Controllo Sliding Mode

Esempio. Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 + u \end{cases}$$

e si analizzi il comportamento dinamico del sistema retroazionato nel caso in cui si utilizzi il seguente controllo:

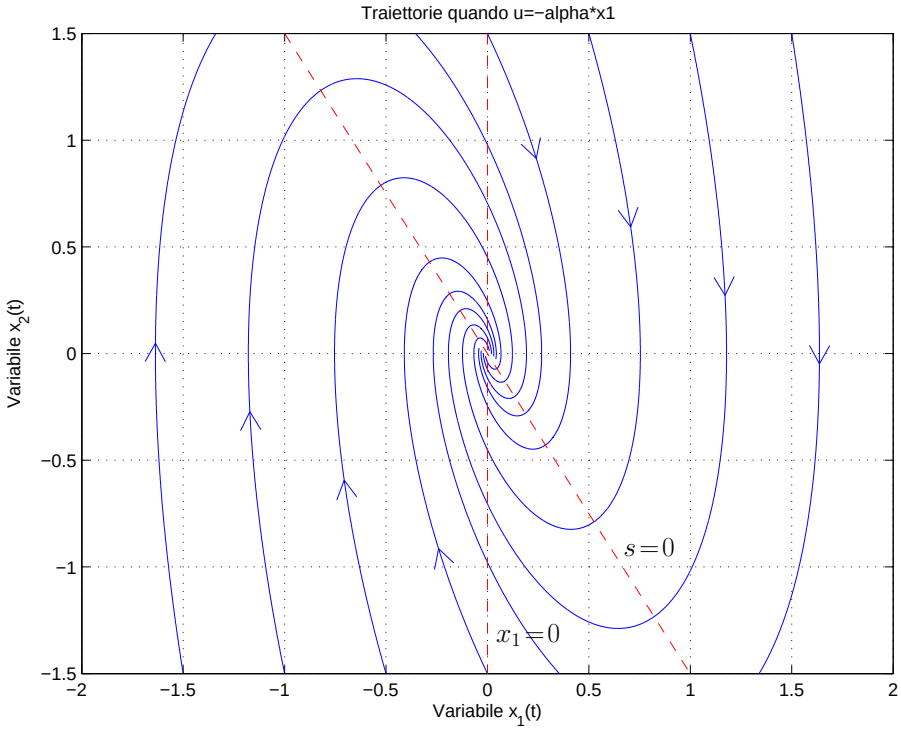
$$u = \begin{cases} -\alpha x_1 & \text{se} \quad x_1 s > 0 \\ \alpha x_1 & \text{se} \quad x_1 s < 0 \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad s = c_1 x_1 + x_2$$

Utilizzare i seguenti parametri: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $\alpha = 3$, $c_2 = 1.5$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico del sistema senza retroazione è: $p(s) = s^2 + a_1 s + a_0$. Il sistema proposto ha una "struttura variabile" nel senso che al variare del segno della funzione $x_1 s$ il sistema ha comportamenti dinamici strutturalmente diversi. Il polinomio caratteristico del sistema retroazionato è:

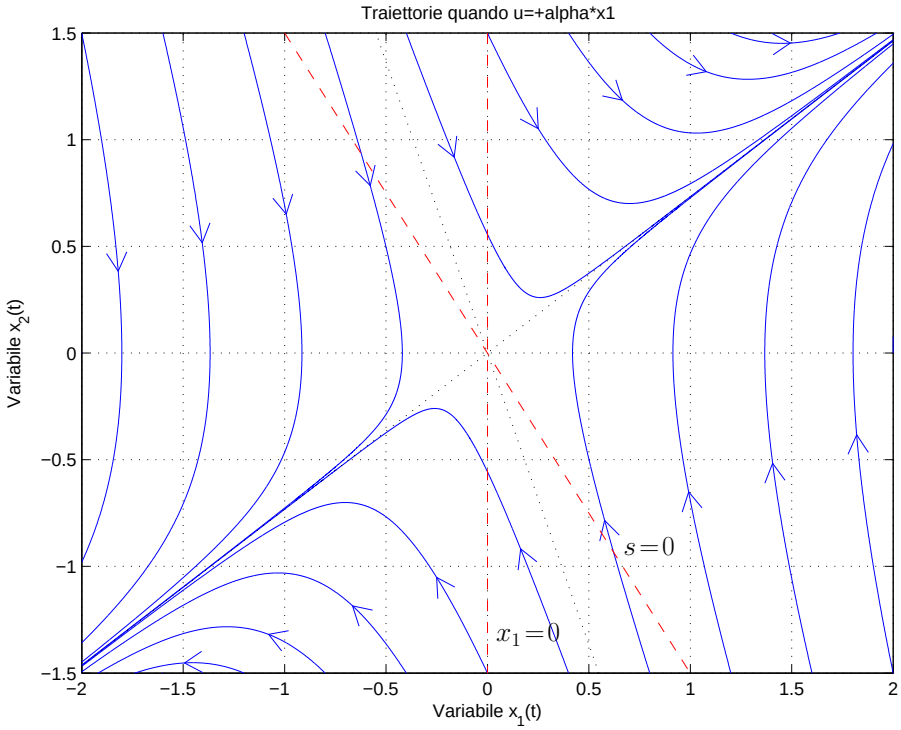
$$p(s) = s^2 + a_1 s + a_0 + \alpha \ \text{sign}(x_1 s).$$

