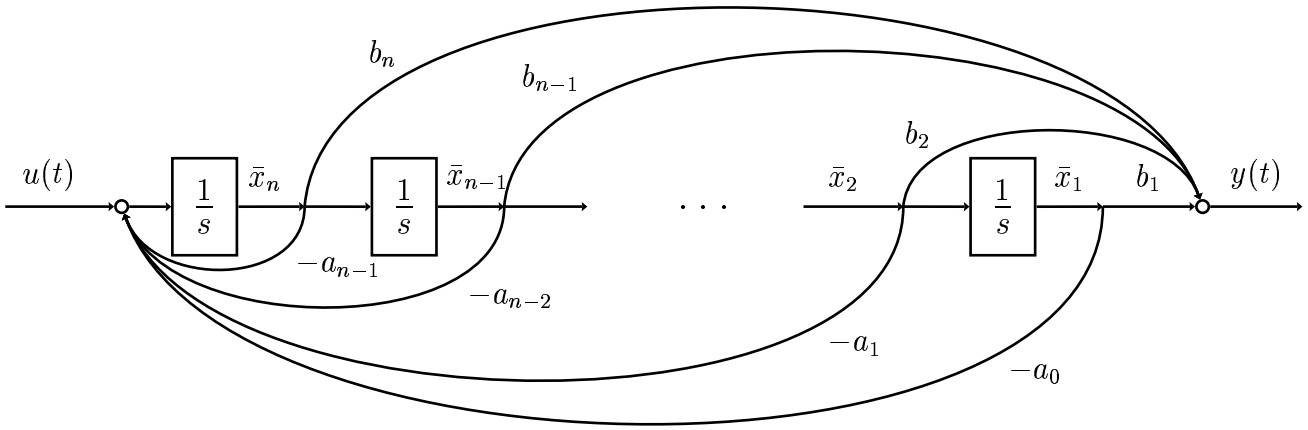
- Il problema è quindi ricondotto alla realizzabilità o meno di una generica funzione $\mathbf{G}_{sp}(s)$ "strettamente propria". Vale la seguente proprietà.
- Proprietà. *Data una matrice razionale strettamente propria* $\mathbf{G}(s)$*, esiste sempre un sistema dinamico lineare* $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ *che la realizza.*
- Questa proprietà viene dimostrata in modo costruttivo partendo dal caso SISO ($m = p = 1$):

$$\mathbf{G}(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Una realizzazione "raggiungibile" $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r)$ di $\mathbf{G}(s)$ è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Il corrispondente schema a blocchi è il seguente:

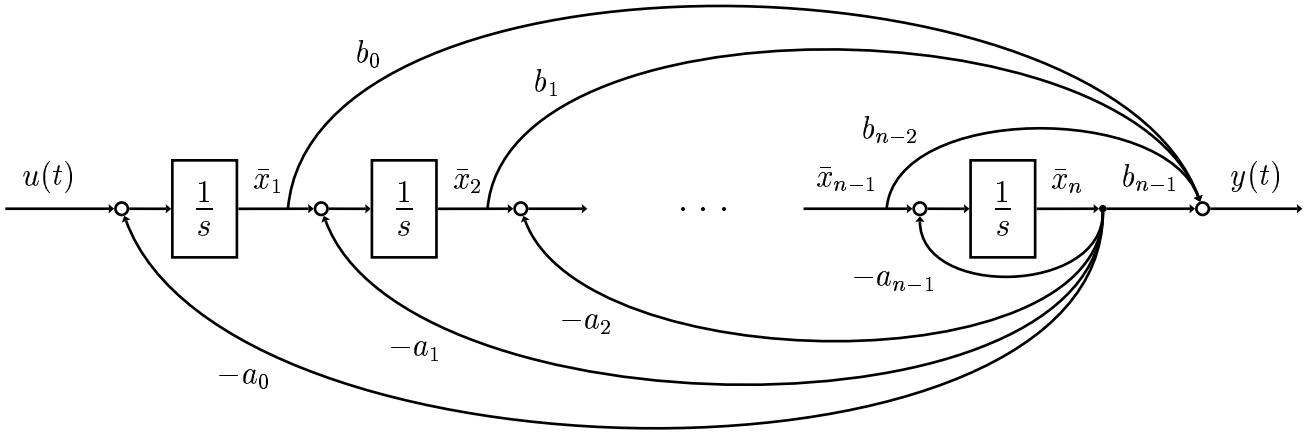


- La realizzazione è completamente raggiungibile perchè è in forma "canonica di raggiungibilità".

