

Osservabilità e ricostruibilità

Osservabilità e ricostruibilità

- Osservabilità: il problema della Osservabilità consiste nel determinare lo stato iniziale $x(t_0)$ mediante osservazioni degli ingressi $u(t)$ e delle uscite $y(t)$ del sistema considerato per $t \geq t_0$:

- Uno stato $x(t_0)$ di un sistema dinamico è compatibile con le funzioni di ingresso $u(\cdot)$ ed uscita $y(\cdot)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ed una funzione di uscita $y(\cdot)$ tale che $y(\tau) = \eta(\tau, t_0, x(t_0), u(\cdot))$, $\tau \in [t_0, t_1]$.

- Indicheremo con

$$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$

l'insieme degli stati iniziali compatibili con le funzioni di ingresso $u(\cdot)$ ed uscita $y(\cdot)$, nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

- Ricostruibilità: il problema della ricostruibilità consiste nel determinare lo stato finale $x(t_1)$ mediante osservazioni degli ingressi $u(t)$ e delle uscite $y(t)$ per $t \leq t_1$.

- Uno stato $x(t_1)$ di un sistema dinamico è compatibile con le funzioni di ingresso $u(\cdot)$ ed uscita $y(\cdot)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se esistono una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ed una funzione di uscita $y(t)$ tale che $x(t_1) = \psi(t_0, t_1, x(t_0), u(\cdot))$, dove $x(t_0) \in \mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$.

- Indicheremo con

$$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$

l'insieme degli stati finali compatibili con le funzioni di ingresso $u(\cdot)$ ed uscita $y(\cdot)$, nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

Stati indistinguibili nel futuro in k passi

Sia dato un sistema *lineare, discreto, tempo-invariante* descritto dalle matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

- Due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro in k passi se per ogni successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)$, le successioni di uscita $\mathbf{y}_1(\cdot)$ e $\mathbf{y}_2(\cdot)$, che corrispondono agli stati iniziali $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$, coincidono nei primi k passi:

$$\mathbf{x}_1(0) \stackrel{k}{\approx} \mathbf{x}_2(0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{y}_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq k$$

- Tale condizione può essere espressa come:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^k \end{bmatrix}$$

Infatti imponendo l'uguaglianza delle due uscite:

$$\mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{CA}^\tau \mathbf{x}_1(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{CA}^{\tau-1-i} \mathbf{Bu}(i)$$

$$\mathbf{y}_2(\tau) = \mathbf{CA}^\tau \mathbf{x}_2(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{CA}^{\tau-1-i} \mathbf{Bu}(i)$$

si trova che le due evoluzioni libere devono coincidere per i primi k passi:

$$\mathbf{y}_l(\tau) = \mathbf{CA}^\tau \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{CA}^\tau \mathbf{x}_2(0), \quad 0 \leq \tau \leq k$$

cioè

$$\mathbf{CA}^\tau [\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)] = 0, \quad 0 \leq \tau \leq k$$

Vale quindi la relazione:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}^-(0, k, u(\cdot), y(\cdot)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}^-(0, k, 0, y_l(\cdot))$$

Stati indistinguibili nel futuro

Sia dato un sistema lineare, discreto, tempo-invariante descritto dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

- Due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro, se sono indistinguibili nel futuro in k passi, qualunque sia k .

$$\mathbf{x}_1(0) \approx \mathbf{x}_2(0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{y}_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq k, \quad \forall k$$

- Per il teorema di *Cayley-Hamilton* per $k \geq n - 1$ la condizione:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^k \end{bmatrix}$$

diventa stazionaria, per cui la condizione di indistinguibilità nel futuro, diventa:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Stato non osservabile

Sia dato un sistema lineare, discreto, tempo-invariante descritto dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Per tale sistema l'insieme degli stati non osservabili $\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$ dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo di osservazione $k = t_1 - t_0$.

- Uno stato $\mathbf{x}$ è non osservabile in k passi se è indistinguibile nel futuro in k passi dallo stato 0:

$$\mathbf{x}_1(0) \approx \mathbf{x}_2(0), \quad \mathbf{x} \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^k \end{bmatrix} = \mathcal{E}^-(k)$$

In quanto *nucleo* di una matrice, l'insieme $\mathcal{E}^-(k)$ degli stati non osservabili in k passi è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{X}$, spazio degli stati del sistema considerato.

- Uno stato $\mathbf{x}$ è non osservabile, se è *non osservabile* in k passi, per qualunque k . Per il teorema di *Cayley-Hamilton*, la condizione di non osservabilità di $\mathbf{x}$ è data da:

$$\mathbf{x} \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{E}^-$$

In tale caso lo spazio di non-osservabilità verrà indicato con $\mathcal{E}^-$.

Sistema osservabile

Sia dato un sistema lineare, discreto, tempo-invariante descritto dalle matrici A , B e C .

- La matrice di dimensione $n \times n$:

$$\mathcal{O}^- \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

è detta matrice di osservabilità del sistema.

- Il sottospazio degli stati non osservabili:

$$\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^-$$

è detto sottospazio non osservabile del sistema.

- Se $\mathcal{E}^-$ contiene solo lo stato 0, allora il sistema si dice osservabile.
- La condizione di osservabilità è data anche, equivalentemente, da:

$$\begin{aligned} - \ker \mathcal{O}^- &= \{0\} \\ - \text{rango} \mathcal{O}^- &= n \end{aligned}$$

- Nota : Consideriamo un generico stato $\mathbf{x}$, l'insieme degli stati *indistinguibili* da $\mathbf{x}$ è costituito dall'insieme:

$$\mathbf{x} + \mathcal{E}^-$$

Stati indistinguibili nel passato in k passi

Sia dato un sistema lineare, discreto, tempo-invariante descritto dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

- Consideriamo il problema di determinare lo stato all'istante finale $\mathbf{x}(k)$ a partire dalla successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(k-1)$ e di uscita $\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(k)$.

- Il problema ammette soluzione unica se il sistema è osservabile in k passi:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}(i), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}^-(k, u(\cdot), y(\cdot))$$

- Se il sistema non è osservabile in k passi, la successione degli ingressi e delle uscite non determina univocamente $\mathbf{x}(0)$, ma un generico elemento dell'insieme:

$$\mathbf{x}(0) + \mathcal{E}^-(k)$$

- Quindi l'insieme degli stati finali $\mathbf{x}(k)$ compatibili con le successioni di ingresso ed uscita è il seguente:

$$\underbrace{\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}(i)}_{\mathbf{x}(k)} + \mathbf{A}^k \mathcal{E}^-(k) = \mathbf{x}(k) + \underbrace{\mathbf{A}^k \mathcal{E}^-(k)}_{\mathcal{E}^+}$$

- Due stati $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ appartenenti a questa classe si dicono *indistinguibili nel passato in k passi*.

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}^+(k, u(\cdot), y(\cdot)) = \mathcal{E}^+(k, 0, 0) = \mathcal{E}^+(k)$$

Sistema ricostruibile

Sia dato un sistema lineare, discreto, tempo-invariante descritto dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

- Un sistema si dice ricostruibile in k passi se non esistono stati indistinguibili nel passato dallo stato zero in k passi. Questo equivale a dire che le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ del sistema soddisfano la relazione:

$$\mathcal{E}^+(k) = \mathbf{A}^k \mathcal{E}^-(k) = \{0\}$$

ovvero:

$$\mathcal{E}^-(k) \subseteq \ker \mathbf{A}^k$$

- Il sistema si dice ricostruibile se è ricostruibile in k passi per *qualche* k . Per il teorema di *Cayley-Hamilton*, e tenendo presente che:

$$\ker \mathbf{A}^k = \ker \mathbf{A}^n, \quad \text{per } k \geq n,$$

la condizione di ricostruibilità è data da:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

- Nota. Dall'ultima relazione risulta evidente che la condizione di osservabilità implica, ma non è implicata, dalla condizione di ricostruibilità:

Osservabilità $\Rightarrow$ Ricostruibilità

Osservabilità $\nRightarrow$ Ricostruibilità

Osservabilità e ricostruibilità (Sistemi lineari continui)

Sia dato un sistema lineare, continuo, tempo-invariante descritto dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

- Due stati $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro nell'intervallo $[0, t]$, se per ogni possibile funzione di ingresso $u(\cdot)$ le funzioni di uscita coincidono su tale intervallo:

$$\mathbf{x}_1(0) \overset{t}{\approx} \mathbf{x}_2(0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}_1(\tau) = \mathbf{y}_2(\tau)$$

cioè se

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}_1 = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}_2, \quad 0 \leq \tau \leq t$$

- Consideriamo l'operatore lineare $O_t : \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{Y}(0, t)$, che associa allo stato iniziale $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ la corrispondente funzione di uscita in evoluzione libera $y(\tau) \in \mathcal{Y}(0, t)$:

$$O_t : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}, \quad 0 \leq \tau \leq t$$

- Allora $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono indistinguibili nel futuro se e solo se:

$$\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0) \in \ker O_t$$

- Gli stati indistinguibili nel futuro dallo stato 0, ovvero gli stati *non osservabili* in $[0, t]$, sono gli elementi appartenenti al nucleo di O_t .

Operatore aggiunto $O_t^* : \mathcal{Y}(0, t) \rightarrow \mathbf{X}$:

$$O_t^* : \mathbf{y}(\cdot) \rightarrow \int_0^t e^{\mathbf{A}^T\tau} \mathbf{C}^T y(\tau) d\tau$$

Proprietà dell'operatore aggiunto:

$$\ker O_t = \ker(O_t^* O_t) = \ker \mathcal{V}_t$$

dove

$$\mathcal{V}_t = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T\tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau$$

Matrice di osservabilità

Definiamo la matrice di osservabilità nel seguente modo:

$$\mathcal{O}^- \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

dove n è l'ordine della matrice di stato $\mathbf{A}$.

Proprietà. Il sottospazio di non osservabilità $\mathcal{E}^-$ relativo all'intervallo $[0, t]$ è, per ogni $t > 0$, il nucleo della matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$.