Traiettorie del sistema nel caso in cui sign$(x_1 s) > 0$ (fuoco stabile):

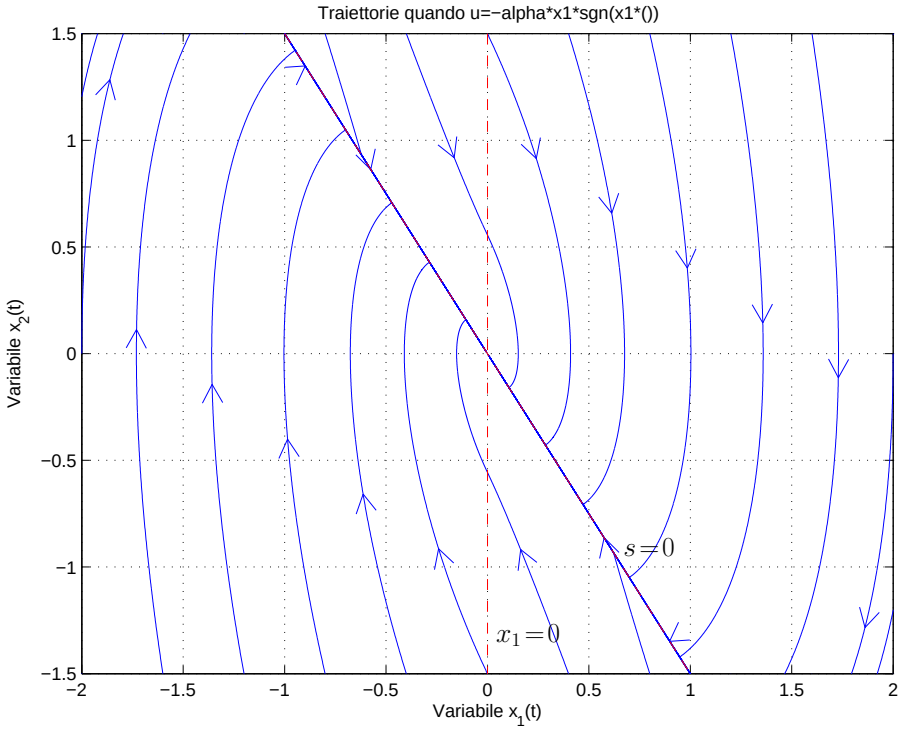


In figura sono mostrate in rosso le linee lungo le quali si ha un cambiamento di segno della funzione $x_1 s$.

Traiettorie del sistema nel caso in cui sign$(x_1 s) < 0$ con $\alpha > a_0$ (sella):