- Una realizzazione "osservabile" $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$ di $\mathbf{G}(s)$ è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

- Uno schema a blocchi che rappresenta il sistema è il seguente:



- La realizzazione è osservabile perchè il sistema è in forma "canonica di osservabilità".

- È immediato verificare che le due realizzazioni ammettono la stessa descrizione ingresso-uscita:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}_r(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)^{-1}\mathbf{B}_r = \mathbf{C}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1}\mathbf{B}_o$$

- In generale, le due realizzazioni mostrate **non** sono algebricamente equivalenti. Cioè, in generale, non esiste una trasformazione $\mathbf{T}$ che permetta di trasformare il sistema $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r)$ nel sistema $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$, o viceversa.

Esempio. Realizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3} = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

- Realizzazione "raggiungibile":

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

  Questa realizzazione non è completamente osservabile:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- Realizzazione "osservabile":

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

  Questa realizzazione non è completamente raggiungibile:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Chiaramente queste due realizzazioni non possono essere algebricamente equivalenti in quanto non hanno le stesse proprietà strutturali.

- Se nella $G(s)$ si elimina il fattore comune $(s+1)$ si ottiene un sistema "equivalente" di ordine ridotto:

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+3)}$$

- Nel caso "Multi-Input Multi-Output" (MIMO), la matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$ è composta da funzioni $G_{i,j}(s)$ strettamente proprie:

$$\mathbf{G}(s) = \left[G_{i,j}(s)\right]_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,m}} = \left[\frac{n_{i,j}(s)}{d_{i,j}(s)}\right]_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,m}}$$

- Sia $d(s)$ il minimo comune multiplo tra tutti i polinomi $d_{i,j}(s)$:

$$d(s) = \mathsf{mcm}\left[d_{i,j}(s)\right]_{i,j} = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

- La matrice $\mathbf{G}(s)$ può essere riscritta nel modo seguente:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{d(s)}\left[b_{i,j}(s)\right]_{i,j} = \frac{1}{d(s)}\left[B_0 + B_1 s + \ldots + B_{n-1}s^{n-1}\right]$$

  dove B_i sono matrici costanti di dimensione $(p \times m)$.

- Una realizzazione "raggiungibile" $(\mathbf{A}_r,\, \mathbf{B}_r,\, \mathbf{C}_r)$ di $\mathbf{G}(s)$ è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \ldots & -a_{n-1} I_m \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \ldots & B_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Una realizzazione "osservabile" $(\mathbf{A}_o,\, \mathbf{B}_o,\, \mathbf{C}_o)$ di $\mathbf{G}(s)$ è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0_p & 0_p & 0_p & \ldots & 0_p & -a_0 I_p \\ I_p & 0_p & 0_p & \ldots & 0_p & -a_1 I_p \\ 0_p & I_p & 0_p & \ldots & 0_p & -a_2 I_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0_p & 0_p & 0_p & \ldots & I_p & -a_{n-1} I_p \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0_p & 0_p & 0_p & \ldots & 0_p & I_p \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

- Esempio. Una realizzazione raggiungibile della matrice

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 \\ s+1 \end{bmatrix}}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s^2+\underbrace{3}_{a_1}s+\underbrace{2}_{a_0}} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_1} s \right\}$$

è $(m=1,\ p=2)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Una realizzazione osservabile della stessa matrice $\mathbf{G}(s)$ è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- **Nota**. La dimensione dello spazio degli stati è

$$\begin{array}{ll} n \times m & \text{nel caso di realizzazione raggiungibile} \\ n \times p & \text{nel caso di realizzazione osservabile} \end{array}$$

Per minimizzare la dimensione dello spazio degli stati è quindi opportuno utilizzare la realizzazione raggiungibile se $m \leq p$ e quella osservabile nel caso opposto.