Prova: $\mathbf{x}$ è non osservabile in $[0, t]$ se e solo se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x} = 0, \quad 0 \leq \tau \leq t \quad \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{C} \frac{\tau^i}{i!} \mathbf{A}^i \mathbf{x} = 0, \quad 0 \leq \tau \leq t \quad \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{CA}^i \mathbf{x} = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{CA}^i \mathbf{x} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x}(t) \in \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{A})^{n-1} \end{bmatrix} = \ker \mathcal{O}^- \end{aligned}$$

- (1) - Per la definizione della matrice esponenziale,
- (2) - per il principio di identità delle serie di potenze,
- (3) - per il teorema di Cayley-Hamilton

- Nota. Poichè *il sottospazio non osservabile* $\mathcal{E}^-$ *non dipende da* t , la proprietà di osservabilità dei sistemi continui non dipende dall'ampiezza dell'intervallo in cui si considera l'uscita.
- Nota. Il sottospazio non osservabile è dato da:

$$\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^-$$

e il sistema è osservabile se:

$$\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rango} \mathcal{O}^- = n$$

- Nota. Nel caso dei sistemi continui la condizione di *osservabilità* è equivalente a quella di *ricostruibilità*. In modo analogo a quanto visto per i sistemi discreti e tenendo conto che il sottospazio non osservabile non dipende da t , si dimostra che: *nell'intervallo* $[-t, 0]$ *nessuno stato è indistinguibile nel passato dallo stato* 0 *se*:

$$\mathcal{E}^+ = e^{At} \mathcal{E}^- = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}^- = e^{-At} \{0\} = \{0\}$$

Infatti, la matrice e^{At} è sempre invertibile.

- Il sottospazio $\mathcal{E}^-$ gode della seguente proprietà: è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker \mathbf{C}$.

Dualità

- Dato un sistema continuo o discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, il sistema $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$, viene detto sistema duale di $\mathcal{S}$.

numero di ingressi di $\mathcal{S}$	=	numero di uscite di $\mathcal{S}_D$
numero di uscite di $\mathcal{S}$	=	numero di ingressi di $\mathcal{S}_D$

- Proprietà di raggiungibilità e osservabilità. Le matrici di raggiungibilità ed osservabilità $\mathcal{R}_D^+$ e $\mathcal{O}_D^-$ di $\mathcal{S}_D$ sono legate alle matrici $\mathcal{R}^+$ e $\mathcal{O}^-$ di $\mathcal{S}$ dalle relazioni:

$$\mathcal{R}_D^+ = [\mathbf{C}^T \ \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \ \dots \ (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^T = (\mathcal{O}^-)^T$$

$$\mathcal{O}_D^- = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]^T = (\mathcal{R}^+)^T$$

- Proprietà. Per sistemi discreti, se $\mathcal{S}$ è *controllabile* allora $\mathcal{S}_D$ è *ricostruibile*.

$$\text{Im} \mathbf{A}^n \subseteq \text{Im} \mathcal{R}^+ \Leftrightarrow (\text{Im} \mathbf{A}^n)^\perp \supseteq (\text{Im} \mathcal{R}^+)^\perp \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ker(\mathbf{A}^T)^n \supseteq \ker(\mathcal{R}^+)^T = \ker \mathcal{O}_D^- = \mathcal{E}_D^-$$

- Proprietà : Dato un sistema dinamico $\mathcal{S}$ e il suo *duale* $\mathcal{S}_D$, valgono le proprietà:

$\mathcal{S}$ raggiungibile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ osservabile
$\mathcal{S}$ osservabile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ raggiungibile
$\mathcal{S}$ controllabile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ ricostruibile
$\mathcal{S}$ ricostruibile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ controllabile

- Dati due sistemi algebricamente equivalenti $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$, anche i loro duali $\mathcal{S}_D$ e $\mathcal{S}'_D$ sono algebricamente equivalenti:

$$\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \quad \xRightarrow{\mathbf{T}} \quad \mathcal{S}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T})$$

$\Updownarrow$ Dualità

$\Updownarrow$ Dualità

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T) \quad \xRightarrow{\mathbf{T}^{-T}} \quad \mathcal{S}'_D = (\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{T}^{-T}, \mathbf{T}^T\mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T\mathbf{T}^{-T})$$

- Infatti, i sistemi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono legati fra di loro dalla relazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$$

mentre i due sistemi duali $\mathcal{S}_D$ e $\mathcal{S}'_D$ sono legati fra di loro dalla relazione

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{T}^{-T}\mathbf{x}'_D$$

Forma standard di osservabilità

- Si consideri il seguente sistema lineare discreto (continuo):

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

di dimensione n e non (completamente) osservabile:

$$\dim \mathcal{E}^- = n - \rho > 0$$

- Allora esiste una matrice di cambiamento di base $\mathbf{P}$ tale che:

$$(2) \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{A}}_{2,1} & \overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix} & \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \\ \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{cases}$$

dove $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$ ha dimensione $\rho \times \rho$ e $\overline{\mathbf{C}}_1$ ha dimensione $p \times \rho$ costituiscono una coppia osservabile.

Il sistema (2) viene detto forma standard di osservabilità del sistema (1), in quanto viene messa in evidenza la parte osservabile del sistema originario.

La prova è immediata, considerando che il duale del sistema (1) non è raggiungibile e quindi esiste una matrice $\mathbf{T}$ di cambiamento di base che riduce (2) in forma standard di raggiungibilità. La corrispondente forma duale coincide con il sistema (2). Per le proprietà dei sistemi duali, il legame tra la matrice $\mathbf{P}$ e la matrice $\mathbf{T}$ è il seguente:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{T}^{-1})^T = (\mathbf{T}^T)^{-1}$$

—————

In base alla dualità si mostra anche che le prime righe di $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{T}^T$ sono un insieme di righe linearmente indipendenti di $(\mathcal{R}_D^+)^T = \mathcal{O}^-$.

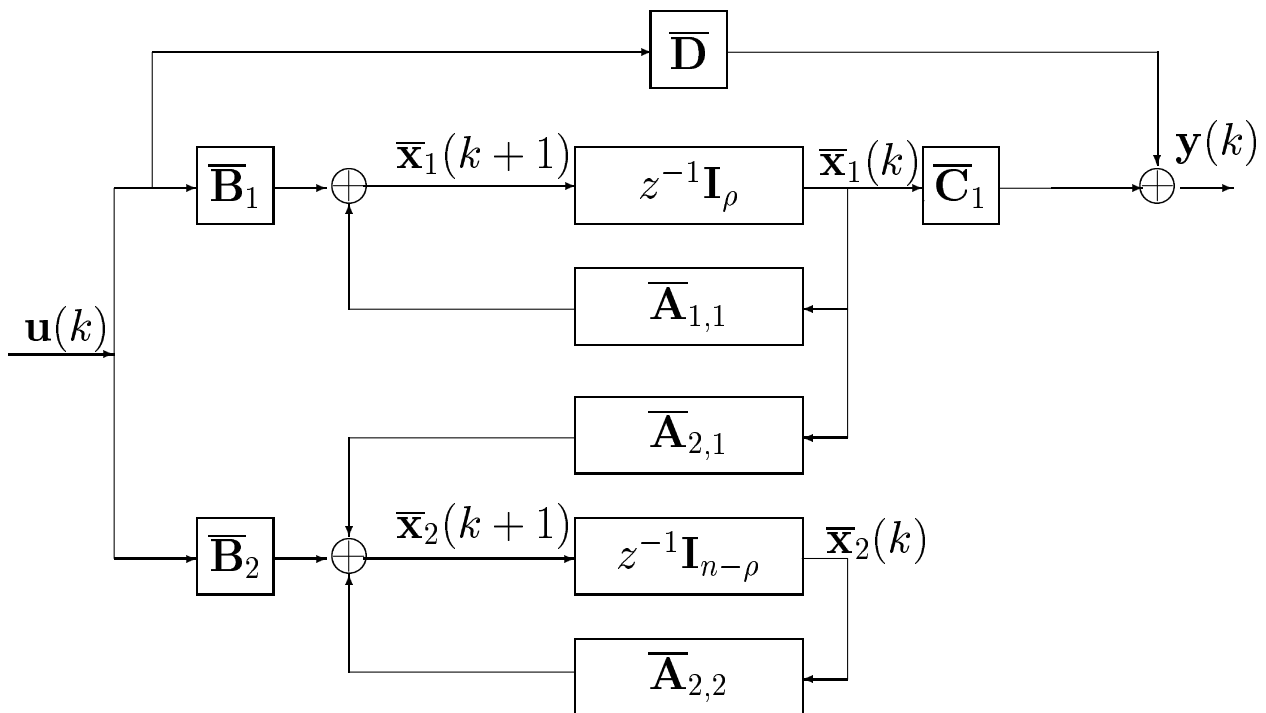
Forma standard - schema a blocchi

Si consideri il vettore di stato $\bar{\mathbf{x}}$ partizionato nelle due componenti $\bar{\mathbf{x}}_1$, parte *osservabile*, e $\bar{\mathbf{x}}_2$ parte *non osservabile*:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}$$

dove $\dim \bar{\mathbf{x}}_1 = \rho$. Le equazioni del sistema (2) diventano:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_1(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{1,1} \bar{\mathbf{x}}_1(k) + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}(k) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{2,1} \bar{\mathbf{x}}_1(k) + \bar{\mathbf{A}}_{2,2} \bar{\mathbf{x}}_2(k) + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{x}}_1(k) + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{u}(k) \end{cases}$$



Nota. Le medesime osservazioni e la medesima scomposizione standard vale anche nel caso dei sistemi a tempo continuo.

Forma standard di osservabilità

- Il sottosistema di dimensione ρ caratterizzato dalle matrici $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$, $\overline{\mathbf{B}}_1$ e $\overline{\mathbf{C}}_1$ è completamente osservabile:

$$\rho = \text{rango} \mathcal{O}^- \mathbf{P} = \text{rango} \overline{\mathcal{O}}^- = \text{rango} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \\ \overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{A}}_{1,1}^{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\rho = \text{rango} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \\ \overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{A}}_{1,1}^{\rho-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 \\ \overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{A}}_{1,1} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{C}}_1 \overline{\mathbf{A}}_{1,1}^{\rho-1} \end{bmatrix} = \text{rango} \overline{\mathcal{O}}_1^{-1}$$

dove $\overline{\mathcal{O}}_1^{-1}$ è la matrice di osservabilità del sottosistema $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{B}}_1, \overline{\mathbf{C}}_1)$.