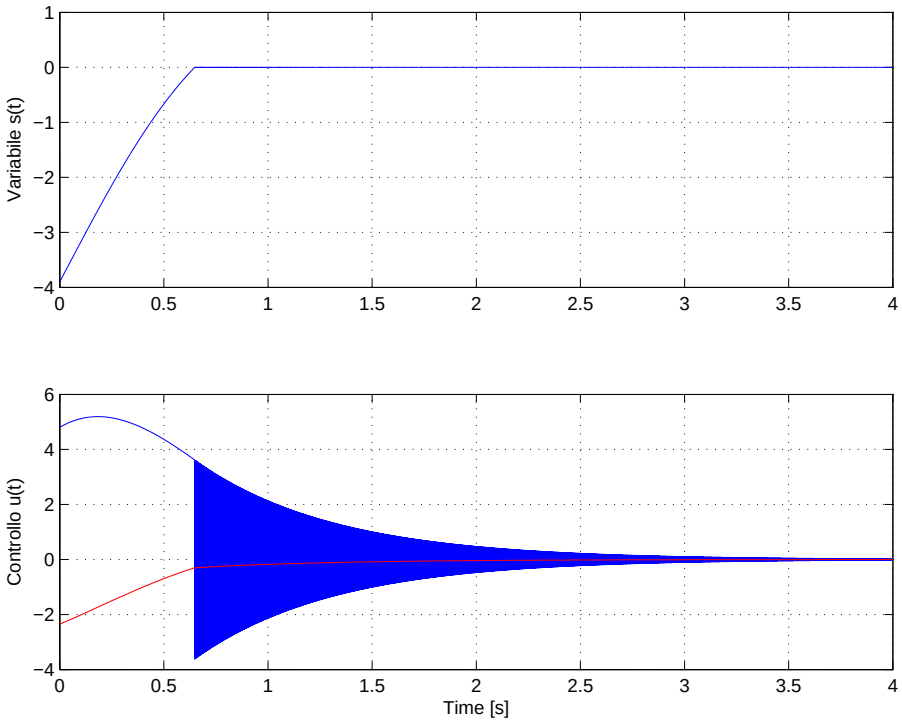


Utilizzando il controllo $u = -\alpha x_1$ sign$(x_1 s)$ si ottengono le seguenti traiettorie:



Il sistema retroazionato risulta globalmente asintoticamente stabile.

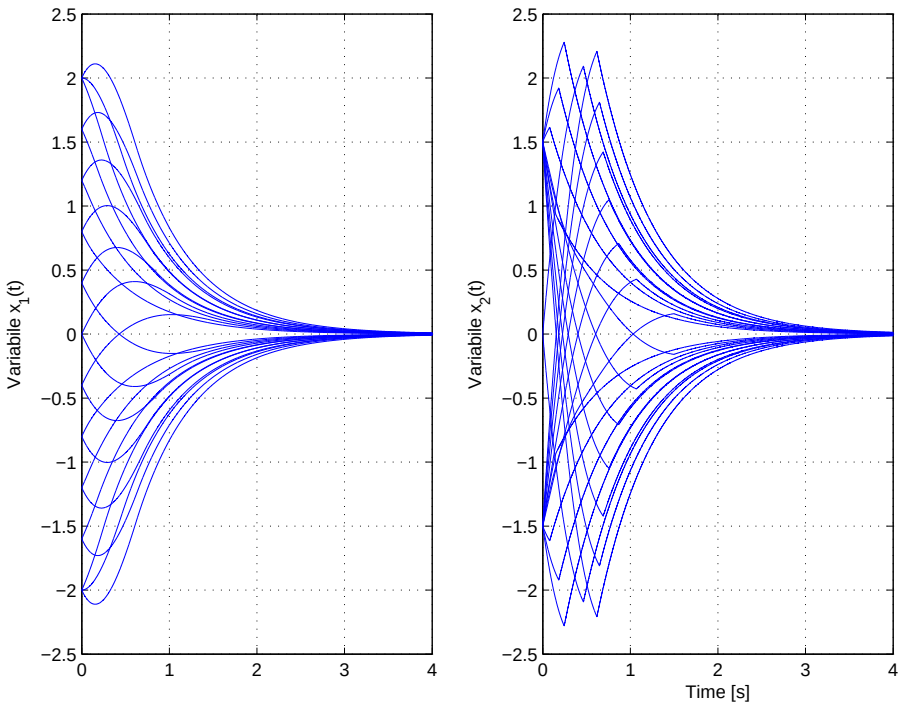
Quando le traiettorie raggiungono la linea $s = 0$, cioè $x_2 = -c_1 x_1$, il controllo $u(t)$ incomincia a commutare a frequenza "infinita" e da quel punto in poi le traiettorie "scivolano" lungo la linea $s = 0$.



Ricordando che $x_2 = \dot{x}_1$, la dinamica del sistema in condizioni di sliding è:

$$s = 0, \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}_1 = -c_1 x_1 \qquad \rightarrow \qquad x_1(t) = e^{-c_1 t} x_1(0)$$

cioè le variabili di stato tendono a zero con una velocità (cioè un tempo di assestamento) che non è più funzione dei parametri del sistema, ma è funzione solamente dei coefficienti (in questo caso c_1) della superficie di sliding $s = 0$.