- Esempio. Sia data la seguente matrice di trasferimento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(s) &= \left[\frac{1}{s} \quad \frac{s+1}{s^2} \quad \frac{2}{s+1} \right] \\
&= \frac{1}{s^2(s+1)} \left[s^2+s \quad s^2+2s+1 \quad 2s^2 \right] \\
&= \frac{1}{s^2(s+1)} \left\{ \underbrace{\left[1 \quad 1 \quad 2 \right]}_{B_2} s^2 + \underbrace{\left[1 \quad 2 \quad 0 \right]}_{B_1} s + \underbrace{\left[0 \quad 1 \quad 0 \right]}_{B_0} \right\}
\end{aligned}$$

In questo caso la realizzazione più conveniente è quella osservabile:

$$\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{cases}$$

Realizzazioni minime

- *Definizione*. Una realizzazione $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ di $\mathbf{G}(s)$ è detta *minima* se per ogni altra realizzazione $\mathcal{S}' = (\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')$ di $\mathbf{G}(s)$ vale la relazione

$$dim\mathcal{S} \leq dim\mathcal{S}'$$

Le propietà fondamentali delle realizzazioni minime sono espresse dai seguenti teoremi.

- *Teorema. Una realizzazione $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ di $\mathbf{G}(s)$ è minima se e solo se essa è raggiungibile e osservabile.*

- *Teorema. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ ed $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due realizzazioni minime di $\mathbf{G}(s)$ di dimensioni n_1 ed n_2, allora si ha che $n_1 = n_2$, Cioè, tutte le ralizzazioni minime hanno tutte le stesse dimensioni.*

- *Teorema. Siano $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ ed $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ due realizzazioni minime di $\mathbf{G}(s)$ di dimensione n, allora esiste una matrice $\mathbf{T}$ non singolare $(\mathbf{x}_1 = \mathbf{T}\mathbf{x}_2)$ tale che:*

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{T}, \qquad \mathbf{B}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_1, \qquad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{T}$$

cioè le realizzazioni minime di una stessa $\mathbf{G}(s)$ sono tutte algebricamente equivalenti tra di loro.

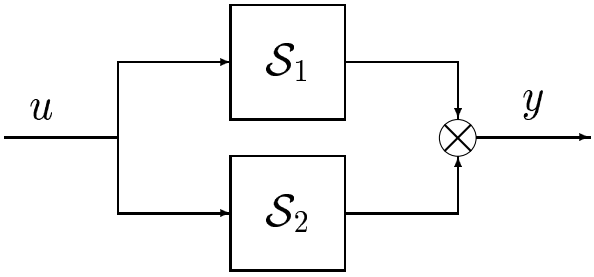
- Siano $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{O}_1$ ed $\mathbf{O}_2$, le matrici di raggiungibilità e di osservabilità delle due realizzazioni minime $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$. Ricordando che $\mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_1\mathbf{T}$ e $\mathbf{R}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}_1$, la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ che permette di passare da una realizzazione minima all'altra ha la struttura

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^T(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T)^{-1}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\mathbf{T} = (\mathbf{O}_1^T\mathbf{O}_1)^{-1}\mathbf{O}_1^T\mathbf{O}_2}$$

nei due casi, rispettivamente, di sistema raggiungibile oppure osservabile.