- Il sottosistema $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{B}}_1, \overline{\mathbf{C}}_1)$ è detto sottosistema osservabile. Poiché la coppia $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{C}}_1)$ è osservabile, lo stato di questo sottosistema può essere determinato in base ai dati di ingresso e di uscita.
- Il *sottospazio non osservabile* $\mathcal{E}^-$ del sistema (2) è costituito da tutti e soli i vettori aventi le componenti $\overline{\mathbf{x}}_1$ nulle.

Infatti essi sono gli unici vettori di stato a cui corrisponde in uscita un'evoluzione libera identicamente nulla.

Il sottosistema caratterizzato dalle matrici $(\overline{\mathbf{A}}_{2,2}, \overline{\mathbf{B}}_2, \mathbf{0})$ è detto *sottosistema non osservabile*.

Matrice di trasferimento.

- La matrice di trasferimento di un sistema dinamico, coincide con la matrice di trasferimento della sua parte *osservabile*.

Infatti, sia dato il sistema nella forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

La matrice di trasferimento vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{2,1} & zI - \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - \mathbf{A}_{1,1})^{-1} & \mathbf{0} \\ * * * & (zI - \mathbf{A}_{2,2})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{C}_1(zI - \mathbf{A}_{1,1})^{-1}\mathbf{B}_1 \end{aligned}$$

cioè la matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ è influenzata solamente dalle matrici del sottosistema osservabile $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{B}}_1, \overline{\mathbf{C}}_1)$.

Forma canonica di osservabilità

- Proprietà. Il sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{c})$ con una sola uscita, descritto dalle matrici di stato e di uscita $\mathbf{A}$ e $\mathbf{c}$, è osservabile se e solo se è algebricamente equivalente ad un sistema $\mathcal{S}_c = (\mathbf{A}_c, \mathbf{c}_c)$ descritto dalle matrici

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove i coefficienti $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico *monico* della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0$$

- La forma canonica di osservabilità si ottiene immediatamente ponendo il sistema duale in forma canonica di controllo.
- Le matrici di osservabilità $\mathcal{O}^-$ e $\mathcal{O}_c^-$ del sistema originario e di quello in forma canonica di osservabilità sono legate fra di loro dalla relazione

$$\mathcal{O}_c^- = \mathcal{O}^- \mathbf{P}$$

dove $\mathbf{P}$ è la matrice di trasformazione ($\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_c$) che porta il sistema originario nella forma canonica di osservabilità. Infatti, si ha che

$$\mathcal{O}^- \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{P} \\ \mathbf{c}\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_c \\ \mathbf{c}_c\mathbf{A}_c \\ \vdots \\ \mathbf{c}_c\mathbf{A}_c^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}_c^-$$

Dalla precedente relazione si ricava immediatamente che:

$$\mathbf{P} = (\mathcal{O}^-)^{-1} \mathcal{O}_c^-,$$

$$\mathbf{P}^{-1} = (\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^-$$

Scomposizione canonica di Kalman

Si consideri il sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$. Sia $\mathcal{X}^+$ il *sottospazio raggiungibile* ed $\mathcal{E}^-$ il *sottospazio non osservabile*.

- Sia $\mathcal{B}_2$ una matrice di base del sottospazio $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$;
- Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_4$ due insiemi di vettori linearmente indipendenti tali che:
 - $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sia una base per lo spazio $\mathcal{X}^+$.
 - $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_4$ sia una base per lo spazio $\mathcal{E}^-$.
- Sia $\mathcal{B}_3$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in modo tale che le colonne della seguente matrice $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4]$$

costituiscono una base per lo spazio degli stati $\mathbf{X}$.

Il sistema trasformato che si ottiene utilizzando $\mathbf{T}$ come matrice di trasformazione, $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$, è caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{1,1} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{1,3} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{2,1} & \bar{\mathbf{A}}_{2,2} & \bar{\mathbf{A}}_{2,3} & \bar{\mathbf{A}}_{2,4} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{4,3} & \bar{\mathbf{A}}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]$$

Tale struttura si ottiene considerando che:

- il sottospazio $\mathcal{X}^+ = \text{span}\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ è $\mathbf{A}$ -invariante.
- il sottospazio $\mathcal{E}^- = \text{span}\{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4\}$, $\mathbf{A}$ -invariante.
- $\text{Im}\bar{\mathbf{B}} \subseteq \mathcal{X}^+$
- $\text{ker}\bar{\mathbf{C}} \supseteq \mathcal{E}^-$

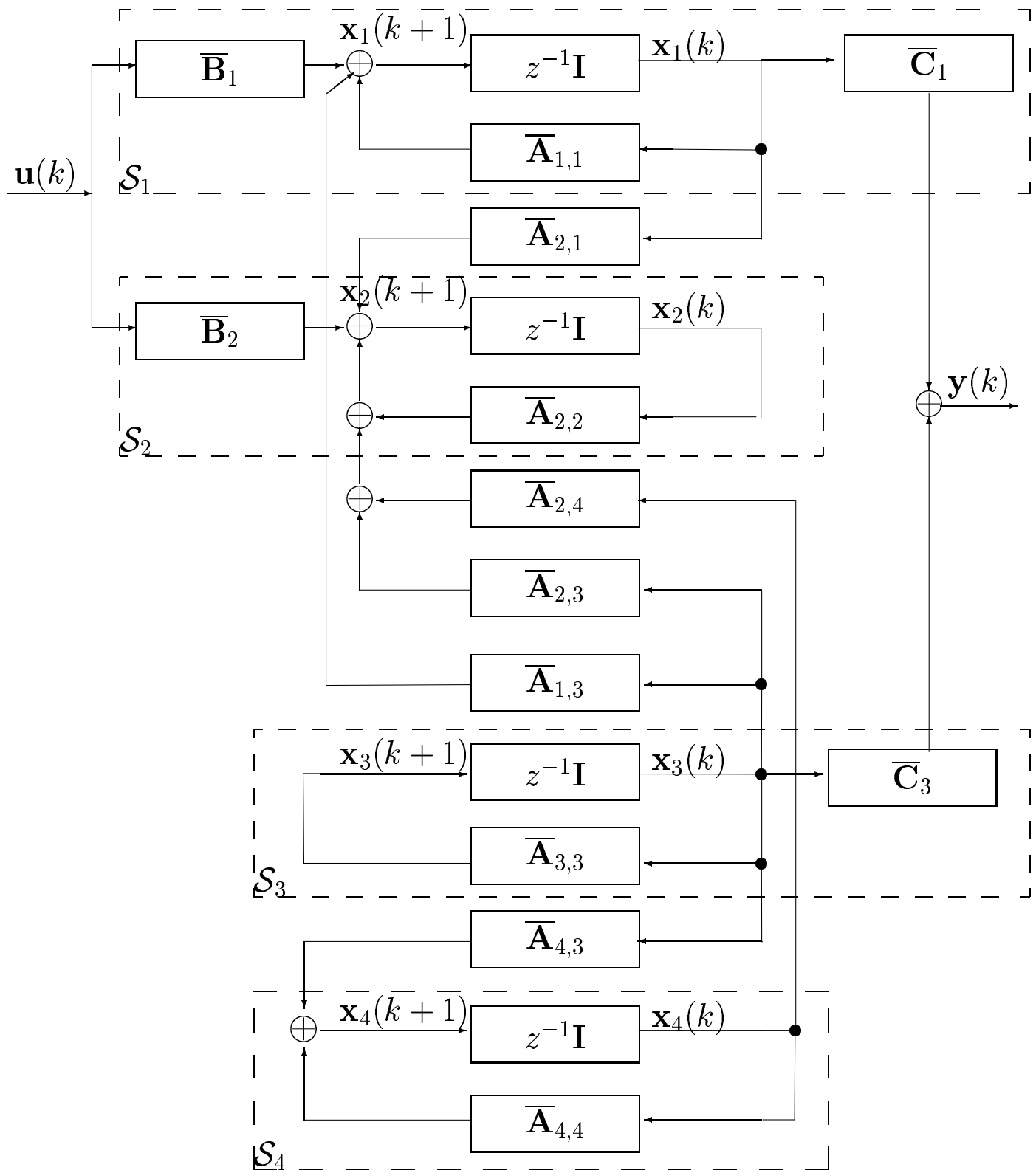
Struttura della scomposizione canonica

- La scomposizione canonica consente di evidenziare i sottosistemi:

$\mathcal{S}_1 = (\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{B}}_1, \overline{\mathbf{C}}_1)$	: raggiungibile e osservabile
$\mathcal{S}_2 = (\overline{\mathbf{A}}_{2,2}, \overline{\mathbf{B}}_2, \mathbf{0})$	: raggiungibile e non osservabile
$\mathcal{S}_3 = (\overline{\mathbf{A}}_{3,3}, \mathbf{0}, \overline{\mathbf{C}}_3)$	: non raggiungibile e osservabile
$\mathcal{S}_4 = (\overline{\mathbf{A}}_{4,4}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$	: non raggiungibile e non osservabile

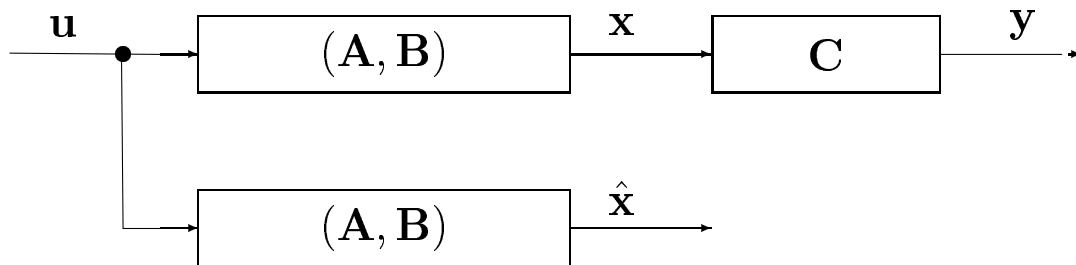
- La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ è funzione della sola parte *completamente raggiungibile e completamente osservabile* del sistema dato, cioè dipende solo dalle matrici del sottosistema $\mathcal{S}_1$ della scomposizione canonica di Kalman. Infatti, si ha che:

$$\mathbf{H}(z) = \overline{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{C}}_1(z\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1})^{-1}\overline{\mathbf{B}}_1$$