La variabile di controllo $u(t)$ commuta a frequenza infinita e in ogni istante assume un valore medio pari al controllo equivalente u_{eq} necessario per mantenere la traiettoria del sistema esattamente sulla superficie $s = 0$. Il controllo equivalente u_{eq} si determina imponendo $\dot{s} = 0$:

$$\dot{s} = 0 \qquad \rightarrow \qquad c_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad c_1x_2 - a_0x_1 - a_1x_2 + u_{eq} = 0$$

da cui si ricava:

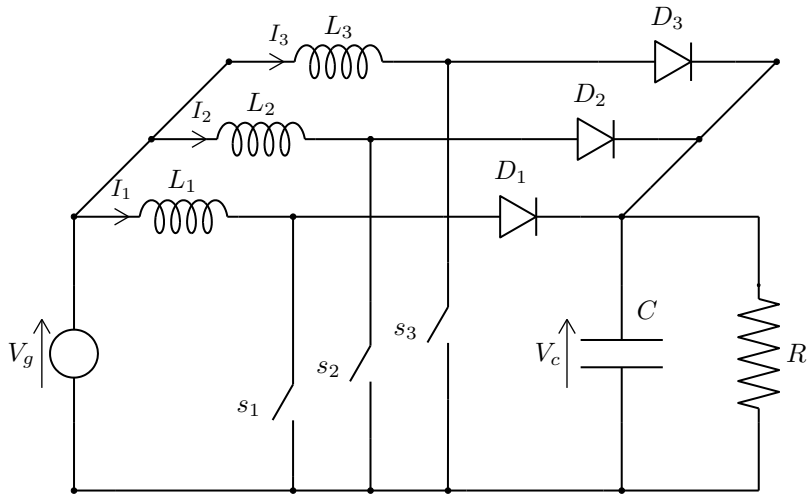
$$u_{eq} = -c_1x_2 + a_0x_1 + a_1x_2$$

La tecnica di controllo Sliding Mode è caratterizzata dai seguenti aspetti:

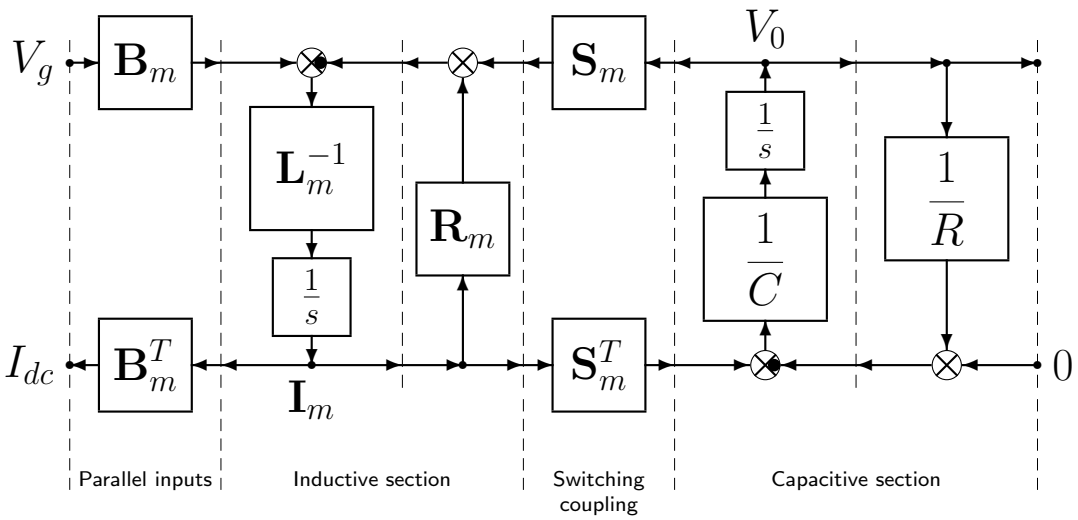
- E' adatta solamente nei casi un cui la variabile di controllo $u(t)$ possa commutare a frequenza molto elevata. È adatta per esempio nel caso del controllo di motori elettrici dove $u(t)$ tipicamente è una tensione.
- Da un punto di vista pratico la frequenza di commutazione è "finita", per cui la superficie di sliding $s = 0$ viene inseguita con un piccolo errore.
- La commutazione "a frequenza finita" del controllo introduce un'oscillazione ad alta frequenza all'interno del sistema ("chattering") che se non viene adeguatamente filtrata dal sistema può causare vibrazioni o rumore all' interno del sistema.
- I disturbi che agiscono sul sistema durante la fase di sliding e che non saturano il controllo *vengono eliminati completamente e istantaneamente*.
- La dinamica del sistema sulla superficie di sliding $s = 0$ è funzione dei soli parametri della superficie stessa.