Connessione di sistemi

- Le proprietà dei sistemi interconnessi dipendono da quelle dei sottosistemi che li compongono e dalla natura delle connessioni
- In questa sezione verranno analizzati soltanto i sistemi costituiti dal collegamento di due sottosistemi SISO, nelle tre possibili connessioni: in parallelo, in serie e in retroazione.
- **Collegamento in parallelo**. Il sistema $\mathcal{S}$ costituito dal parallelo dei due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ ha la seguente struttura:

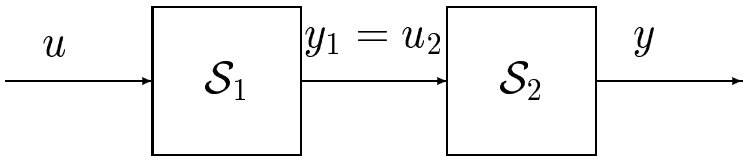


- Indicando con $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ gli spazi di stato di $\mathcal{S}_1$e $\mathcal{S}_2$, è naturale assumere $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2$ come spazio degli stati del sistema $\mathcal{S}$. Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- *Teorema. Il sistema parallelo $\mathcal{S}$ è raggiungibile se e solo se i sottosistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono raggiungibili e le matrici $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ non hanno autovalori in comune.*
- *Teorema. Il sistema parallelo $\mathcal{S}$ è osservabile se e solo se i sottosistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono osservabili e le matrici $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ non hanno autovalori in comune.*

- **Collegamento in serie**. Il sistema $\mathcal{S}$ costituito dalla serie dei due sottosistemi $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ ha la seguente struttura:



- Indicando con $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2$ lo spazio degli stati del sistema $\mathcal{S}$, si ottengono le seguenti equazioni:

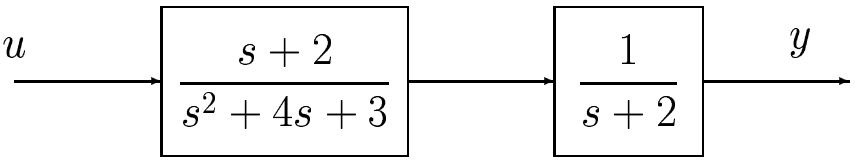
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

  Limitandosi al caso di sistemi con un solo ingresso e una sola uscita, valgono i seguenti teoremi.

- *Teorema. Il sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ottenuto collegando il sistema $\mathcal{S}_2$ in serie al sistema $\mathcal{S}_1$ è raggiungibile se e solo se:*
  - *i sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono raggiungibili;*
  - *i polinomi $\mathbf{C}_1\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1$ e $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)$ non hanno zeri in comune.*

- *Teorema. Il sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ottenuto collegando il sistema $\mathcal{S}_2$ in serie al sistema $\mathcal{S}_1$ è osservabile se e solo se:*
  - *i sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono osservabili;*
  - *i polinomi $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)$ e $\mathbf{C}_2\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)\mathbf{B}_2$ non hanno zeri in comune.*

- **Esempio**. Fornire una realizzazione del seguente sistema:



Facendo riferimento alle realizzazioni canoniche di raggiungibilità per i due sottosistemi, per il sistema $\mathcal{S}$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

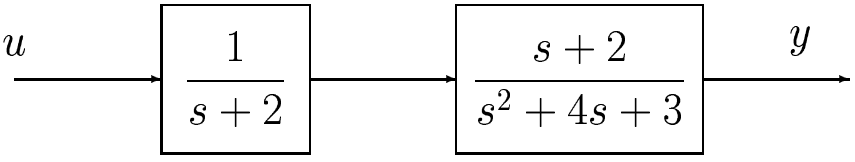
- I singoli sottosistemi sono raggiungibili e osservabili. Il sistema complessivo non è raggiungibile in quanto vi è una cancellazione tra il numeratore di $\mathcal{S}_1$ e il denominatore di $\mathcal{S}_2$. Infatti, la matrice di raggiungibilità del sistema $\mathcal{S}$ è singolare:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 13 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{R}^+ = 0$$

- Il sistema $\mathcal{S}$ è invece osservabile:

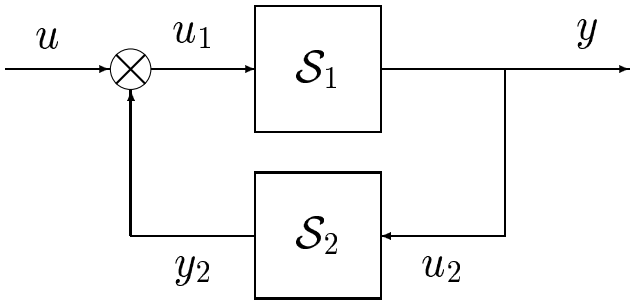
$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -7 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{O}^- = -1$$

- Si può facilmente verificare che il sistema "inverso"



è raggiungibile, ma non osservabile.