Stimatore asintotico dello stato di ordine intero (in catena aperta)

- La struttura dello stimatore in catena aperta non è altro che una “copia” delle equazioni dinamiche del sistema dato:



- Le equazioni dello stimatore in catena aperta sono:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

- Definendo come errore di stima la seguente variabile:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$$

si ottiene che:

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] = \mathbf{A}\mathbf{e}(k)$$

- Partendo da un errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)$, la dinamica dell'errore di stima è

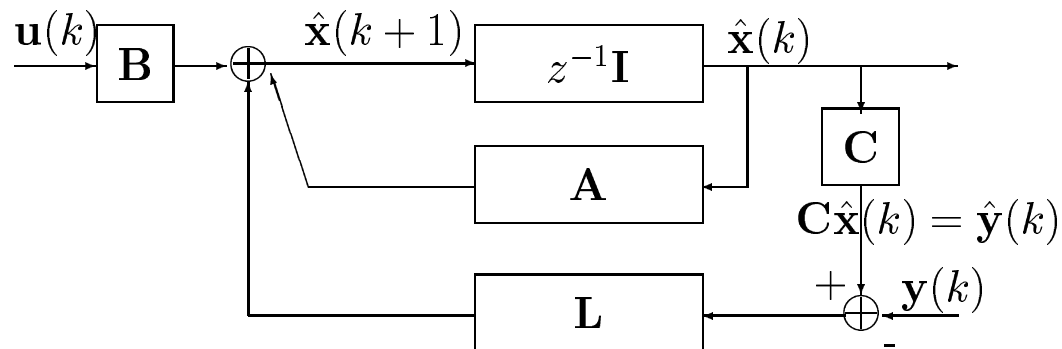
$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{e}(0)$$

e quindi dipende dagli autovalori della matrice $\mathbf{A}$.

- Se il sistema è instabile, l'errore di stima *diverge*.

Stimatore asintotico dello stato di ordine intero (in catena chiusa)

- Lo stimatore in catena chiusa, utilizza una retroazione dell'uscita per stabilizzare gli autovalori (osservabili) dello stimatore di stato.



- Le equazioni dello stimatore in catena chiusa valgono:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{Ly}(k) + \mathbf{Bu}(k)$$

- da cui l'errore:

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\mathbf{e}(k)$$

- La dinamica dell'errore di stima è definita dagli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$.
- Per la proprietà dei sistemi duali il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ può essere fissato ad arbitrio *se e solo se* la coppia $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ è raggiungibile o, equivalentemente, *se e solo se* la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ è osservabile.
- Per calcolare la matrice $\mathbf{L}$ si considera la coppia $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ e si procede seguendo le tecniche viste per la allocazione degli autovalori a partire da una coppia raggiungibile, da cui si ottiene $\mathbf{L}^T$.
- Se la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ è non osservabile, la dinamica dell'errore di stima caratterizzata da $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ ha dei modi fissi, non influenzabili tramite la retroazione. *Solo se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile è possibile ancora la sintesi dello stimatore asintotico.*

Stimatori asintotici dello stato di ordine ridotto

- Gli stimatori asintotici dello stato di ordine intero forniscono una informazione ridondante, in quanto non tengono conto che alcune variabili di stato possono essere ottenute direttamente dalle uscite.
- Gli stimatori di ordine ridotto costituiscono uno schema modificato in cui solo le componenti del vettore di stato non immediatamente accessibili vengono stimate.
- *Procedimento di calcolo di per uno stimatore di ordine ridotto*
 - Sia $\mathbf{H}$ un insieme di p righe linearmente indipendenti estratte dalla matrice di uscita $\mathbf{C}$.
 - Costruiamo una matrice di cambiamento di base $\mathbf{T}$ sullo spazio degli stati ($n \times n$), in cui le ultime p righe siano le $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{H}$ è di ordine $p \times n$, e $\mathbf{V}$ è una sottomatrice di ordine $(n-p) \times n$, costituita da un insieme di vettori che completano ad un insieme di vettori linearmente indipendenti gli elementi di $\mathbf{H}$.

- Il cambiamento di base permette di identificare le ultime p componenti della variabile di stato con le uscite:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{x} \\ \mathbf{H}\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

- Rispetto alla nuova base le matrici che descrivono il sistema diventano:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \bar{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{C}\mathbf{T} = \bar{\mathbf{C}}$$

- Equazioni di stato:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{1,1} & \bar{\mathbf{A}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{A}}_{2,1} & \bar{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

- Svolgendo i calcoli:

$$\mathbf{w}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{w}(k) + \bar{\mathbf{A}}_{1,2}\mathbf{y}(k) + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{w}(k) + \bar{\mathbf{A}}_{2,2}\mathbf{y}(k) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(k)$$

- Premoltiplicando l'ultima relazione per una matrice $\mathbf{L}$ di dimensioni $(n-p) \times p$ e sommandola alla precedente:

$$\mathbf{w}(k+1) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k+1) = (\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{w}(k) +$$

$$+ (\bar{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,2})\mathbf{y}(k) + (\bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k)$$

- Sommando e sottraendo a secondo membro il termine $(\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{L}\mathbf{y}$:

$$\overbrace{\mathbf{w}(k+1) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k+1)}^{\mathbf{v}(k+1)} = (\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1})\overbrace{(\mathbf{w}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k))}^{\mathbf{v}(k)} +$$

$$+ (\bar{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,2} - \bar{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + (\bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k)$$

- Ponendo $\mathbf{v}(k) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$, l'ultima relazione diventa l'equazione di stato di un sistema con vettore di stato $\mathbf{v}(k)$ di dimensione $n-p$:

$$\mathbf{v}(k+1) = (\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{v}(k) +$$

$$+ (\bar{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,2} - \bar{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) +$$

$$+ (\bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k)$$

- Per tale sistema si costruisce uno stimatore a catena aperta, di ordine $n-p$. La dinamica dell'errore di stima $\mathbf{e}(k)$ per tale sistema è fissata dagli autovalori della matrice $(\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1})$:

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{v}(k+1) - \hat{\mathbf{v}}(k+1) = (\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{e}(k)$$

- Lo stimatore asintotico di ordine ridotto ha quindi la seguente struttura:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

dove $\hat{\mathbf{v}}(k)$ si determina come uscita del seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(k+1) = & (\bar{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1})\hat{\mathbf{v}}(k) + \\ & + (\bar{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,2} - \bar{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + \\ & + (\bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

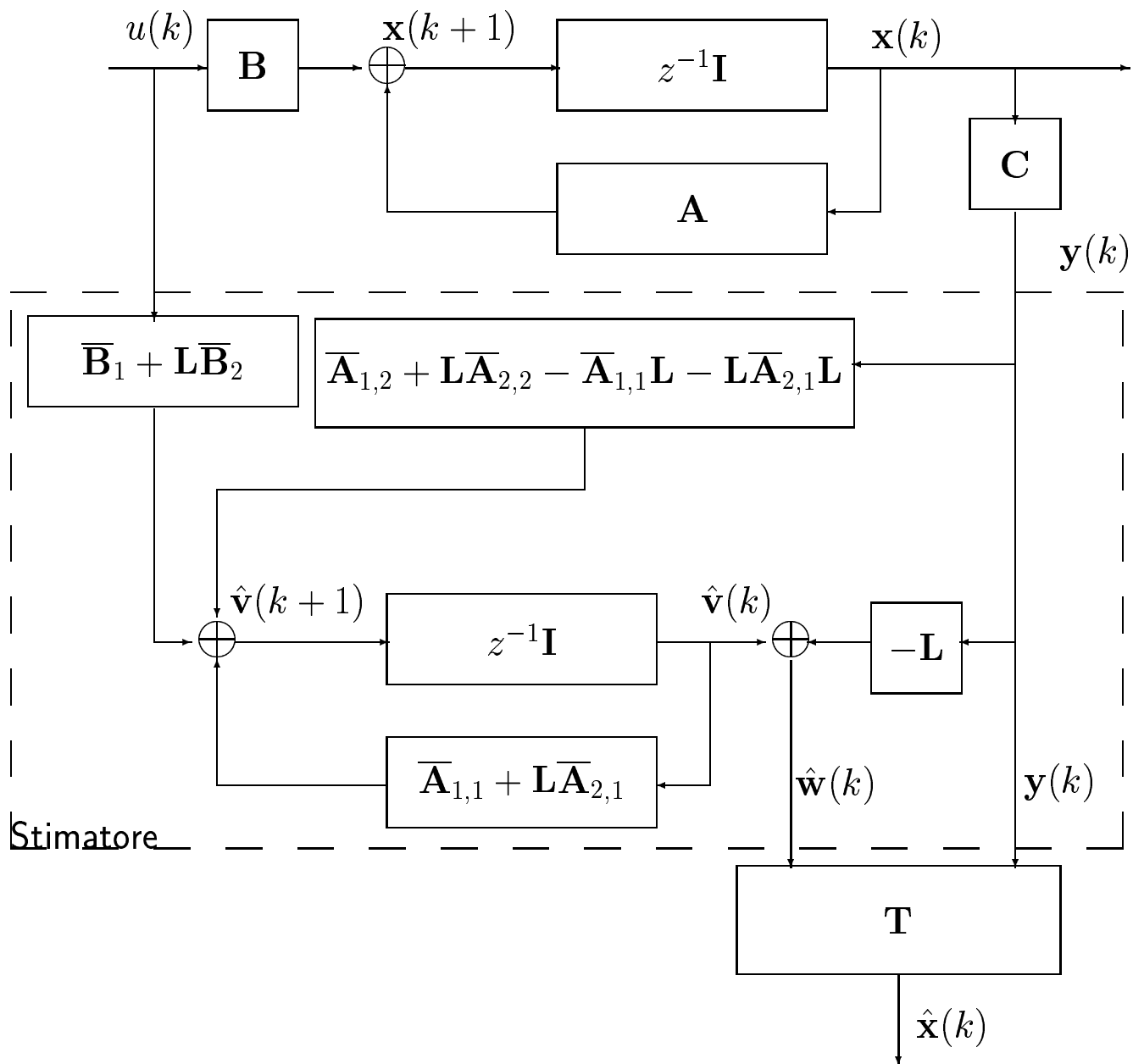
- Gli autovalori dello *stimatore di ordine ridotto* possono essere fissati ad arbitrio, con una scelta opportuna di $\mathbf{L}$ se la coppia $(\bar{\mathbf{A}}_{1,1}, \bar{\mathbf{A}}_{2,1})$ è osservabile. È possibile mostrare che:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \text{ osservabile} \Rightarrow (\bar{\mathbf{A}}_{1,1}, \bar{\mathbf{A}}_{2,1}) \text{ osservabile}$$