Interleaved Boost Converter with magnetic coupling

Let us consider the following physical system which describes an interleaved Boost Converter with magnetic coupling ($m = 3$):



The POG scheme of the Boost Converter is the following:



Matrices $\mathbf{B}_m$ $\mathbf{L}_m$, $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{S}_m$ and $\mathbf{I}_m$ are defined as follows:

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1m} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} & \dots & M_{2m} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 & \dots & M_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1m} & M_{2m} & M_{3m} & \dots & L_m \end{bmatrix},$$

and

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

where s_i are the control inputs:

$$s_i \in \{0,\ 1\}, \qquad\qquad i \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

The corresponding state space description is the following:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_m & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_m \\ \dot{V}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{R}_m & -\mathbf{S}_m \\ \mathbf{S}_m & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ V_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_g \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{1}$$

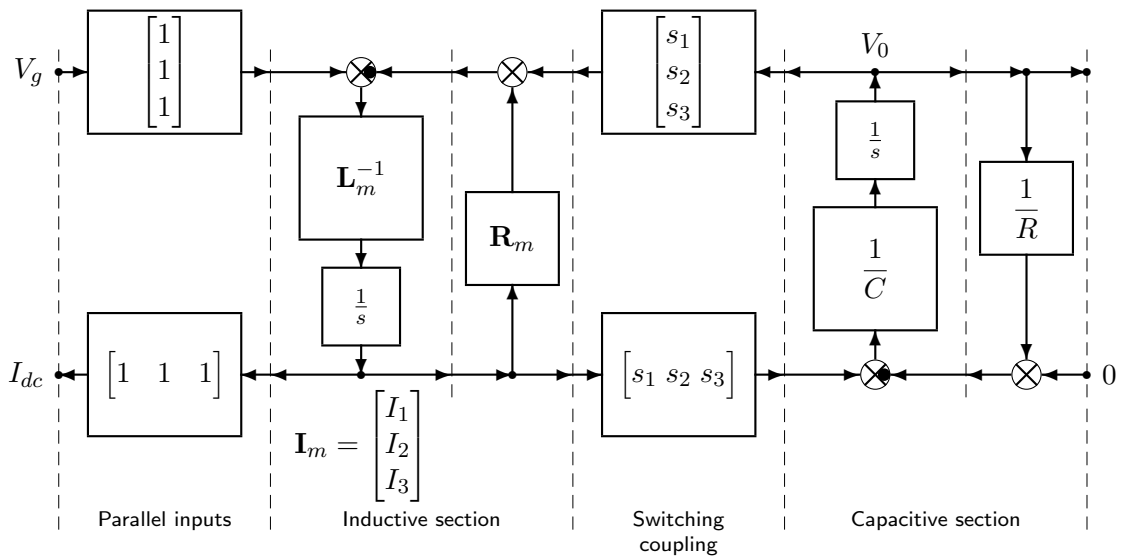
In a compact form it is:

$$\mathbf{L}\,\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$$

The energy stored in the system E_s and the dissipating power P_d can be easily computed as follows:

$$E_s = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\,\mathbf{L}\,\mathbf{x}, \qquad\qquad P_d = \mathbf{x}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

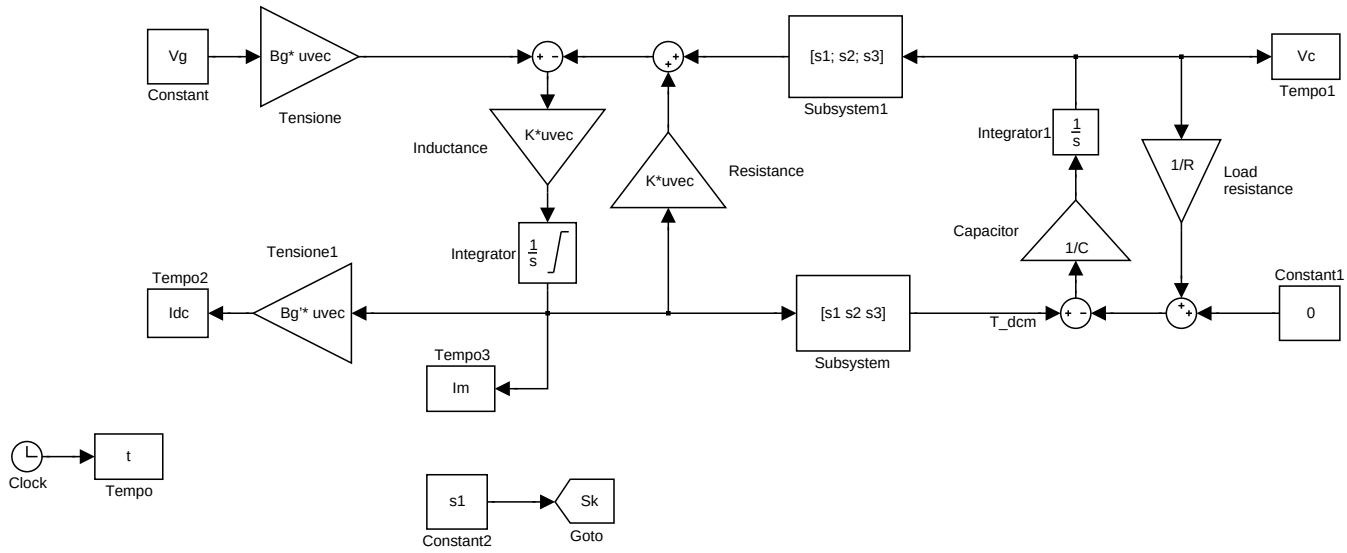
The POG scheme of the Boost Converter when $m = 3$ is the following:



