Stimatori dello stato

- La retroazione statica dello stato $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\,\mathbf{x}(k)$ richiede la conoscenza di tutte le componenti del vettore di stato. Tipicamente le uniche variabili che vengono misurate, mediante opportuni sensori, sono le componenti del vettore di uscita $\mathbf{y}(k)$.

- Non potendo misurare lo stato $\mathbf{x}(k)$, si cerca di ottenerne una stima $\hat{\mathbf{x}}(k)$ utilizzando un opportuno sistema dinamico che prende il nome, appunto, di *stimatore dello stato*. Verranno presi in considerazione 3 diversi stimatori: 1) in catena aperta; 2) in catena chiusa; 3) di ordine ridotto.

1) Stimatore dello stato in catena aperta:

- Lo stimatore in *catena aperta* si ottiene semplicemente facendo una "copia" del sistema dinamico dato. Le equazioni dello stimatore in catena aperta sono le seguenti (caso discreto e caso continuo):

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k)}, \qquad \boxed{\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)}$$

- *Proprietà. Lo stimatore dello stato in catena aperta può essere utilizzato solo se il sistema è asintoticamente stabile.*

  Prova. Definiamo come *errore di stima* (nel caso tempo discreto e nel caso tempo continuo) le seguenti variabili:

  $$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k), \qquad \mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

  Sostituendo si ottiene che $\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]$ e $\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]$, da cui si ricava:

  $$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}(k), \qquad \dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t)$$

  Sia $\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)$ l'errore di stima iniziale. Nei due casi, la dinamica dell'errore di stima è il seguente:

  $$\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{e}(0), \qquad \mathbf{e}(t) = e^{\mathbf{A}\,t}\mathbf{e}(0)$$

  Quindi l'errore di stima tende asintoticamente a zero solo se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono strettamente stabili.

- Nel caso di sistemi stabili, non è comunque possibile modificare la velocità di convergenza della stima $\hat{\mathbf{x}}(k)$ al valore vero $\mathbf{x}(k)$.

2) Stimatore dello stato in catena chiusa:

- Lo stimatore in _catena chiusa_ si ottiene da quello in catena aperta aggiungendo in ingresso un'azione di controllo $\mathbf{L}[\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{y}(k)]$ (caso discreto) proporzionale all'errore di stima sull'uscita $\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{y}(k)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \underbrace{\mathbf{L}[\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{y}(k)]}_{\text{controllo aggiuntivo}}$$

- Le equazioni dello stimatore in catena chiusa sono quindi le seguenti:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)} \qquad \text{(caso discreto)}$$

  L'errore di stima per sistemi discreti soddisfa le seguenti equazioni:

$$\mathbf{e}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(k) \qquad \to \qquad \mathbf{e}(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})^k\, \mathbf{e}(0)$$

  L'errore di stima $\mathbf{e}(k)$ tende a zero per $k \to \infty$ se e solo se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$ sono asintoticamente stabili, cioè sono tutti interni al cerchio di modulo unitario.

  La matrice $\mathbf{L}$ rappresenta un grado di libertà che può essere utilizzato per posizionare a piacere gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$.

- Nel caso continuo, le equazioni dello stimatore in catena chiusa sono:

$$\boxed{\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)} \qquad \text{(caso continuo)}$$

  L'errore di stima per sistemi tempo-continui soddisfa le seguenti equazioni:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \qquad \to \qquad \mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{L}\mathbf{C})t}\, \mathbf{e}(0)$$

  L'errore di stima $\mathbf{e}(t)$ tende a zero per $t \to \infty$ se e solo se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$ sono asintoticamente stabili, cioè sono tutti a parte reale negativa.

- Per calcolare la matrice $\mathbf{L}$ è possibile procedere "per dualità": si considera la coppia "raggiungibile" $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T) = (\mathbf{A}_D, \mathbf{B}_D)$ e si procede alla sintesi della matrice dei guadagni $\mathbf{L}^T = \mathbf{K}_D$ seguendo le tecniche viste in precedenza per l'allocazione degli autovalori dei sistemi ragguingibili.

- Se il sistema non è completamente osservabile, gli autovalori della parte non osservabile (e quindi i corrispondenti "modi" dell'errore di stima) non potranno essere modificati utilizzando la matrice $\mathbf{L}$.

- **Solo se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile sarà possibile procedere alla sintesi di uno stimatore asintotico dello stato. In caso contrario l'errore di stima sarà sicuramente divergente.**

- Nel caso di sistemi $(\mathbf{A},\ \mathbf{C})$ completamente osservabili e con una sola uscita $(p = 1)$, invece di "dualizzare" il sistema è possibile posizionare ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ utilizzando direttamente una delle seguenti due "formule duali".

