Trasformazioni nello spazio degli stati

- Sia dato un sistema lineare stazionario:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

- È possibile operare un cambiamento di coordinate nello spazio degli stati utilizzando una trasformazione lineare biunivoca rappresentata da una matrice non singolare $\mathbf{T}$ che lega tra di loro (in modo biunivoco) il vecchio vettore di stato $\mathbf{x}$ e il nuovo vettore di stato $\overline{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}$$

- Applicando questa trasformazione al sistema (1) si ottiene "*una diversa ma equivalente*" descrizione matematica del sistema dinamico di partenza:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{B}}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \overline{\mathbf{C}}\,\overline{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- Le matrici dei due sistemi sono legate tra di loro dalle seguenti relazioni:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

- Scegliendo opportunamente la matrice $\mathbf{T}$ è possibile ottenere rappresentazioni matematiche del sistema di partenza caratterizzate da matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ con struttura particolarmente semplice.

- Le infinite rappresentazioni matematiche "diverse ma equivalenti" che si ottengono a seguito di un cambiamento di coordinate nello spazio degli stati conservano tutte le proprietà fisico-strutturali del sistema dinamico di partenza: la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.

- Tutto ciò si riflette nel fatto che le matrici trasformate $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ conservano particolari proprietà geometrico/matematiche delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ del sistema di partenza (es: autovalori, la dimensione di certi sottospazi vettoriali, ecc.).

Autovalori ed autovettori di una matrice $\mathbf{A}$

- Sia data una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di dimensione n. Se esiste un vettore non nullo $\mathbf{v}$ e uno scalare λ tali che:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \leftrightarrow \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

  allora:

  - λ è un *autovalore* della matrice $\mathbf{A}$;
  - $\mathbf{v}$ è un *autovettore* della matrice $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore λ;

- L'insieme di tutti gli autovettori associati ad un certo autovalore λ è uno spazio vettoriale detto *autospazio* U_λ. La dimensione m dell'autospazio U_λ è detta *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ.

- L'insieme degli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ è detto *spettro* di $\mathbf{A}$.

- *Proprietà*. L'autospazio U_λ è invariante rispetto alla matrice $\mathbf{A}$, cioè ogni elemento di U_λ viene "trasformato" dalla matrice $\mathbf{A}$ in un elemento appartenente ancora al sottospazio U_λ.

- *Proprietà*. Ad autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ distinti corrispondono autovettori *linearmente indipendenti* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h$. Per questo motivo due autospazi U_{λ_i} e U_{λ_j} relativi ad autovalori diversi λ_i e λ_j, sono disgiunti.

- *Proprietà*. Se l'unione di tutti gli autospazi U_{λ_i} coincide con l'intero spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ allora sicuramente esiste una base dello spazio $\mathbf{R}^n$ esprimibile come combinazione lineare degli autovettori della matrice $\mathbf{A}$ e quindi esiste una trasformazione $\mathbf{T}$ che porta la matrice $\mathbf{A}$ in forma diagonale: $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. In generale, non tutte le matrici sono diagonalizzabili.

- Il polinomio:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \stackrel{\triangle}{=} \Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$$

  é detto *polinomio caratteristico* della matrice $\mathbf{A}$. La molteplicità r dell'autovalore λ come soluzione dell'equazione caratteristica $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ è detta *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ. In generale, la molteplicità algebrica r è maggiore o uguale alla molteplicità geometrica m.

- *Tutti e soli* gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ si determinano calcolando le soluzioni λ_i dell'*equazione caratteristica*: $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

- Se λ_i è un autovalore della matrice $\mathbf{A}$, la soluzione del seguente sistema di equazioni lineari nell'incognita $\mathbf{v}$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{v}_i = 0$$

  fornisce l'insieme di tutti gli autovettori $\mathbf{v}_i$ relativi all'autovalore λ_i e quindi determina completamente l'autospazio U_{λ_i}.

- Esempio. Le seguenti 2 matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ sono caratterizzate dallo stesso autovalore $\lambda = 1$. Tale autovalore ha molteplicità algebrica $r = 2$ per entrambe le matrici, ma ha diversa molteplicità geometrica m:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (\lambda - 1)^2 = 0, \qquad r = 2, \quad m = 2$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (\lambda - 1)^2 = 0, \qquad r = 2, \quad m = 1$$

- Proprietà. L'insieme degli autovalori di una trasformazione lineare $\mathbf{A}$ è indipendente dalla particolare "base" scelta per descrivere la trasformazione lineare stessa.