From The POG scheme it is straightforward to obtain the following state space description:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} L_1 & M_{12} & M_{13} & 0 \\ M_{12} & L_2 & M_{23} & 0 \\ M_{13} & M_{23} & L_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \hline \dot{V}_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -R_1 & 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & -R_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & -R_3 & -s_3 \\ \hline s_1 & s_2 & s_3 & -\frac{1}{R} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \hline V_0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \left[V_g\right]$$

The POG scheme can be directly introduced in Simulink:



When $m = 1$ one obtains the following simplified model:

$$\begin{cases} L_1 \dot{I}_1 &= -R_1 I_1 - s_1 V_0 + V_g \\ C\dot{V}_0 &= s_1 I_1 - \frac{1}{R} V_0 \end{cases} \tag{2}$$

In matrix form it can be described as follows:

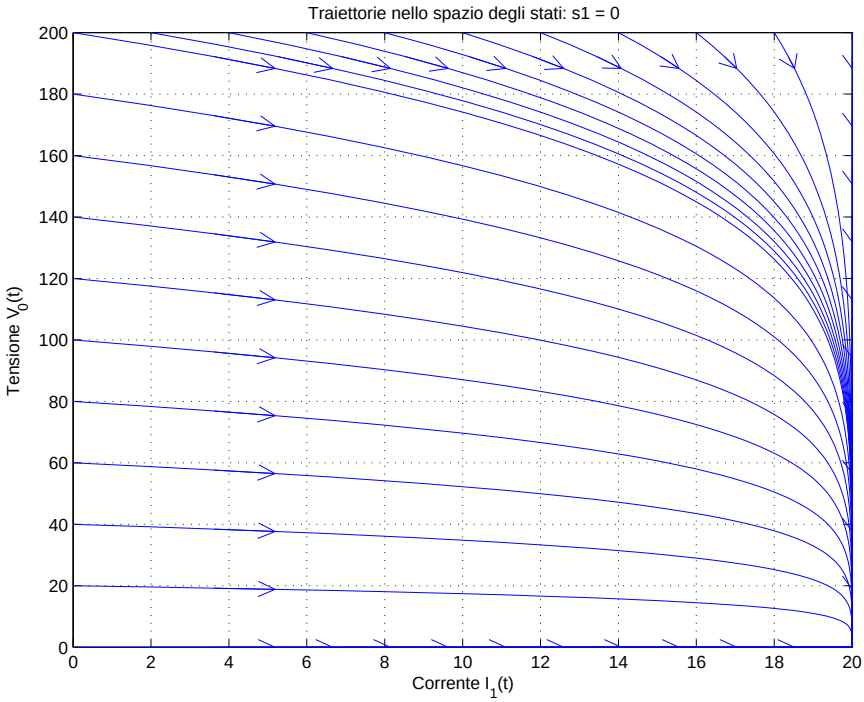
$$\left[\begin{array}{c|c} L_1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \hline \dot{V}_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -R_1 & -s_1 \\ \hline s_1 & -\frac{1}{R} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} I_1 \\ \hline V_o \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] V_g \tag{3}$$

When $s_1 = 0$, the two dynamic elements are de-coupled:

$$\begin{cases} L_1 \dot{I}_1 &= -R_1 I_1 + V_g \\ C\dot{V}_0 &= -\frac{1}{R} V_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_1(t) &= e^{-\frac{R_1}{L_1}t} I_{10} + \frac{V_g}{R_1}\left[1 - e^{-\frac{R_1}{L_1}t}\right] \\ V_0(t) &= e^{-\frac{t}{RC}} V_0 \end{cases}$$

In this case the steady-state point is $(I_1,\ V_0) = (\frac{V_g}{R_1},\ 0)$.