  1) Formula che utilizza la *forma canonica di osservabilità*:

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}_c\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 - d_0 \\ \alpha_1 - d_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - d_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_c}$$

  dove α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

  e d_i sono i coefficienti di un polinomio monico arbitrario $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$$

  2) Formula basata sulla "dualizzazione" della *formula di Ackerman*:

$$\mathbf{L} = -p(\mathbf{A})\,\underbrace{(\mathcal{O}^-)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

  dove $\mathbf{q}$ è l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare continuo:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\mathbf{x}}(t) &=& \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) &=& \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{array}\right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso. Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore. Nella sintesi dell'osservatore si utilizzi la formula di Ackerman.

Soluzione. Il sistema è completamente osservabile:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = -2$$

per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{Ly}(t) + \mathbf{Bu}(t)$$

Il polinomio desiderato è $p(s) = (s+1)^3$. Il vettore $\mathbf{L}$ può essere calcolato utilizzando la formula di Ackerman:

$$\mathbf{L} = -(\mathbf{A}+\mathbf{I})^3(\mathcal{O}^-)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= -\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene anche utilizzando l'altra formula. Il polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(s)$ della matrice $\mathbf{A}$, il polinomio desiderato $p(s)$ e il vettore $\mathbf{L}$ hanno la seguente struttura:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^3 + 4\,s^2 + 6\,s + 4, \qquad p(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3\,s^2 + 3\,s + 1,$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}_c\mathbf{L}_c = \left\{\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{array}\right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

1.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

1.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

<u>Soluzione.</u> 1.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.25 & 0.75 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(k) \end{array}\right.$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

1.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = (z - l_1)z - (l_2 + 1) = z^2 - l_1 z - l_2 - 1$$

Imponendo $\Delta(z) = z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti utilizzando la formula di Ackerman:

$$\bar{\mathbf{L}} = -(\mathbf{A}_{11})^2 \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

oppure la forma canonica di osservabiltà. In questo caso il polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(z)$ della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e il polinomio desiderato $p(z)$ hanno la seguente struttura:

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(z) = z^2 - 1, \qquad p(z) = z^2$$

per cui il vettore $\bar{\mathbf{L}}$ ha la forma seguente:

$$\bar{\mathbf{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario si ottiene aggiungendo un grado di libertà α in corrispondenza della terza componente dello spazio degli stati e applicando la trasformazione $\mathbf{P}$ che porta il sistema dalla forma standard di osservabilità alla forma di partenza:

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -0.25 + \alpha \end{bmatrix}$$

3) Stimatore dello stato di ordine ridotto:

- Gli stimatori di ordine ridotto costituiscono uno schema "modificato" dello stimatore in catena chiusa in cui si stimano solo le componenti del vettore di stato che non sono immediatamente accessibili.

Procedimento di calcolo di per uno stimatore di ordine ridotto:

- Si suppone che le p righe della matrice $\mathbf{C}$ siano linearmente indipendenti.

- Si costruisce una matrice di trasformazione $\mathbf{P}^{-1}$ le cui ultime p righe coincidano con la matrice $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$$

  e dove $\mathbf{V}$ è una sottomatrice di ordine $(n-p) \times n$ che ha il solo vincolo di rendere invertibile la matrice $\mathbf{P}^{-1}$.

- Utilizzando $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$ si ottiene il seguente sistema trasformato:

$$\overline{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \overline{\mathbf{A}}_{1,2} \\ \overline{\mathbf{A}}_{2,1} & \overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = [\, 0 \;\; \mathbf{I}_p \,] \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

- Lo *stimatore asintotico di ordine ridotto* ha la seguente struttura:

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}}$$

  dove $\hat{\mathbf{v}}(k)$ è l'uscita del seguente sistema dinamico:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(k+1) \;=\; & (\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})\hat{\mathbf{v}}(k) + \\ & +(\overline{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,2} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + \\ & +(\overline{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\overline{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k) \end{aligned}}$$

- Gli autovalori dello *stimatore di ordine ridotto* possono essere fissati ad arbitrio con una scelta opportuna di $\mathbf{L}$ se e solo se la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ è osservabile, cioè se e solo se la coppia $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{A}}_{2,1})$ è osservabile.

Esempio. Dato il seguente sistema lineare stazionario continuo

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array}\right.$$

determinare il vettore $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico di ordine "ridotto" che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori dell' osservatore.

Soluzione. Una matrice $\mathbf{P}$ che porti $\mathbf{C}$ ad assumere la forma $\bar{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ è la seguente:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \hline \mathbf{C} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}$ si ottiene il seguente sistema trasformato:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0.5 \\ -2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} -0.5 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

cioè

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{B}_2 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O} & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{array}\right.$$

Il vettore $\mathbf{L}$ può essere calcolato utilizzando la formula di Ackerman:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{I}_2)^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'osservatore di ordine ridotto è quindi il seguente

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}\, y(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = [\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}]\hat{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L}]y(t) + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2]u(t)$$

e cioè

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$