- La stima dello stato $\mathbf{x}(k)$ si ottiene da $\mathbf{v}(k)$:

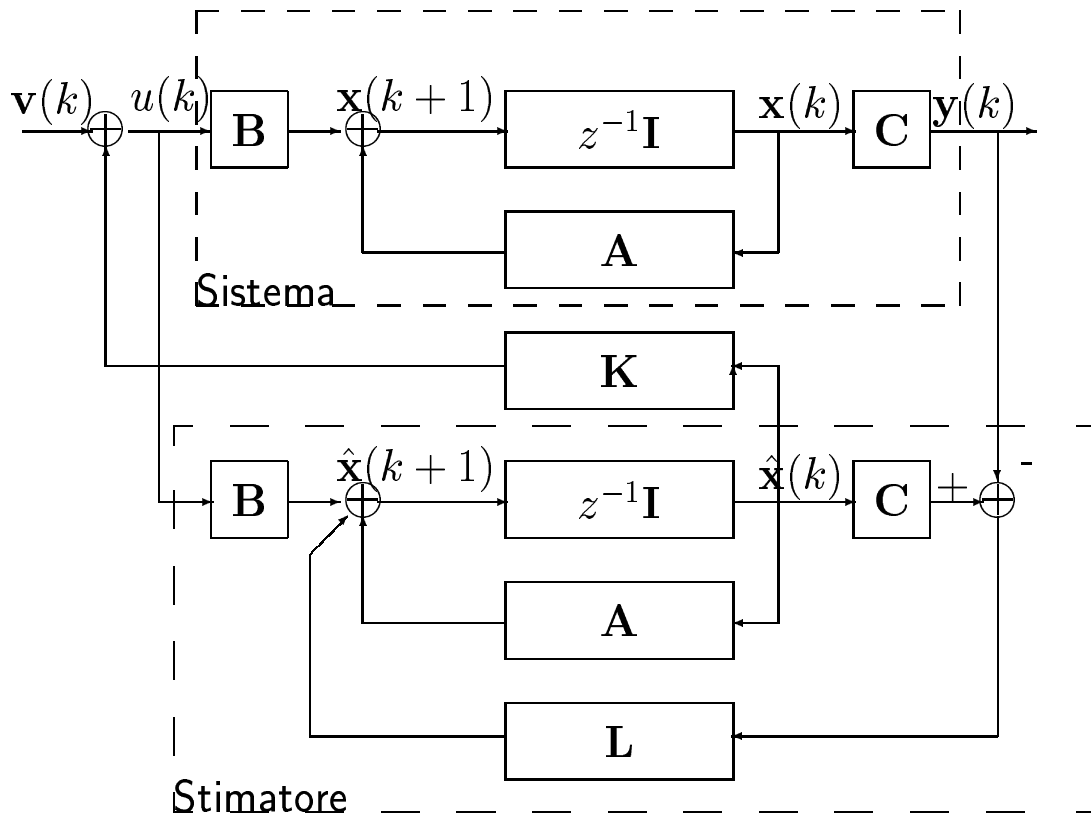
$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \Rightarrow \hat{\mathbf{w}}(k) = \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

- Schema a blocchi di uno stimatore di ordine ridotto:



Sintesi del regolatore

- Si definisce regolatore il sistema composto dalla serie dello stimatore dello stato e dall'elemento statico di retroazione **K**:



- Equazioni del sistema globale:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{v}(k) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}[\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{y}(k)]$$

- Eliminando $\mathbf{u}(k)$ si ottiene:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k)$$

- Il sistema ottenuto, descritto dalle matrici $(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$, è di dimensione $2n$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{LC} & \mathbf{A} + \mathbf{LC} + \mathbf{BK} \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{B}}} \mathbf{v}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}$$

- Allo scopo di evidenziare alcune proprietà strutturali del sistema, si effettua il cambiamento di base:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$$

da cui:

$$\mathcal{A} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

- La presenza dello stimatore non altera la relazione *ingresso-uscita* del sistema considerato. Infatti la matrice di trasferimento dell'intero sistema non cambia utilizzando una retroazione dello stato $\mathbf{x}$, anzichè lo stato stimato $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \overline{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \mathcal{C}(z\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]^{-1} & * * * * * \\ 0 & [z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Proprietà di separazione

- La sintesi di:
 - Il blocco di retroazione, cioè l'allocazione degli autovalori del sistema $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$.
 - Il blocco di stima dello stato, cioè l'allocazione degli autovalori del sistema $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$.

possono essere effettuate in modo indipendente, infatti vale la *proprietà di separazione* :

$$\begin{aligned} \det(z\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}) &= \det(z\mathbf{I} - \mathcal{A}) = \\ &= \det \begin{bmatrix} [z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] & \mathbf{BK} \\ 0 & [z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})] \end{bmatrix} = \\ &= \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})] \end{aligned}$$

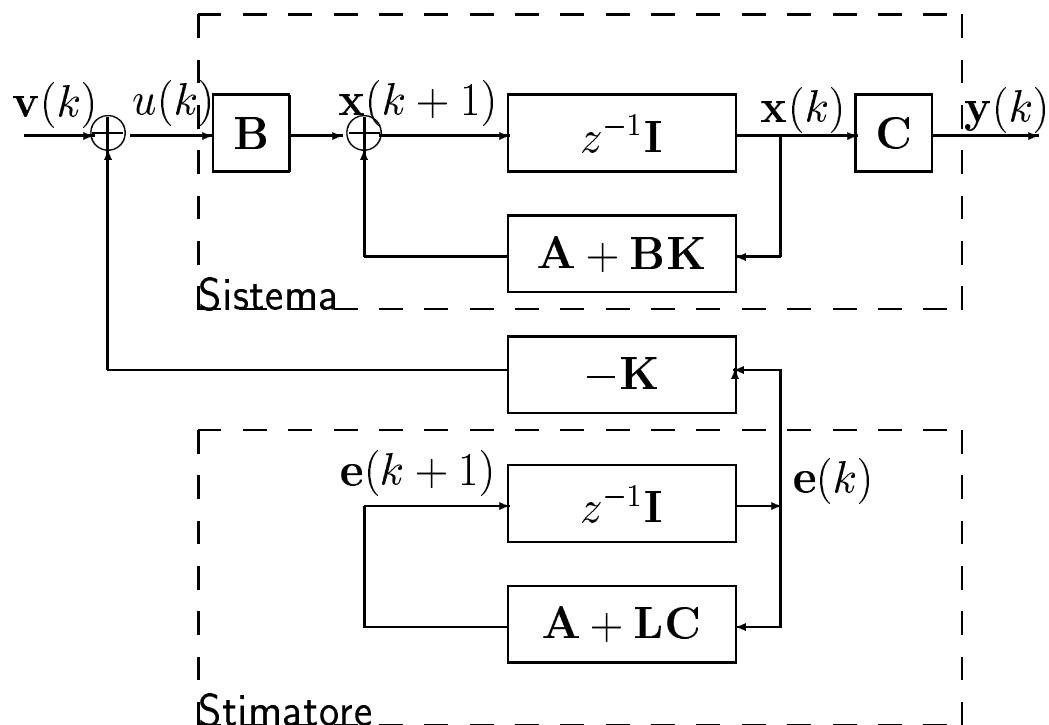
Schema del regolatore.

- *Cambiamento di base* : Effettuando il cambiamento di base secondo la matrice $\mathbf{T}$, è possibile evidenziare che:
 - Il legame *ingresso-uscita* dipende solo dal sistema $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.
 - La parte di stima dello stato costituisce un sistema a se stante, la cui uscita libera (funzione dell'errore di stima) agisce come ulteriore ingresso per il sistema dinamico.

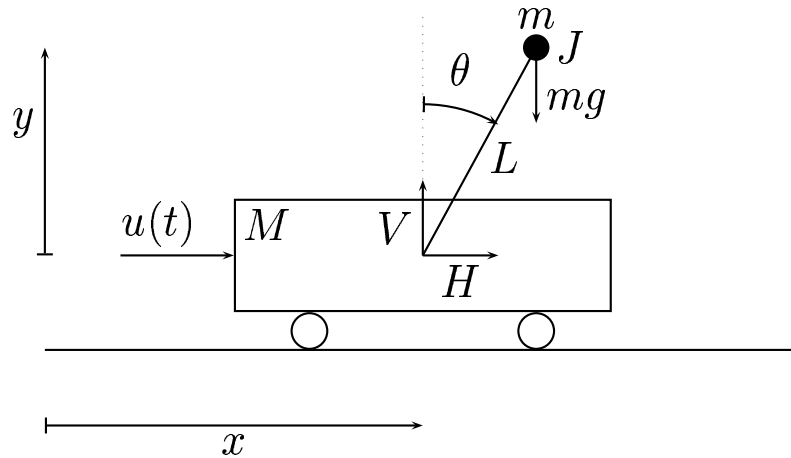
$$\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix}$$



Esempio. Sia dato il seguente sistema fisico.



Calcolare una retroazione dinamica dell'uscita θ che stabilizzi il sistema nell'intorno del punto $\theta = 0$.