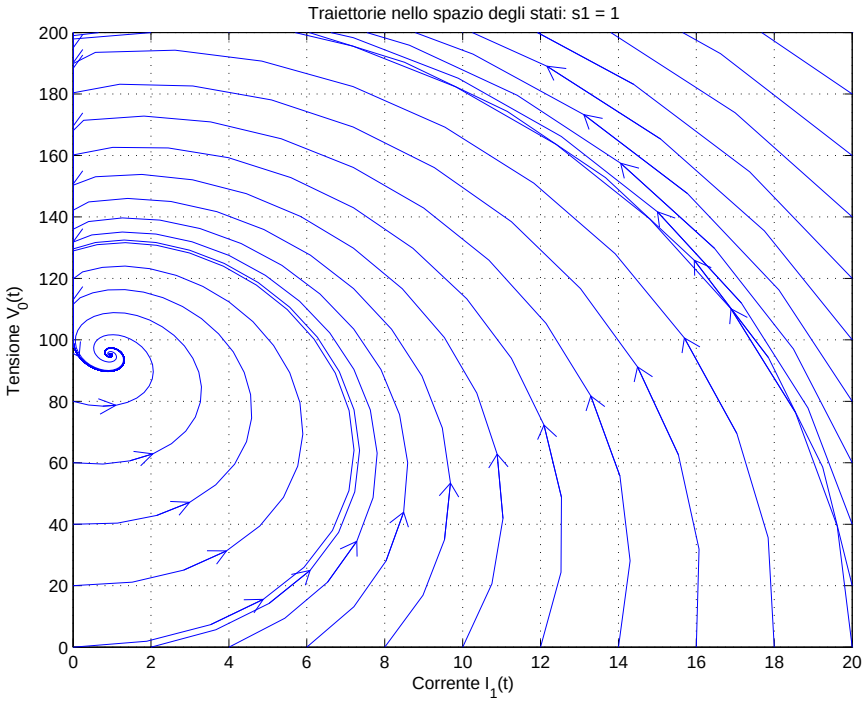
The state space trajectories when $s_1 = 0$ are (see "Boost.m" and "Boost_mdl.mdl"):



When $s_1 = 1$, the two dynamic elements are coupled:

$$\begin{cases} L_1 \dot{I}_1 &= -R_1 I_1 - V_0 + V_g \\ C\dot{V}_0 &= I_1 - \frac{1}{R} V_0 \end{cases}$$

The steady-state point is $(I_1,\ V_0) = (\frac{V_g}{R_1+R},\ \frac{V_g R}{R_1+R})$. The state space trajectories when $s_1 = 1$ are:

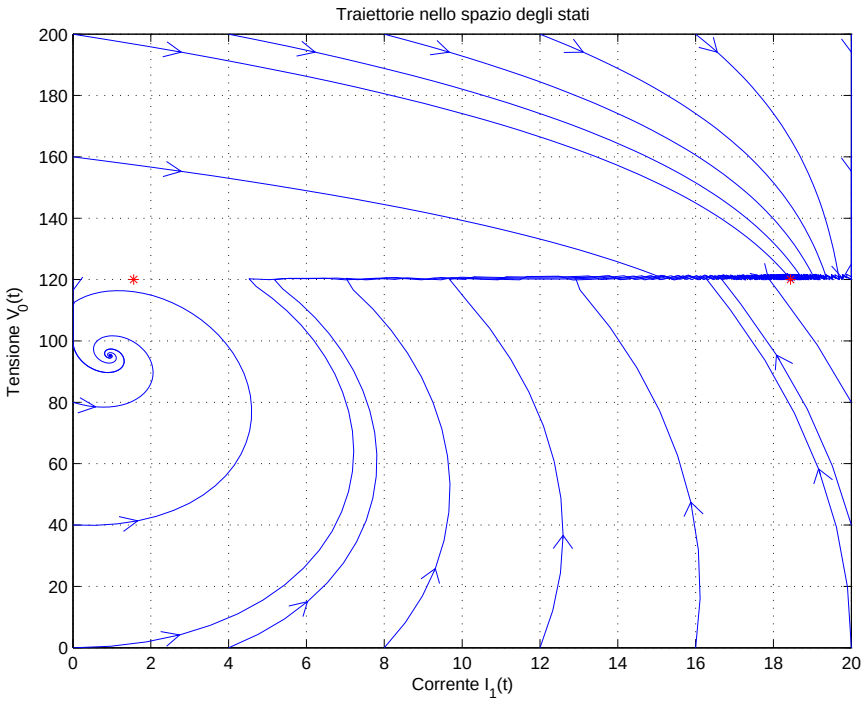


Feedback control

Let V_{ref} denote the desired output voltage and let us consider the following control law:

$$\lambda(V_0) = V_{ref} - V_0 \qquad \Rightarrow \qquad s_1 = \frac{1 + \text{sign}(\lambda(V_0))}{2} = \begin{cases} 1 & \text{if} \;\; \lambda(V_0) \geq 0 \\ 0 & \text{if} \;\; \lambda(V_0) < 0 \end{cases}$$

The obtained trajectories in the state space $(I_1,\ V_0)$ are the following (see files "Boost_3.m" and "Boost_3_mdl.mdl"):