- Proprietà. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Sia $\mathbf{T}$ una matrice non singolare e sia $\overline{\mathbf{A}}$ la matrice ottenuta da $\mathbf{A}$ per similitudine

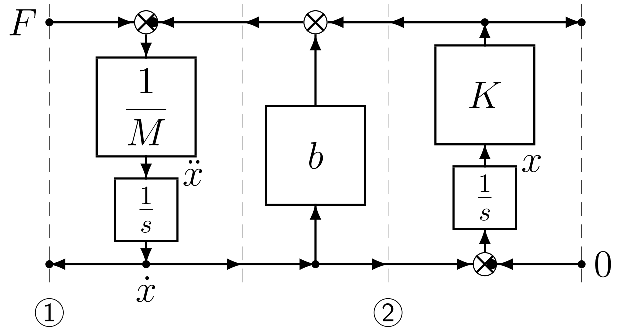
$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$$

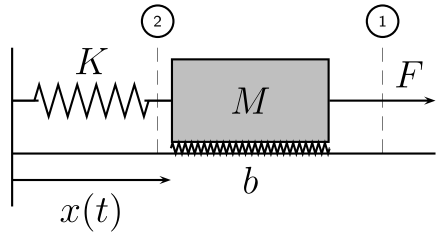
  Il polinomio caratteristico della matrice $\overline{\mathbf{A}}$ è:

$$\begin{aligned} \Delta_{\overline{\mathbf{A}}}(\lambda) &= \det(\lambda\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) \\ &= \det(\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}) \\ &= \det\mathbf{T}^{-1}\,\det(\lambda - \mathbf{A})\,\det\mathbf{T} = \det(\lambda - \mathbf{A}) = \Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) \end{aligned}$$

- Se le matrici $\mathbf{A}$ e $\overline{\mathbf{A}}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, allora hanno anche gli stessi autovalori.

Esempio. Consideriamo il sistema dinamico costituito da una massa M collegata ad una molla di rigidità K soggetta ad un attrito viscoso b e su cui agisce una forza F:





Il comportamento del sistema può venire descritto dall'equazione differenziale:

$$F = M\ddot{x} + b\,\dot{x} + Kx$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema dinamico considerato è la seguente:

$$G(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + K} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{K}{M}}$$

I poli s_1 e s_2 della funzione di trasferimento $G(s)$ sono:

$$s_1 = -\frac{b}{2M} - \sqrt{\left(\frac{b}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}, \qquad s_2 = -\frac{b}{2M} + \sqrt{\left(\frac{b}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

Posto $\mathbf{x} = [x,\ \dot{x}]^T$ e $y = x$, il sistema dinamico considerato può anche essere descritto nello spazio degli stati nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Le matrici di sistema hanno la forma seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + \lambda\frac{b}{M} + \frac{K}{M}$$

Gli zeri λ_1 e λ_2 del polinomio caratteristico sono gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$:

$$\lambda_1 = -\frac{f}{2M} - \sqrt{\left(\frac{f}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{f}{2M} + \sqrt{\left(\frac{f}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

Gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice $\mathbf{A}$ coincidono con i poli s_1 e s_2 della funzione di trasferimento $G(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ del sistema dinamico considerato.

- Sia dato il sistema autonomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x},$$

sia $\mathbf{v}$ un autovettore della matrice $\mathbf{A}$ associato all' autovalore λ:

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = 0$$

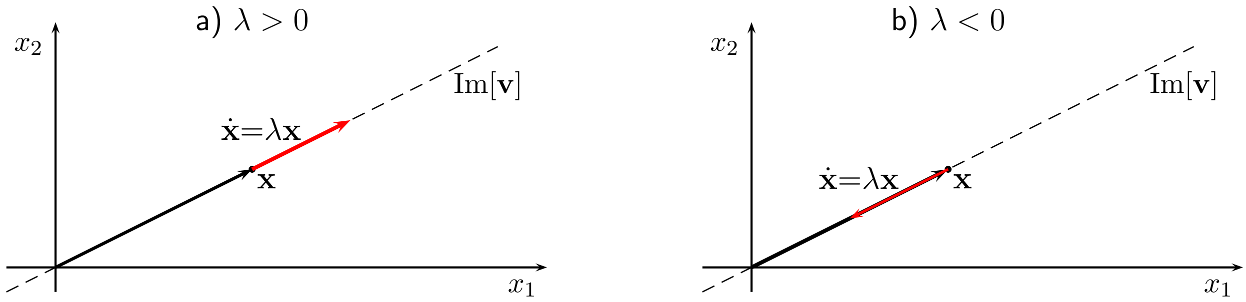
e sia $\mathbf{x}$ un vettore di stato proporzionale all'autovettore $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{v} \in \mathrm{Im}[\mathbf{v}].$$

- Sotto queste ipotesi il vettore velocità $\dot{\mathbf{x}}$ è parallelo a $\mathbf{x}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}.$$

- Rappresentazione grafica:



- **Le rette associate agli autovettori reali $\mathbf{v}$ sono**, all'interno dello spazio degli stati, **le uniche traiettorie rettilinee che il sistema autonomo possa avere**.

- Se lo stato iniziale $\mathbf{x}_0$ di un sistema dinamico lineare tempo-continuo appartiene alla retta associata all'autovettore $\mathbf{v}$, la corrispondente evoluzione libera del sistema è tutta contenuta all'interno di tale retta.

- Se $\lambda > 0$ la traiettoria si allontana dall'origine, se $\lambda < 0$ la traiettoria tende asintoticamente a zero, se $\lambda = 0$ la traiettoria coincide con lo stato iniziale: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.