Introdotte le variabili ausiliarie V ed H che descrivono l'interazione tra l'asta e il carrello, le equazioni dinamiche del sistema sono le seguenti:

$$\text{Asta : } \begin{cases} H(t) = m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \sin \theta) \\ V(t) - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \theta) \\ J\ddot{\theta} = VL \sin \theta - HL \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{Carrello : } M\ddot{x} = u(t) - H(t)$$

Se si trascura l'azione dell'asta sul carrello, $H(t) \simeq 0$, l'accelerazione $\ddot{x}$ risulta proporzionale alla forza di ingresso $u(t)$:

$$H(t) \simeq 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{u(t)}{M}$$

Eliminando le variabili ausiliarie H e V dal precedente sistema, si trova un'equazione differenziale che esprime l'equilibrio del movimento attorno al punto di cerniera tra asta e carrello:

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = mgL \sin \theta - m\ddot{x}L \cos \theta$$

Esplicitando $\ddot{\theta}$ e sostituendo $u(t)/M$ al posto di $\ddot{x}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{mL}{(J+mL^2)}g \sin \theta - \frac{mL}{(J+mL^2)}\frac{u}{M} \cos \theta \\ &= \alpha g \sin \theta - \frac{\alpha}{M}u \cos \theta\end{aligned}$$

dove, per brevità, si è posto

$$\alpha = \frac{mL}{(J + mL^2)}$$

Utilizzando il seguente vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad y = \theta = x_1$$

il sistema dato può essere descritto nello spazio degli stati nel modo seguente

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha g \sin x_1 - \frac{\alpha}{M}u \cos x_1 \end{cases}$$

Quando $u = 0$, l'unico punto di equilibrio del sistema è $\mathbf{x} = 0$. Linearizzando nell'intorno di questo punto di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(0,0)} \mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right]_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g \cos x_1 + \frac{\alpha}{M}u \sin x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \cos x_1 \end{bmatrix}_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix} u = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{Cx}\end{aligned}$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono reali distinti:

$$\Delta_A(s) = s^2 - \alpha g = (s + \sqrt{\alpha g})(s - \sqrt{\alpha g}) \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha g}$$

Retroazione statica dell'uscita. Posto:

$$u(t) = \bar{k} y = \bar{k} \mathbf{C} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{k} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

la matrice del sistema retroazionato è:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{k}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g - \bar{k}\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è:

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\bar{k}\mathbf{C}}(s) = s^2 - \left(\alpha g - \bar{k}\frac{\alpha}{M} \right)$$

Per $\bar{k}$ grande gli autovalori sono immaginari; per $\bar{k}$ piccolo gli autovalori sono reali ed uno dei due è a parte reale positiva. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione statica dell'uscita.

Retroazione statica dello stato. La matrice di raggiungibilità del sistema è a rango pieno

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{M} \\ -\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

per cui mediante una retroazione statica dello stato deve essere possibile posizionare a piacere gli autovalori λ_1 e λ_2 del sistema retroazionato. Sia $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ la matrice di retroazione. I polinomi caratteristici della matrice $\mathbf{A}$ e della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$ sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^2 - \alpha g, \quad \Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(s) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

La sintesi della matrice $\mathbf{K}$ può essere fatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_c \{ \mathcal{R}^+ (\mathcal{R}_c^+)^{-1} \}^{-1} = \mathbf{K}_c \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{M} \\ -\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha g - \lambda_1\lambda_2 & (\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{M}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{M}{\alpha} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{M}{\alpha}(\alpha g + \lambda_1\lambda_2) & -\frac{M}{\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Osservatore asintotico di ordine pieno. La matrice di osservabilità del sistema è a rango pieno

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui è possibile posizionare a piacere gli autovalori β_1 e β_2 dell'osservatore asintotico di ordine pieno. Sia $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T$ la matrice dei guadagni. I polinomi caratteristici della matrice $\mathbf{A}$ e della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^2 - \alpha g, \quad \Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{LC}}(s) = s^2 - (\beta_1 + \beta_2)s + \beta_1\beta_2$$

La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ può essere fatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \{(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-\}^{-1}\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \mathbf{L}_c \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha g - \beta_1\beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ -\alpha g - \beta_1\beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Osservatore asintotico di ordine ridotto. La trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{x}}$ porta il sistema ad assumere la forma

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}^{-1} \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha g \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{M} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

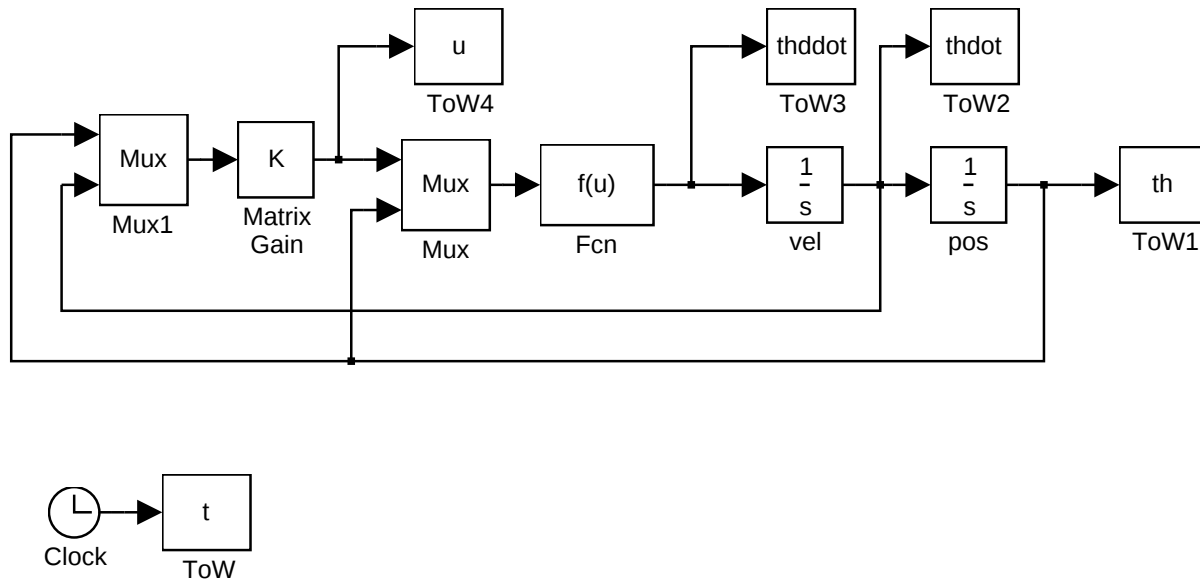
Dalla relazione $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{L} = \beta$ si ricava $\mathbf{L} = \beta$. L'osservatore di ordine ridotto assume quindi la forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \hat{v}(t) - \mathbf{L}y(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) - \beta y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}(t) &= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})\hat{v}(t) + [(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22}) - (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})\mathbf{L}]y(t) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)u(t) \\ &= \beta\hat{v}(t) + (\alpha g - \beta^2)y(t) - \frac{\alpha}{M}u(t) \end{aligned}$$

Simulazione del sistema retroazionato. In ambiente Simulink si è definito il seguente schema a blocchi (pendmdl.mdl):



I parametri che caratterizzano il sistema sono i seguenti:

$$M = 2, \quad m = 0.5, \quad L = 0.4, \quad J = 0.02$$

La funzione $f(u)$ è definita come segue:

$$f(u) = \alpha \left[g \sin(u(2)) - \frac{u(1)}{M} \cos(u(2)) \right]$$

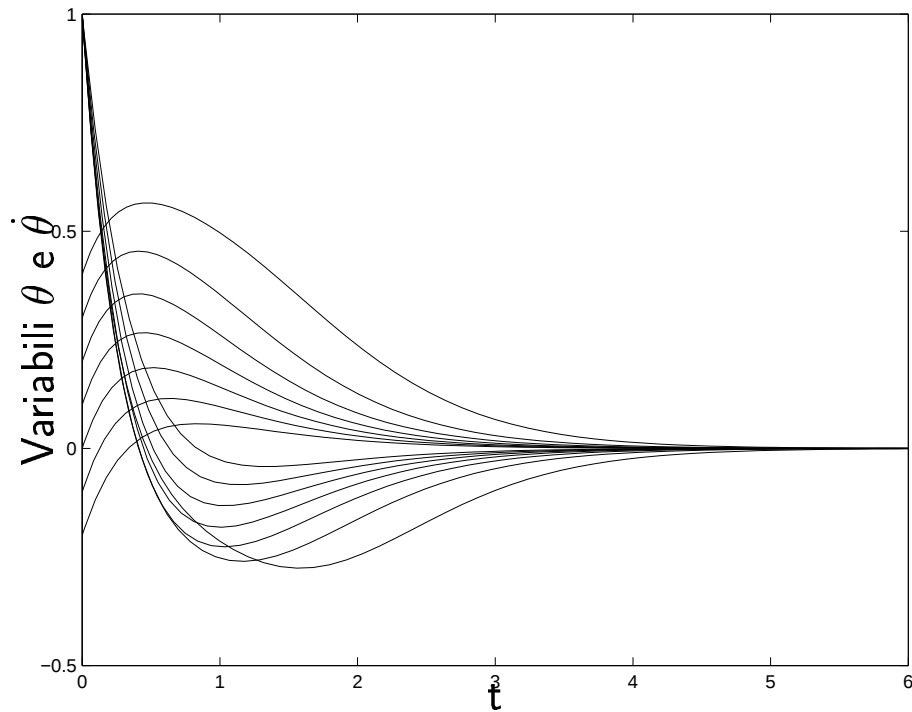
La matrice K è:

$$\begin{bmatrix} \frac{M}{\alpha}(\alpha g + \lambda_1 \lambda_2) & -\frac{M}{\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix}$$