- **Collegamento in retroazione**. Sia $\mathcal{S}$ il sistema retroazionato composto dal sottosistema $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ sul ramo diretto e dal sottosistema $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ sul ramo di retroazione:

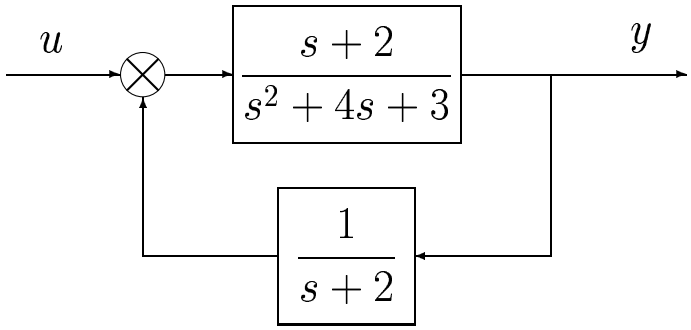


- Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2$ lo spazio degli stati del sistema $\mathcal{S}$. Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- *Teorema. Il sistema retroazionato $\mathcal{S}$ è raggiungibile se e solo se:*
  - *i sottosistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono raggiungibili*
  - *i polinomi $\mathbf{C}_1\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1$ e $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)$ non hanno zeri in comune.*
- *Teorema. Il sistema retroazionato $\mathcal{S}$ è osservabile se e solo se:*
  - *i sottosistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono osservabili*
  - *i polinomi $\mathbf{C}_1\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)\mathbf{B}_1$ e $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)$ non hanno zeri in comune.*

- **Esempio**. Fornire una realizzazione del seguente sistema retroazionato:



Facendo riferimento alle realizzazioni canoniche di raggiungibilità per i sottosistemi $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$, il sistema retroazionato $\mathcal{S}$ assume la forma

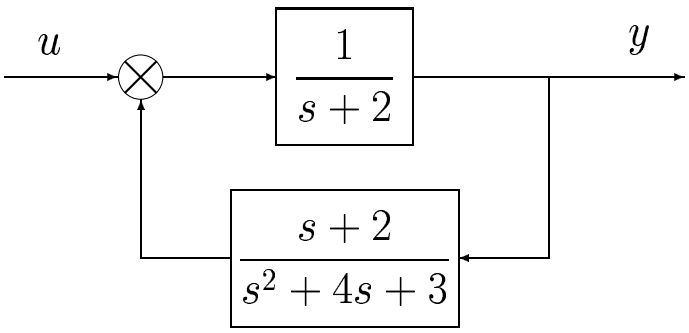
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ \hline 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- I singoli sottosistemi sono raggiungibili e osservabili. Il sistema complessivo non è ne raggiungibile, ne osservabile in quanto vi è una cancellazione tra il numeratore di $\mathcal{S}_1$ e il denominatore di $\mathcal{S}_2$. Infatti, le matrici di raggiungibilità e osservabilità del sistema $\mathcal{S}$ sono singolari:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{R}^+ = 0$$

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 8 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{O}^- = 0$$

- Se si scambia di posizione dei sistemi $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$ si ottiene il seguente sistema $\mathcal{S}$



a cui corrisponde la seguente realizzazione:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- In questo caso il sistema complessivo è completamente controllabile e completamente osservabile, cioè il sistema è in forma minima.

- Matrice di raggiungibilità:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{R}^+ = -3$$

- Matrice di Osservabilità:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 6 & -7 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{O}^- = -1$$