The dynamics of the system when the sliding surface $\lambda(V_0) = V_{ref} - V_0 = 0$ is reached is obtained by imposing $\dot{\lambda}(V_0) = 0$:

$$\dot{V}_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_1 I_1 - \frac{1}{R} V_{ref} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_1 = \frac{V_{ref}}{R\, I_1} = \bar{s}_1$$

The control variable $s_1 \in \{0,\ \ ,1\}$ theoretically switches at infinite frequency with duty-cycle equal to $\bar{s}_1 \in [0,\ 1]$. The duty-cycle cannot exceed the maximum value:

$$\bar{s}_1 < 1 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_1 > \frac{V_{ref}}{R}}$$

When parameters R and I_1 change, the duty-cycle $\bar{s}_1$ changes such to guarantee that $V_0 = V_{ref}$. Substituting $\bar{s}_1$ in the first equation of system (2) one

obtains the following nonlinear differential equation:

$$\dot{I}_1 = -\frac{R_1 I_1}{L_1} - \frac{V_{ref}^2}{R\,L_1\,I_1} + \frac{V_g}{L_1} \qquad \leftrightarrow \qquad \dot{I}_1 = f(I_1) \tag{4}$$

The equilibrium points $I^*_{1a,1b}$ of this equation are obtained when $\dot{I}_1 = 0$:

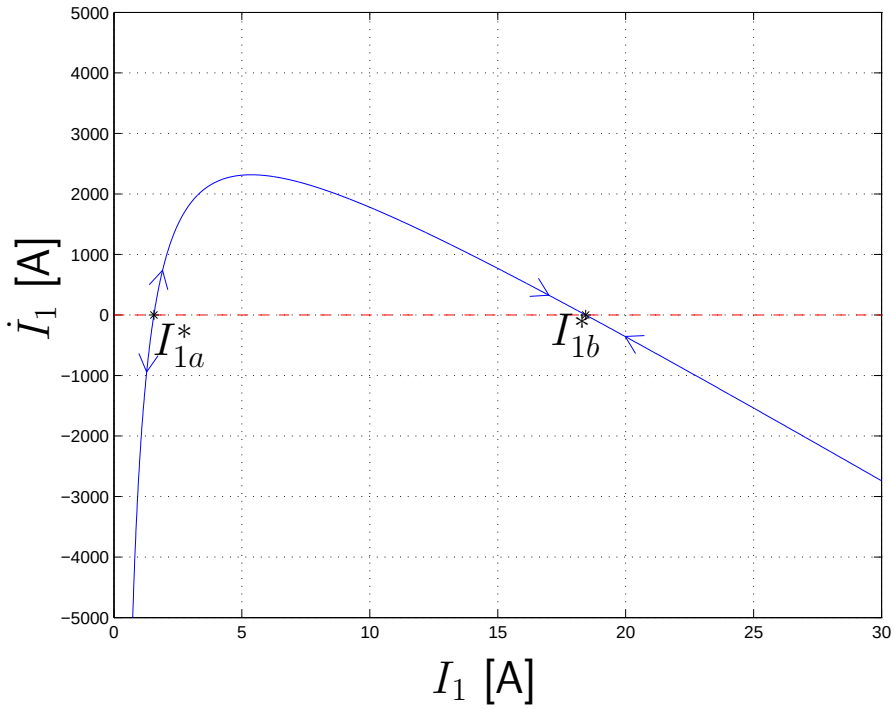
$$R_1 R\, I_1^2 - V_g R\, I_1 + V_{ref}^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad I^*_{1a,1b} = \frac{V_g R \mp \sqrt{V_g^2 R^2 - 4\,R_1 R V_{ref}^2}}{2\,R_1 R}$$

The equilibrium points $I^*_{1a,1b}$ are real only if:

$$V_g^2 R^2 - 4\,R_1 R V_{ref}^2 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{V_{ref} < \sqrt{\frac{R}{4R_1}}\,V_g}$$

Qualitative behavior of variable $\dot{I}_1$ as a function of current I_1, see eq. (4).

Function $\dot{I}_1 = \dot{I}_1(I_1)$



From this figure it is evident that the equilibrium point I^*_{1a} is unstable, while the equilibrium point I^*_{1b} is stable. Equation (4) can be linearized computing the Jacobian of function $f(I_1)$:

$$J(I_1) = \frac{\partial f(I_1)}{\partial I_1} = -\frac{R_1}{L_1} + \frac{V_{ref}^2}{R\,L_1\,I_1^2}$$

One can easily verify that $J(I^*_{1a}) > 0$ and $J(I^*_{1b}) < 0$, that is point I^*_{1a} is unstable and point I^*_{1b} is stable.