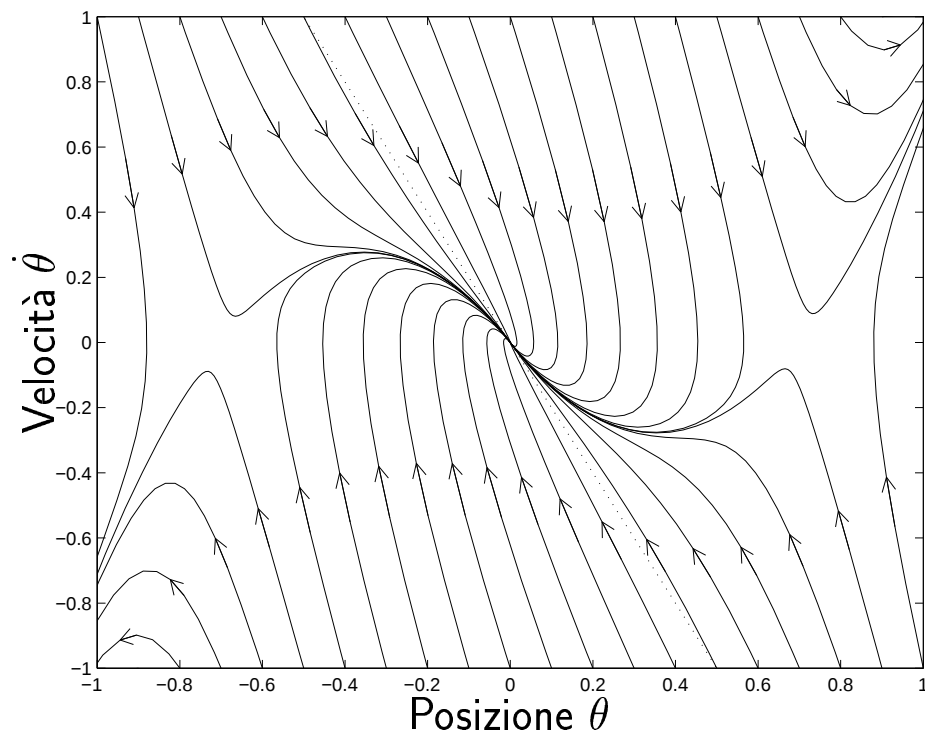
Invece di simulare direttamente in ambiente Simulink, si è preferito attivare la simulazione da Matlab. A tale scopo è stato scritto il file comandi pendolo.m:

```
%%%%%%%%%%%%%% Parametri del sistema %%%%%%%%%%%%%%%
M=2;                % massa carrello
m=0.5;              % massa asta
L=0.4;              % lunghezza asta
g=9.81;             % accelerazione
J=0.02;             % momento di inerzia
%%%%%%%%%%%%%% Simulazione e graficazione %%%%%%%%%%%%%%%
tfin=6;              % istante finale
th00=1;              % condizione iniziale di posizione
thdot0=th00;         % condizione iniziale di velocita'
lam1=-2+0*j;         % autovalore di progetto
lam2=conj(lam1);     % autovalore complesso coniugato
alpha=m*L/(J+m*L^2); % variabile ausiliaria
K=M*[alpha*g+lam1*lam2 -(lam1+lam2)]/alpha; % matrice dei guadagni
p=4;
figure(1); clf       % attiva una nuova figura
figure(2); clf
for th0=[-th00:th00/10:th00]; % ciclo al variare della condizione iniziale
    sim('pendmdl',tfin);      % si simula lo schema a blocchi 'pendmdl'
    if (th0>=-0.2)&(th0<=0.4)
        figure(1)
        plot(t,th); hold on    % graficazione della posizione
        plot(t,thdot)         % graficazione della velocita'
    end
    figure(2)
    plot(th,thdot); hold on    % graficazione nel piano delle fasi
    plot(-th,-thdot)
    freccia(th(p),thdot(p),th(p+1),thdot(p+1),th00/30,thdot0/20)
    freccia(-th(p),-thdot(p),-th(p+1),-thdot(p+1),th00/30,thdot0/20)
    % freccia() e' una funzione creata ad hoc
end
figure(1)
axis([0 tfin -0.5*max(th00,thdot0) max(th00,thdot0)])
xlabel('time')
ylabel('th thdot')
title('traj')
figure(2)
if imag(lam1)==0
    plot([-1 1], lam1*[-1 1],':')
end
axis([-th00 th00 -thdot0 thdot0])
xlabel('th')
ylabel('thdot')
title('phase')
```

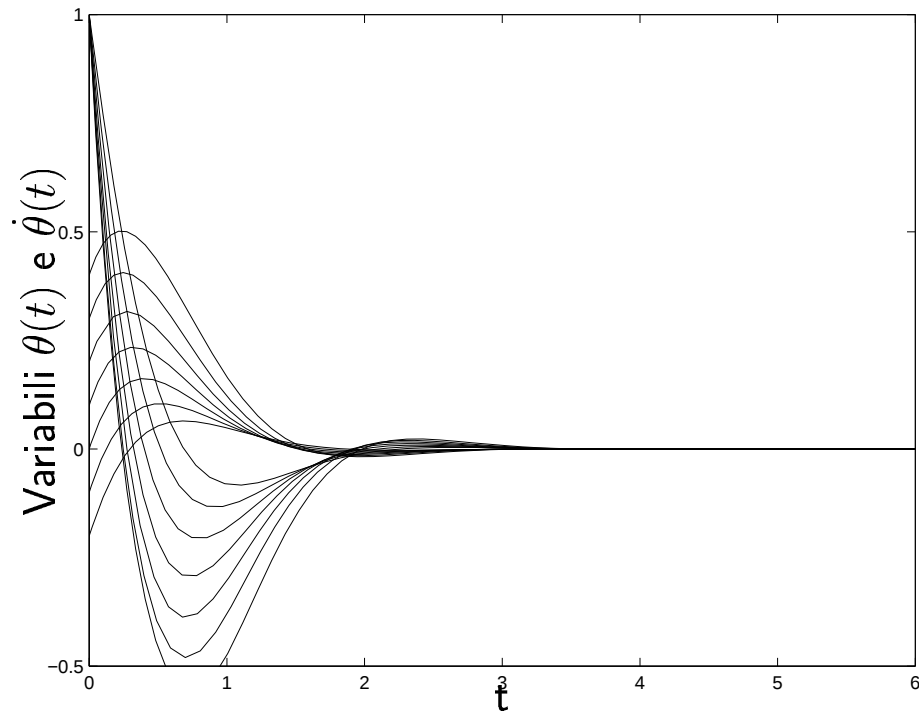
Nel caso di autovalori reali $\lambda_{1,2} = -2$ gli andamenti delle variabili $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ sono di tipo aperiodico:



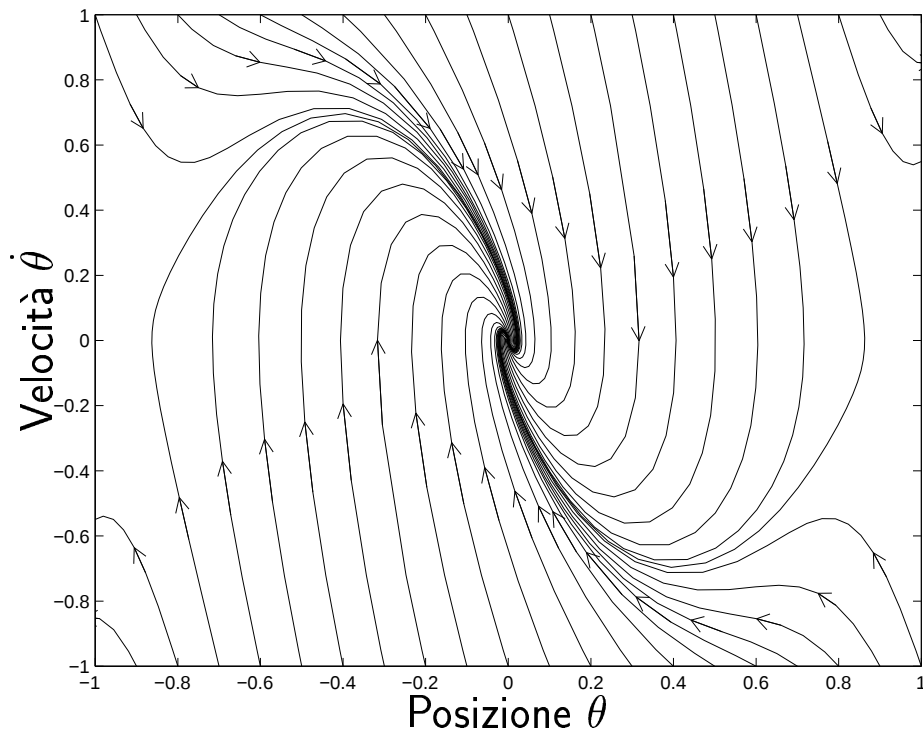
Le traiettorie nello spazio delle fasi tendono a zero appiattendosi lungo l'autovettore (linea tratteggiata):



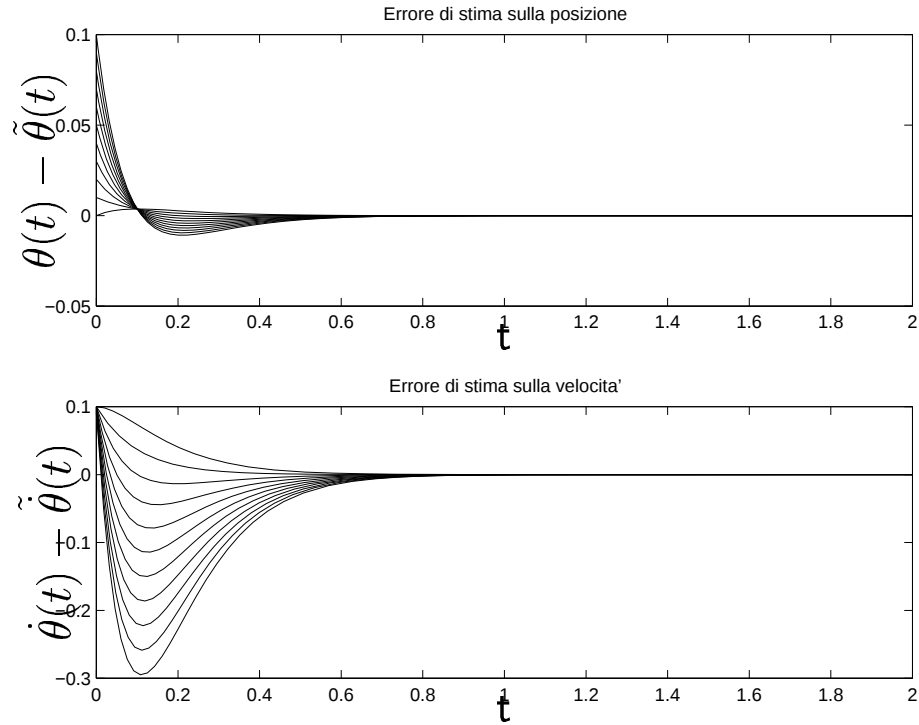
Nel caso di autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = -2 \pm 2j$, gli andamenti delle variabili $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ sono di tipo oscillatorio smorzato:



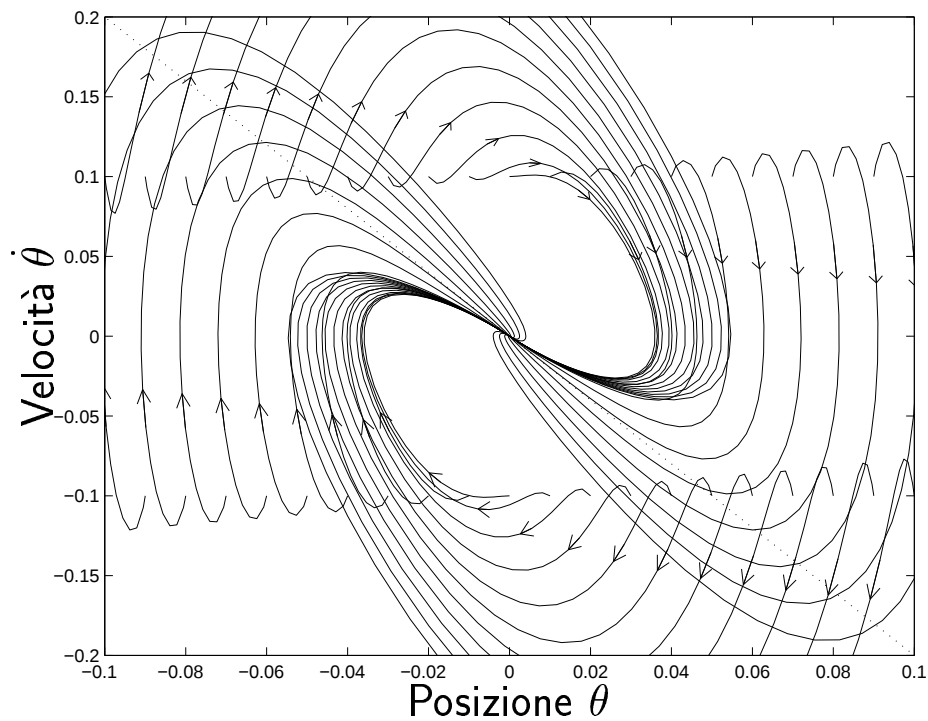
Gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi tendono all'origine con andamento a "spirale":



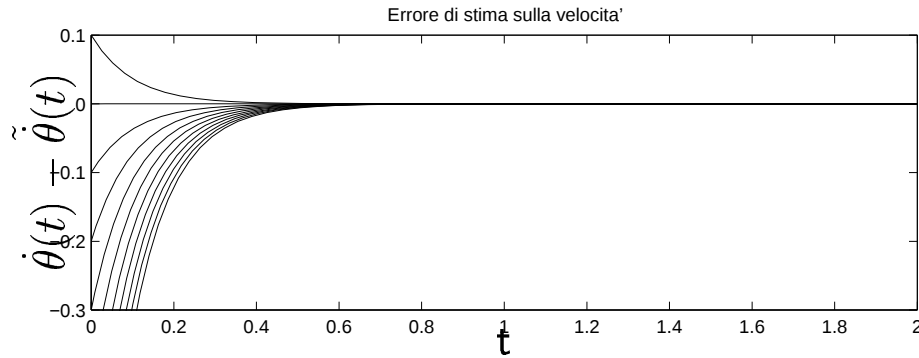
Utilizzando l'osservatore asintotico di ordine pieno, $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, $\beta_1 = \beta_2 = -10$, si ottengono i seguenti andamenti temporali degli errori di stima:



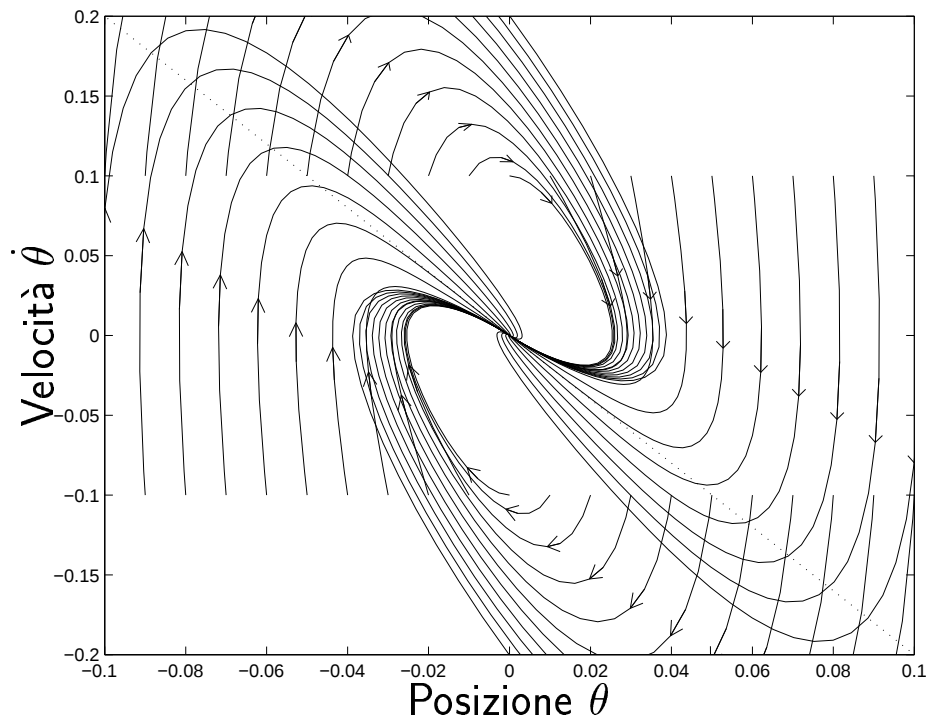
e le seguenti traiettorie nello spazio delle fasi:



Utilizzando l'osservatore asintotico di ordine ridotto, $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, $\beta = -10$, si ottengono i seguenti andamenti temporali degli errori di stima:



e le seguenti traiettorie nello spazio delle fasi:



Rispetto al caso precedente si ha una più rapida convergenza a zero dell'errore di stima della velocità.

Nel caso non lineare l'utilizzo dell'osservatore di stato tipicamente riduce l'ampiezza della regione di asintotica convergenza a zero.

Modello linearizzato tempo continuo del pendolo inverso:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

La matrice di trasferimento $G(s)$ di questo sistema vale:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{-\lambda^2}{gM(s - \lambda)(s + \lambda)}$$

Il modello discreto $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$ del corrispondente sistema a segnali campionati si determina nel modo seguente. Sia T il periodo di campionamento e sia $\lambda = \sqrt{\alpha g}$ il modulo dei due autovalori $\lambda_{1,2} = \pm\lambda$ della matrice $\mathbf{A}$. Gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ della matrice $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -\lambda \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \lambda \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Posto $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$, la matrice $\mathbf{F}$ si calcola come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{T}e^{\bar{\mathbf{A}}}\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} \\ 1 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\lambda T} + e^{-\lambda T} & \frac{e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}}{\lambda} \\ \lambda(e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}) & e^{\lambda T} + e^{-\lambda T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda T) & \frac{\sinh(\lambda T)}{\lambda} \\ \lambda \sinh(\lambda T) & \cosh(\lambda T) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{G}$, invece, assume la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} \cosh(\lambda\sigma) & \frac{\sinh(\lambda\sigma)}{\lambda} \\ \lambda \sinh(\lambda\sigma) & \cosh(\lambda\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda^2}{gM} \end{bmatrix} d\sigma \\ &= \frac{1}{gM} \int_0^T \begin{bmatrix} -\lambda \sinh(\lambda\sigma) \\ -\lambda^2 \cosh(\lambda\sigma) \end{bmatrix} d\sigma = \frac{1}{gM} \begin{bmatrix} -\cosh(\lambda\sigma) \\ -\lambda \sinh(\lambda\sigma) \end{bmatrix}_0^T \\ &= \frac{1}{gM} \begin{bmatrix} 1 - \cosh(\lambda T) \\ -\lambda \sinh(\lambda T) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Essendo $\mathbf{H} = \mathbf{C}$, il sistema a segnali campionati ($\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$) è:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda T) & \frac{\sinh(\lambda T)}{\lambda} \\ \lambda \sinh(\lambda T) & \cosh(\lambda T) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1 - \cosh(\lambda T)}{gM} \\ -\frac{\lambda \sinh(\lambda T)}{gM} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Il sistema è raggiungibile e osservabile per qualunque valore di $T > 0$. Infatti, la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R}^+ = \frac{1}{gM} \begin{bmatrix} 1 - \cosh(\lambda T) & \cosh(\lambda T) - \cosh(2\lambda T) \\ \lambda \sinh(\lambda T) & \lambda[1 - 2 \cosh(\lambda T)] \sinh(\lambda T) \end{bmatrix}$$

ha un determinante

$$\det \mathcal{R}^+ = -2\lambda \frac{[\cosh(\lambda T) - 1] \sinh(\lambda T)}{g^2 M^2}$$

che si annulla solo per $T = 0$. D'altra parte, anche la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cosh(\lambda T) & \frac{\sinh(\lambda T)}{\lambda} \end{bmatrix}$$

ha un determinante che annulla solo per $T = 0$. Si può facilmente dimostrare che la funzione di trasferimento $G(z)$ del sistema discreto è la seguente:

$$G(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} = \frac{(z+1)[1 - \cosh(\lambda T)]}{gM(z - e^{\lambda T})(z - e^{-\lambda T})}$$

Per esercizio, lo studente può verificare che la stessa funzione di trasferimento $G(z)$ poteva essere ottenuta utilizzando la formula:

$$G(z) = \mathcal{Z} [H_0(s)G(s)] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{sT}}{s} G(s) \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

essendo $G(s)$ la funzione di trasferimento del corrispondente sistema tempo continuo:

$$G(s) = \frac{-\lambda^2}{gM(s - \lambda)(s + \lambda)}$$